



**Sur la résolution de certains problèmes complexes de diffusion
avec singularités dues à des conditions aux limites non-homogènes.
Application à la caractérisation, la validation des modèles numériques
et l'optimisation**

**Najib Laraqi
Laboratoire Thermique Interfaces Environnement**

Najib Laraqi

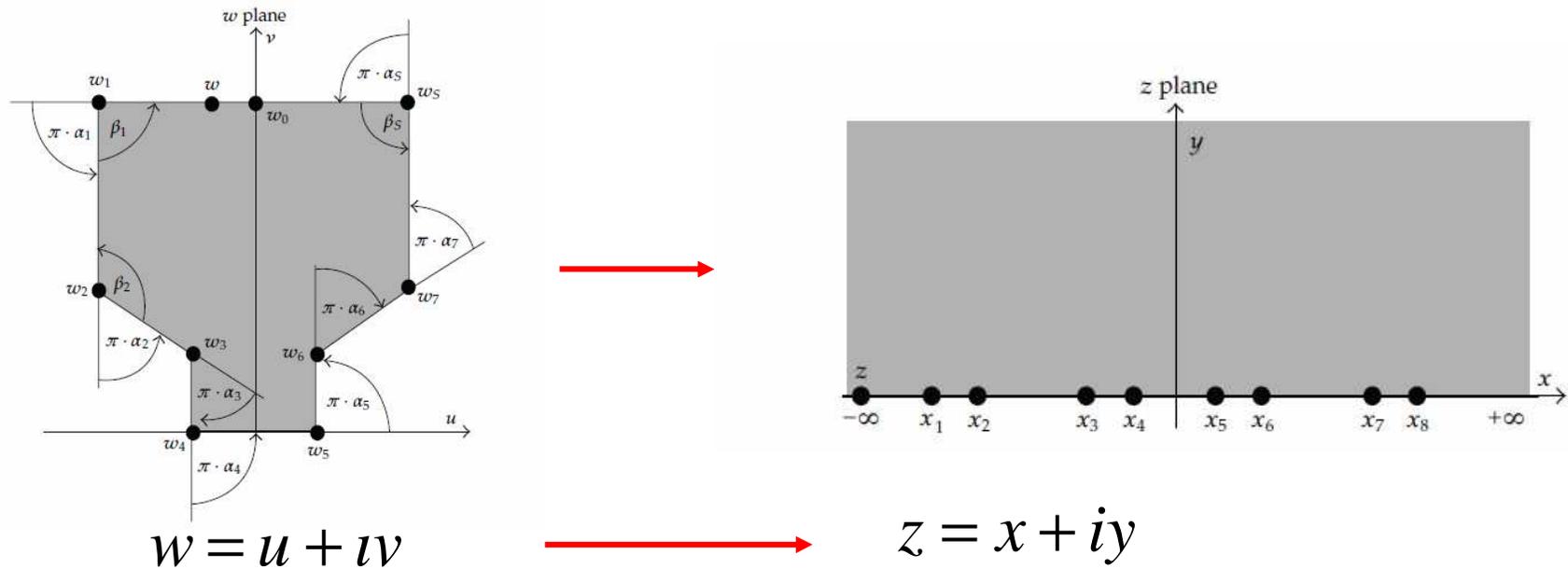
On s'intéresse ici à des problèmes de conduction avec une condition non-homogène sur la même face (exemple Dirichlet et Neumann).

Les techniques habituelles utilisant les transformations intégrales (Fourier, Hankel ...) deviennent moins adaptées et nécessitent l'utilisation de séries tronquées très coûteuses en temps de calcul et souvent peu précises.

Une alternative consiste à utiliser les transformations conformes et le théorème de Schwarz-Christoffel.

Dans cette présentation, on rappelle rapidement le formalisme de cette technique et on l'applique un problème axisymétrique complexe.

Utilisation des transformations conformes et du théorème de Schwarz-Christoffel



Dessin extrait de: doi:10.1155/2010/742039

Théorème de Schwarz-Christoffel

$$w = f(z) = A + C \int \prod_{n=1}^N \frac{1}{(z - x_n)^{\alpha_n}} dz,$$

La transformation est conforme si:

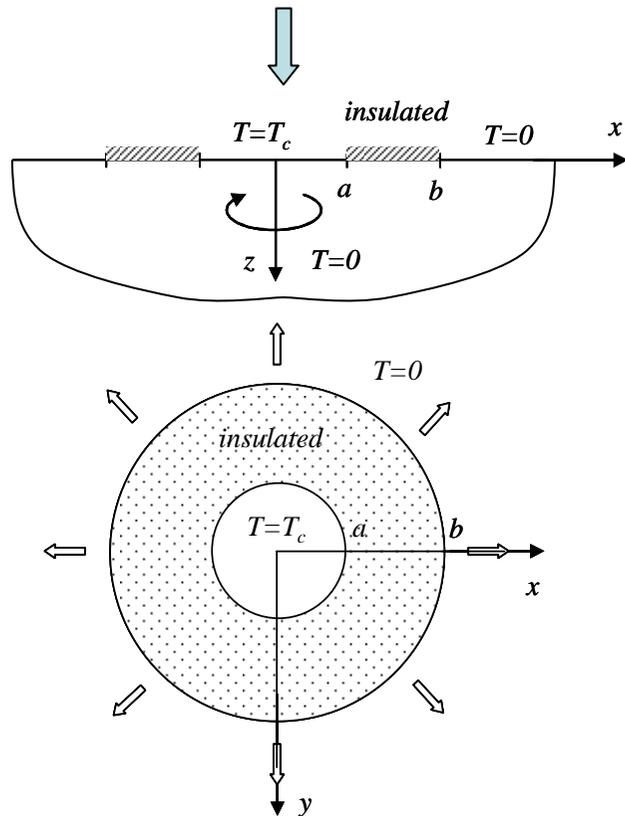
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}$$

Si bien qu'en cartésien:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

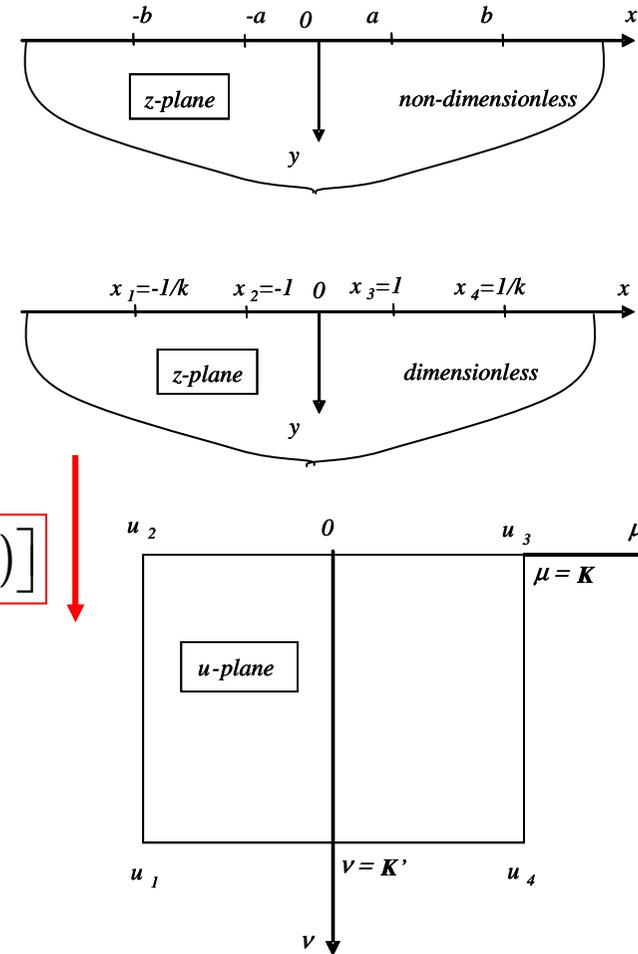
Exemple en axisymétrie

On cherche à déterminer la résistance thermique entre les isothermes T_c et $T=0$



$$k = \frac{a}{b}$$

$$z(x, y) = sn[u(\mu, \nu)]$$



$K(k)$ est l'intégrale elliptique et $K'(k)=K(k')$ avec $k'^2=1-k^2$
 $sn(u)$ est la fonction de Jacobi

Le changement de coordonnées est donné par

$$\begin{cases} x = a \frac{sn(\mu)dn(v)}{\Delta} \cos \psi \\ y = \frac{sn(\mu)dn(v)}{\Delta} \sin \psi, \text{ with } \Delta = 1 - sn^2(v)dn^2(\mu) \\ z = a \frac{cn(\mu)dn(\mu)sn(v)cn(v)}{\Delta} \end{cases}$$

where cn , dn , sn are the Jacobi functions.

On a ainsi:

$$e_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

$$e_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu} \right)^2$$

$$e_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2$$

La résistance thermique est définie par :

$$R_c = \frac{T_{v=0} - T_{v=K'}}{\phi}$$

où :

$$\phi = \int_s -\lambda \frac{dT}{dv} \frac{1}{e_1} (e_2 d\mu)(e_3 d\psi)$$

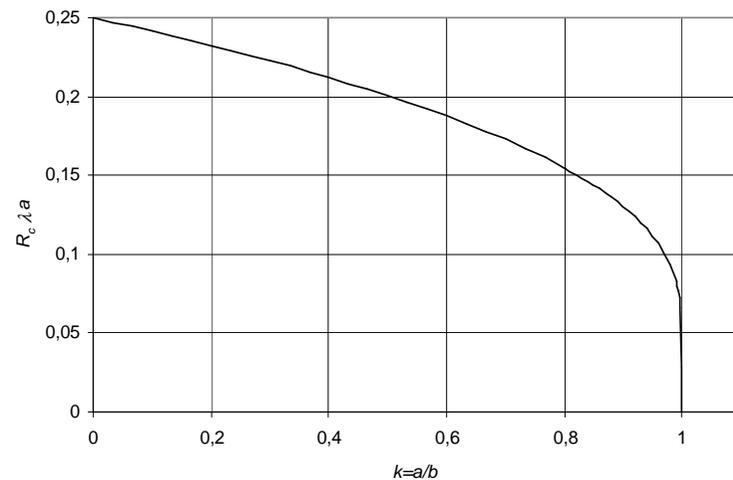
En remplaçant e_1 , e_2 , e_3 par leurs expressions respectives établies ci-dessus, on obtient :

$$R_c = \frac{1}{2\pi\lambda a \int_{\mu=0}^K \frac{d\mu}{\int_0^{K'} \frac{1 - dn^2(\mu)sn^2(v)}{sn(\mu)dn(v)} dv}}$$

Ces intégrales se déterminent de façon explicite, et après quelques calculs, on trouve une expression simple de la résistance thermique.

Expression finale de la résistance thermique

$$R_c^* = R_c \lambda a = \frac{\sqrt{k}}{2 \ln \left[\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right]} \quad \boxed{k = \frac{a}{b}}$$



On vérifie bien les cas limites (k=0 et k=1) connus dans la littérature.

$$\lim_{k \rightarrow 1^-} R_c^* = \frac{1}{2 \ln \left(\frac{2}{0^+} \right)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} R_c^* = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{k}}{2 \ln \left[\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} \right]} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2 \left[\frac{\ln(1 + \sqrt{k})}{\sqrt{k}} - \frac{\ln(1 - \sqrt{k})}{\sqrt{k}} \right]} = \frac{1}{4}$$

Comparaison à des simulations numériques

Les simulations numériques ne sont pas d'une très grande précision à cause des difficultés liées aux singularités en $r=a$ et $r=b$, mais elles permettent néanmoins de valider la solution analytique.

k	Numérique	Analytique	écart relatif
0	0,25	0,25	0,00%
0,1	0,24486	0,241432	1,42%
0,2	0,2399	0,232337	3,26%
0,3	0,2261	0,222607	1,57%
0,4	0,21478	0,212092	1,27%
0,5	0,2004	0,20057	0,08%
0,6	0,18722	0,187696	0,25%
0,7	0,1706	0,172873	1,31%
0,8	0,1526	0,154891	1,48%
0,9	0,1289	0,130425	1,17%
0,95	0,11075	0,111864	1,00%
0,99	0,08249	0,083103	0,74%
0,999	0,06032	0,060258	0,10%
0,9999	0,0473	0,047183	0,25%