

Chapitre 6

CONVECTION MIXTE

Il suivait son idée. C'était une idée fixe et il était surpris de ne pas avancer.

Jacques PREVERT

6.1. - CARACTÈRES SPÉCIFIQUES

Dans l'étude de la convection forcée, on a ignoré les effets de la gravité. En convection naturelle, on ne s'est intéressé qu'à eux. Il existe pourtant un grand nombre de situations intermédiaires où les mécanismes de la convection forcée et de la convection libre coexistent avec des ordres de grandeur comparables : nous sommes là dans le véritable *cas général* de la convection, que l'on a préféré baptiser plus élégamment "*convection mixte*". Parmi les exemples de cette mixité, on peut citer : les écoulements lents en canalisations (comme dans les radiateurs à eau) ou le long d'une paroi, les jets anisothermes (chauffage ou climatisation des locaux, panaches de fumée, ...), les écoulements atmosphériques et les courants marins (qui sont importants pour les questions de climatologie et de pollution), et plus généralement beaucoup d'écoulements fortement anisothermes.

Mais un aspect nouveau fait ici son apparition : les deux mécanismes vont s'aider ou se contrarier selon le sens relatif du mouvement forcé par rapport au mouvement gravitaire, qui jouera donc un rôle essentiel. Si les effets de la pesanteur s'opposent au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique a tendance à diminuer et on parle de *convection mixte "contrariée"*. Si l'écoulement forcé est de même sens que l'écoulement libre (cas de la plaque verticale chauffée, dans un fluide lui-même en mouvement ascendant) il se produit une amplification des transferts par rapport à la convection forcée seule et on parle alors de *convection mixte "aidée"*. Enfin, l'écoulement forcé peut être perpendiculaire à la direction des forces de pesanteur (c'est à dire horizontal !). En général on observe là aussi une amélioration des échanges thermiques.

Pour l'étude des champs de vitesses et de températures, les hypothèses qui ont permis de construire des modèles relativement simples deviennent caduques : on ne peut plus ni admettre une similitude des profils de U et T , ni postuler des formes analytiques simples, par exemple polynôme d'ordre 2 comme dans la version la plus simple de la méthode de Karman-Pohlhausen. En particulier, on se trouve souvent confronté à des zones de recirculation, qui peuvent présenter des caractères d'instabilité. Les modèles doivent donc être adaptés ou renouvelés. Ceci entraîne évidemment des difficultés supplémentaires, calculatoires autant qu'expérimentales.

6.2. - EXPRESSION DES BILANS EN CONVECTION MIXTE

6.2.1. - Formulation générale

En convection mixte, les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'enthalpie ne sont pas formellement différents de ceux qui ont été écrits en convection libre (équations 5.2, 5.3 et 5.7). En effet, l'hypothèse de Boussinesq étant conservée (§ 5.2), la distinction n'apparaît pas dans les équations générales, mais seulement dans les conditions aux limites relatives à la vitesse de l'écoulement. Les trois bilans s'écrivent donc toujours :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (6.1a)$$

$$\vec{V} \cdot \overline{\operatorname{grad} \vec{V}} = -\beta(T - T_\infty) \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overline{\operatorname{grad} p^*} + \nu \Delta \vec{V} \quad (6.1b)$$

$$\vec{V} \cdot \overline{\operatorname{grad} T} = a \Delta T \quad (6.1c)$$

Par contre, dans le cadre de la convection mixte, la similitude demande un traitement séparé.

6.2.2. - La similitude en convection mixte

6.2.2.1. - CRITÈRES DE SIMILITUDE ET ÉQUATIONS ADIMENSIONNÉES

Concernant la similitude, l'existence d'un écoulement forcé change les données du problème par rapport à la convection libre : il n'est plus nécessaire de fabriquer une vitesse de référence puisque nous en avons une sous la main, qui est à la fois mesurable et représentative du phénomène.

Le critère de similitude Γ_β relatif aux forces de volume est donc ici le nombre de Richardson sous sa forme primitive, déjà cité dans le chapitre 5 (§ 5.4.2.2) :

$$\Gamma_\beta = Ri = \frac{g \beta \Delta T^0 L^0}{(V^0)^2} \quad (6.2a)$$

Dans les *problèmes à flux pariétal imposé*, on prend souvent, comme il a déjà été signalé en convection libre (relation 5.64a) : $\Delta T^0 = \varphi_p L^0 / \lambda$, ce qui conduit à un nombre de Richardson modifié :

$$Ri_\varphi^* = \frac{g \beta \varphi_p (L^0)^2}{(V^0)^2 \lambda} \quad (6.2b)$$

Vis-à-vis des forces de viscosité, le critère de similitude est le même qu'en convection forcée, à savoir Γ_v , c'est à dire l'inverse du nombre de Reynolds (§ 1.1.3) :

$$\Gamma_v = \frac{l}{\Re} = \frac{\nu}{V^0 L^0} \quad (6.3)$$

Enfin, dans le bilan d'enthalpie, on retrouve encore pour la diffusion thermique le critère de similitude Γ_a de la convection forcée, qui est l'inverse du nombre de Péclet :

$$\Gamma_a = \frac{l}{Pe} = \frac{a}{V^0 L^0} \quad (6.4)$$

Sur la base des raisonnements qui ont été développés dans les chapitres 1 et 5, en adoptant toujours comme pression de référence $p^0 = \rho_\infty (V^0)^2$ (chap. 3 ou FEMM 2.4.3.1), les équations (6.1) une fois adimensionnées se présentent ainsi :

$$\text{div } \vec{V}^+ = 0 \quad (6.5a)$$

$$\vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V}^+ = Ri T^+ \vec{g}^+ - \overrightarrow{\text{grad}} p^{*+} + \frac{l}{\Re} \Delta \vec{V}^+ \quad (6.5b)$$

$$\vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T^+ = \frac{l}{Pe} \Delta T^+ \quad (6.5c)$$

où $\vec{g}^+ = \vec{g} / g$ est le vecteur unitaire selon la verticale descendante.

En outre, au niveau d'une paroi, le nombre de Stanton (Annexe 1.A.1) reprend ses droits, provisoirement abandonnés au chapitre 5 en faveur de $\Gamma_{\varphi l}$ (5.18a) :

$$St = \frac{\varphi_p}{\rho C_p V^0 \Delta T^0} \quad (6.6)$$

6.2.2.2. - LE COEFFICIENT DE POUSSÉE THERMIQUE

Z Puisque la convection mixte superpose deux mécanismes, la question se pose inévitablement de comparer l'importance de la poussée thermique par rapport aux forces de pression et de frottement visqueux. Si on considère l'équation (6.5b) il est clair que contrairement à ce qui s'écrit parfois le nombre de Richardson à lui seul n'est pas apte à jouer ce rôle de comparateur puisqu'il ne représente que l'aspect "poussée thermique / forces de pression". Pour répondre complètement à

la question, on doit aussi prendre en compte le rapport des coefficients de T^+ et de $\Delta\bar{V}^+$, qui est appelé "coefficient de poussée thermique" :

$$\boxed{\frac{\Gamma_\beta}{\Gamma_\nu} = Ri \mathfrak{R} = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^2}{\nu V^0}} \quad (6.7)$$

Ceci permet de resituer la convection mixte entre les deux cas limites qui l'encadrent :

$$Ri \gg \frac{1}{\mathfrak{R}} \text{ (soit } Ri \mathfrak{R} \rightarrow \infty \text{)} : \text{ convection libre}$$

$$Ri \ll \frac{1}{\mathfrak{R}} \text{ (soit } Ri \mathfrak{R} \rightarrow 0 \text{)} : \text{ convection forcée}$$

Par contre, il doit être bien clair qu'on ne peut pas caractériser une frontière physique de la convection mixte par des valeurs précises du nombre de Richardson ou du coefficient de poussée thermique, les deux régimes de convection libre et de convection forcée étant en quelque sorte (du moins sur terre !) des régimes asymptotiques de la convection mixte.

Cependant, d'un point de vue pratique, on a toujours la liberté de se fixer une fourchette en dehors de laquelle les effets soit de la gravité, soit de l'écoulement forcé, sont inférieurs à $x\%$ du total, c'est à dire négligeables. Cette fourchette dépend évidemment de la géométrie considérée, et des paramètres que l'on choisit comme éléments de comparaison (cf. Problème 6.1).

Ainsi, on peut admettre $Ri \lesssim 10$ en convection mixte *aidée* externe, et $Ri \lesssim 5 \cdot 10^3$ en convection mixte *aidée* interne. Quant à la valeur $Ri \mathfrak{R} \approx 0,5$ parfois donnée pour préciser la séparation convection forcée - convection libre dans un écoulement externe, elle est basée sur la forme du profil de vitesse (§ 6.3.3.♣) mais n'est valable que pour $Pr \approx 1$.

6.2.2.3. - NOTE ÉPISTÉMOLOGIQUE

Il se trouve que dans la littérature les nombres Ri ou $Ri \mathfrak{R}$ sont souvent l'objet d'autres formulations, qui font intervenir les paramètres sans dimension utilisés en convection libre. Ce problème mérite d'être rapidement abordé.

En revenant aux définitions des critères de similitude (§ 1.1.3 et (5.4.2) on vérifiera d'abord aisément les relations suivantes (Padet, 1989) :

$$\Gamma_\beta = \left(\frac{\Gamma_\nu}{\Gamma_{\nu l}} \right)^2 = \left(\frac{\Gamma_a}{\Gamma_{al}} \right)^2 = \left(\frac{\Gamma_\phi}{\Gamma_{\phi l}} \right)^2 \quad (6.8a)$$

soit avec les nombres sans dimension courants:

$$Ri = \frac{Gr}{\mathfrak{R}^2} = \frac{Bo}{Pe^2} = \frac{St^2}{\Gamma_{\phi l}^2} \quad (6.8b)$$

relations mises en évidence par Allard (1987) à partir d'expériences numériques.

Relativement aux différentes sources, les critères de similitude construits avec chacune des deux vitesses de référence utilisées en convection libre et mixte sont donc dans un rapport constant égal à $Ri^{1/2}$.

A la réflexion, cette propriété n'a rien de surprenant si l'on prend la peine de remarquer (formule 6.2a) que $Ri^{1/2}$ est tout simplement le rapport de ces vitesses de référence, qui sont $\sqrt{g \beta \Delta T^0 L^0}$ et V^0 :

$$Ri^{1/2} = \frac{V_{convection\ libre}^0}{V_{convection\ mixte}^0} = \frac{\sqrt{g \beta \Delta T^0 L^0}}{V^0} \quad (6.9)$$

⚠ Mais elle a quand même le mérite de montrer que l'égalité des critères Γ_β , $\Gamma_v \dots$ entre deux expériences assure automatiquement l'égalité des Γ_l correspondants. Autrement dit, si la similitude est satisfaite en convection mixte, elle l'est encore en convection libre, lorsque $V^0 \rightarrow 0$.

Dans le même ordre d'idées, on a aussi pour le coefficient de poussée thermique :

$$Ri \Re = \frac{Gr}{\Re} \quad (6.10)$$

et pour tout arranger, $Ri^{-1/2}$ est parfois appelé "nombre de Froude généralisé".

Disons pour conclure que ces diverses présentations sont formellement correctes, mais contribuent un peu à brouiller les cartes, et ne s'imposent pas vraiment. *En convection mixte, il est plus clair et plus simple de raisonner exclusivement avec Ri et \Re .*

6.3. - CONVECTION MIXTE EXTERNE LE LONG D'UNE PAROI PLANE VERTICALE À TEMPÉRATURE UNIFORME

6.3.1. - Données du problème

Prenons comme base de départ l'exemple de convection naturelle traité dans le paragraphe 5.4.3, celui d'une plaque plane verticale à température uniforme T_p (fig. 6.1). Mais cette fois-ci, le fluide ambiant est animé d'un mouvement ascendant, de vitesse $U_\infty = cte$. L'axe x est dirigé dans le sens de ce mouvement.

Nous sommes à nouveau en présence d'un écoulement de couche limite, pour lequel les approximations classiques restent valables ; en particulier, on admet que

le gradient de pression est nul (cf. 1.2.1). Les équations (6.1) prennent alors la forme simplifiée :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (6.11a)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (6.11b)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6.11c)$$

avec pour conditions aux limites :

$$y=0 \quad : \quad U=0 \quad , \quad T=T_p = cte \quad (6.11d)$$

$$y=\infty \quad : \quad U=U_\infty \quad , \quad T=T_\infty \quad (6.11e)$$

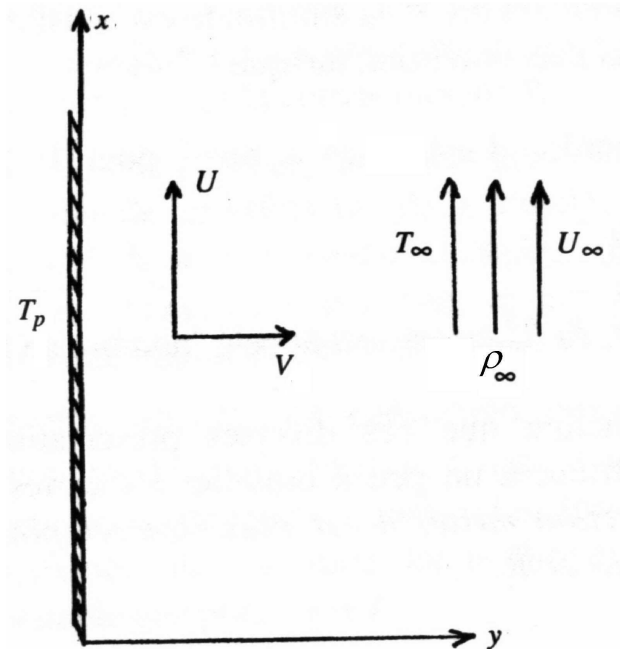


FIG. 6.1 - Convection mixte sur une plaque verticale : données du problème.

6.3.2. - Essai d'application de la méthode différentielle

Au vu de ce qui a été réussi en convection forcée (§ 1.2.1) et en convection libre (§ 5.4.3), il est évidemment tentant de réutiliser ici la méthode différentielle en cherchant des solutions affines dans un espace $[X(x), y]$, c'est à dire en reposant la question : existe-t-il une transformation des coordonnées $[x \rightarrow X(x), y \rightarrow y]$ telle que, en posant :

$$\eta = \frac{y}{X(x)}$$

on ait :

$$\frac{U}{V^0} = f(\eta) \quad \text{et} \quad \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \Theta(\eta)$$

Signalons tout d'abord l'usage de Θ comme température adimensionnée, plus commode ici que T^+ (définition 1.26).

Ensuite, dans notre problème, la vitesse de référence V^0 est tout naturellement la vitesse de l'écoulement extérieur U_∞ . Si F désigne la primitive de la fonction $f(\eta)$, on a donc :

$$V^0 = U_\infty \quad ; \quad U = U_\infty F'(\eta).$$

Le calcul a déjà été effectué au paragraphe 5.5.2. Il conduit à l'équation (5.29a), dans laquelle nous remplaçons V^0 par $U_\infty = cte$, ce qui donne :

$$U_\infty^2 F F'' \frac{1}{X} \frac{dX}{dx} + g \beta \Delta T^0 \Theta + \nu \frac{U_\infty}{X^2} F''' = 0$$

Pour que les solutions de cette équation ne dépendent que de η , il faut que les coefficients des trois termes soient constants. Ceci n'est possible que si $X = cte$, et l'équation se réduit alors à $F''' = 0$, d'où $F' = A\eta + B$, ce qui est incompatible avec la condition à la limite $U \rightarrow U_\infty$ quand y (ou η) $\rightarrow \infty$. Conclusion : le problème n'a pas de solutions affines.

Mais peut-être est-ce le choix de la vitesse de référence $V^0 = U_\infty$ qui est malencontreux ? La réponse est non, car on voit facilement qu'une référence $V^0(x)$ (comme $V^0 = (g \beta \Delta T^0 x)^{1/2}$ en convection libre) ne résout rien. En effet, il nous faut dans ce cas :

$$U = V^0(x) F'(\eta)$$

ce qui ne s'accorde pas avec la condition à l'infini :

$$U_\infty = V^0(x) F'(\infty) = cte$$

et implique ipso facto que $F'(\infty) = F'(\infty, x)$, c'est à dire que $F' = F'(\eta, x)$.

Cette analyse nous amène tout naturellement à élargir le cadre de la méthode différentielle.

6.3.3. - Généralisation de la méthode différentielle



L'étape méthodologique importante que nous allons franchir maintenant résulte d'une simple constatation : il n'y a aucune liaison impérative entre le principe de base de la méthode différentielle (élimination de la composante V par l'utilisation d'une fonction de courant, et remplacement de l'inconnue U par la fonction F) et la recherche de solutions affines. En d'autres termes, on peut parfaitement conserver l'essentiel du formalisme tout en admettant que la fonction F dépend à la fois de η et de x , et de même pour la température adimensionnée Θ . C'est le

sens de la démarche établie par Cebeci pour une large classe d'écoulements externes [Cebeci et Bradshaw, 1984], puis étendue aux écoulements internes [FEMM, Ch. 5].

♣ Ainsi, nous revenons maintenant à la vitesse de référence U_∞ :

$$V^0 = U_\infty \quad (6.12a)$$

et nous posons :

$$\frac{U}{U_\infty} = F'(\eta, x) \quad ; \quad \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \Theta(\eta, x) \quad (6.12b)$$

avec toujours :

$$\eta = \frac{y}{X(x)} \quad (6.12c)$$

Le schéma du calcul reste celui du paragraphe 5.4.3.

Formellement, la fonction de courant est inchangée :

$$\psi = U_\infty X(x) F(\eta, x) \quad (6.13)$$

⚠ mais les dérivées par rapport à x doivent être recalculées. Ainsi, en conservant la notation ' pour désigner la dérivation par rapport à η , V devient :

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -U_\infty F \frac{dX}{dx} - U_\infty X F' \frac{\partial \eta}{\partial x} - U_\infty X \frac{\partial F}{\partial x}$$

soit, sachant que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{X^2} \frac{dX}{dx} = -\frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \quad (6.14a)$$

$$V = U_\infty \frac{dX}{dx} (\eta F' - F) - U_\infty X \frac{\partial F}{\partial x} \quad (6.14b)$$

De même, à partir de (6.12b):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -U_\infty F'' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} + U_\infty \frac{\partial F'}{\partial x} \quad (6.15)$$

Les expressions (5.27) et (5.28) des autres dérivées vont être inchangées, sauf $\partial \Theta / \partial x$ que nous utiliserons plus loin.

Après remplacement des termes précédents et simplification, l'équation de quantité de mouvement (6.11b) devient :

$$U_\infty^2 F' \frac{\partial F'}{\partial x} - U_\infty^2 \frac{dX}{dx} \frac{F F''}{X} - U_\infty^2 F'' \frac{\partial F}{\partial x} = g \beta (T_p - T_\infty) \Theta + \nu U_\infty \frac{F'''}{X^2}$$

Multiplions les deux membres par $X^2 / \nu U_\infty$ et séparons les termes de la façon suivante :

$$F''' + \frac{U_\infty}{\nu} X \frac{dX}{dx} F F'' = -\frac{g \beta (T_p - T_\infty) X^2}{\nu U_\infty} \Theta + \frac{U_\infty X^2}{\nu} \left(F' \frac{\partial F'}{\partial x} - F'' \frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad (6.16)$$

Lorsque le terme de poussée thermique est négligeable, soit parce que $T_p - T_\infty$ est faible, soit parce que U_∞ est grand, on se retrouve en convection forcée, de sorte que $\partial F / \partial x = 0$ et $\partial F' / \partial x = 0$ puisque nous savons qu'il existe alors des solutions affines (Chap. 1). En outre, ces dernières sont obtenues en écrivant que le coefficient de $F F''$ dans l'équation (6.16) est constant :

$$F''' + C F F'' = 0 \quad (6.17a)$$

avec :

$$C = \frac{U_\infty}{\nu} X \frac{dX}{dx} \quad (6.17b)$$

soit :

$$\frac{1}{2} \frac{dX^2}{dx} = \frac{C \nu}{U_\infty} \quad \text{ou} \quad X^2 = \frac{2C \nu}{U_\infty} x$$

En choisissant $C = 1/2$, nous retrouvons l'équation de Blasius (1.21) :

$$F''' + \frac{1}{2} F F'' = 0$$

avec :

$$X(x) = \left(\frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{1/2} \quad (6.18)$$

grandeur que nous avons appelée $\beta(x)$ en convection forcée mais qui devait à l'évidence changer de matricule ici puisque β désigne maintenant la dilatabilité du fluide.

En fin de compte, l'équation dynamique (6.16) devient :

$$\boxed{2F''' + F F'' = -\frac{2g\beta(T_p - T_\infty)}{U_\infty^2} x \Theta + 2x \left(F' \frac{\partial F'}{\partial x} - F'' \frac{\partial F}{\partial x} \right)} \quad (6.19)$$

- ◆ Passons maintenant à l'équation d'énergie dans laquelle nous avons, au vu de (6.12b) :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_p - T_\infty) \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right\}$$

c'est à dire, compte tenu de (6.14a) :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_p - T_\infty) \left\{ -\Theta' \frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} + \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right\} \quad (6.20)$$

Nous connaissons V (6.14b) et les dérivées de T selon y (5.28). Leur remplacement dans l'équation (6.11c) donne :

$$U_\infty F' (T_p - T_\infty) \left\{ -\frac{\eta}{X} \frac{dX}{dx} \Theta' + \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right\} + \left\{ U_\infty \frac{dX}{dx} (\eta F' - F) - U_\infty X \frac{\partial F}{\partial x} \right\} (T_p - T_\infty) \frac{1}{X} \Theta' = a (T_p - T_\infty) \frac{1}{X^2} \Theta''$$

Le report de X (6.18) donne enfin, après simplification et division par a :

$$\boxed{Pr F \Theta' + 2 \Theta'' = 2 Pr x \left(F' \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Theta' \frac{\partial F}{\partial x} \right)} \quad (6.21)$$

Il se vérifie à nouveau que, dans le cas où Θ et F sont indépendants de x , on retrouve l'équation (1.24) obtenue en convection forcée.

- ♥ En convection mixte, les champs de vitesse et de température sont donc solution des équations couplées (6.19) et (6.21).

Pour résoudre ce système, il est commode d'adimensionner complètement les deux équations. Une procédure très naturelle se basera sur le fait que, dans (6.19), le coefficient du terme en Θ n'est autre que le nombre de Richardson local Ri_x :

$$\frac{g \beta (T_p - T_\infty) x}{U_\infty^2} = Ri_x \quad (6.22)$$

Nous sommes donc amenés à considérer Ri_x comme une abscisse adimensionnée, ce qui conduit à l'écriture suivante des équations :

$$2 F''' + F F'' = 2 Ri_x \left(-\Theta + F' \frac{\partial F'}{\partial Ri_x} - F'' \frac{\partial F}{\partial Ri_x} \right) \quad (6.23a)$$

$$Pr F \Theta' + 2 \Theta'' = 2 Pr Ri_x \left(F' \frac{\partial \Theta}{\partial Ri_x} - \Theta' \frac{\partial F}{\partial Ri_x} \right) \quad (6.23b)$$

A ce système sont associées les conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 : F'(0, Ri_x) = 0 \quad ; \quad \Theta(0, Ri_x) = 1 \\ \quad : F(0, Ri_x) = 0 \quad (\text{voir ch.1 ou FEMM}) \\ \eta = \infty : F'(\infty, Ri_x) = 1 \quad ; \quad \Theta(\infty, Ri_x) = 0 \end{array} \right\} \quad (6.24)$$

- ♠ La question qui vient d'être traitée inclut deux situations différentes. Si la paroi chauffe le fluide, la convection est « aidée » : la poussée thermique est dirigée vers le haut, comme la vitesse. Si la paroi est plus froide que le fluide, la convection est « contrariée » : l'écoulement au voisinage de la paroi est freiné, et peut même se trouver dirigé vers le bas ; on assiste alors à une séparation entre l'écoulement convectif et l'écoulement général (voir également à ce sujet le problème 6.1).

Cebeci et Bradshaw ont donné les solutions des équations (6.23) lorsqu'il n'y a pas séparation des écoulements. Nous les reproduisons sur la figure 6.2. Par rapport à l'écoulement de convection libre, on voit clairement les modifications induites dans le champ de vitesse par l'écoulement extérieur. Ainsi, le maximum de U subsiste pour des valeurs modérées de Pr et pour $Ri_x \gtrsim 1$. Alors on peut convenir que la transition convection forcée – convection mixte correspond à la disparition de ce maximum, c'est à dire à $Ri_x \approx 0,5$ (§ 6.2.2.2), mais la validité du critère est limitée. En effet, pour $Pr \approx 10$, ce maximum a disparu ; l'évolution

de U en fonction de η est devenue monotone, et il faut trouver une autre convention.

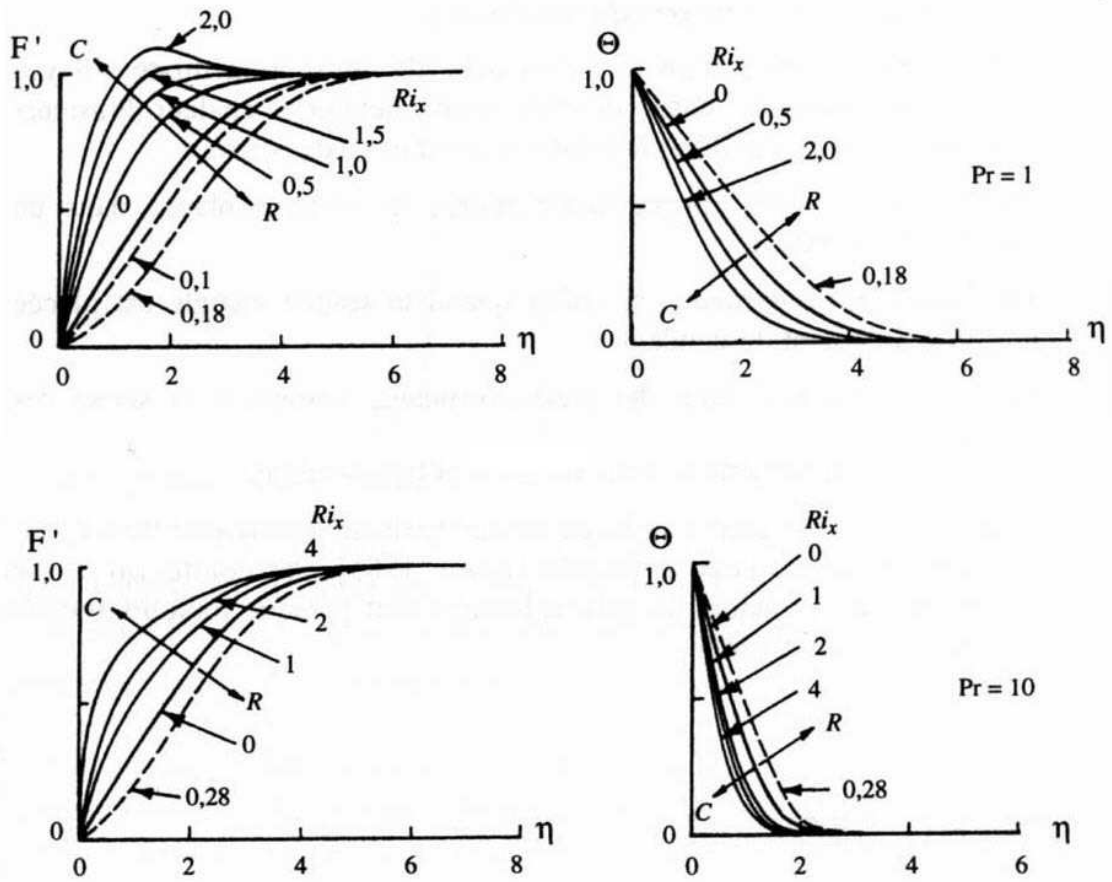


FIG. 6.2 - Convection mixte sur une plaque verticale à T_p uniforme. Ecoulement extérieur dirigé vers le haut. R : refroidissement ($T_p < T_\infty$). C : chauffage ($T_p > T_\infty$) (d'après Cebeci et Bradshaw).

6.4. - JETS ET PANACHES EN CONVECTION MIXTE

La question des jets et panaches déborde du cadre assez simple auquel nous nous sommes limités. Mais il est sans doute intéressant de situer le problème sous son aspect physique, et de préciser la terminologie.

On est en présence d'un jet ou d'un panache de convection mixte s'il y a injection simultanée de masse, de quantité de mouvement et de chaleur. Plusieurs combinaisons sont possibles, la liste suivantes n'étant pas exhaustive :

- Les "*panaches aidés*" proviennent d'une source de chaleur placée dans un écoulement ascendant.
- Les "*panaches contrariés*" se manifestent quand la source chaude est placée dans un écoulement descendant.
- Les "*jets panachés*" sont des jets chauds verticaux, comme à la sortie des cheminées.
- Pour les jets horizontaux chauds ou froids utilisés dans le chauffage ou la climatisation des locaux, on parle simplement de "*jets anisothermes*".

Jets et panaches peuvent être "*déviés*" si le fluide ambiant est animé d'un mouvement horizontal (sous l'effet du vent par exemple).

Les panaches laminaires aidés ou contrariés peuvent encore être traités par des extensions de la méthode différentielle [Afzal, 1985]. Par contre, qu'ils soient horizontaux ou verticaux, les jets anisothermes sont presque toujours turbulents dans les conditions usuelles.

PROBLÈME

PROBLÈME 6.1

Énoncé

On considère un écoulement laminaire entre deux parois planes parallèles verticales, notées 1 et 2, distantes de e . L'écoulement est dirigé vers le haut. On choisit pour direction x la verticale ascendante. L'axe y est horizontal ; $y=0$ sur la paroi 1 (fig. 6.1.1).

Les parois sont à des températures respectives $T(y=0)=T_1$ et $T(y=e)=T_2$, imposées et uniformes.

L'objet du problème est d'étudier le régime de convection mixte avec ses deux cas limites : convection naturelle et convection forcée.

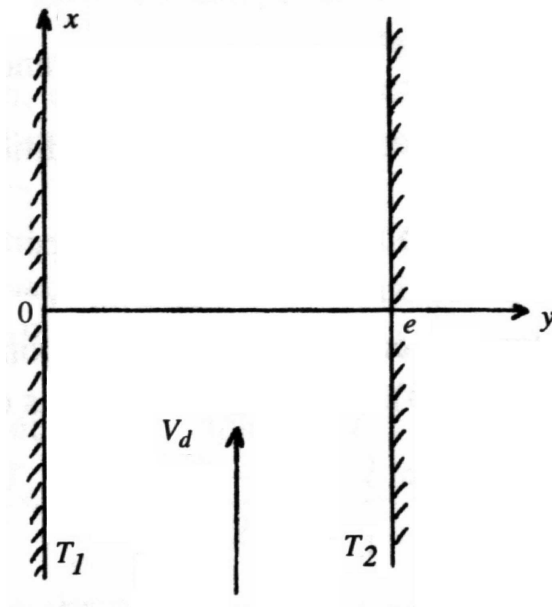


FIG. 6.1.1.

1 - Ecrire les équations du problème. On admettra que la référence pour le terme de poussée thermique est $T_\infty = \frac{T_1 + T_2}{2}$.

2 - Montrer qu'il existe une solution du problème dynamique et thermique indépendante de x . Calculer d'abord le champ de température $T(y)$. Exprimer ensuite la vitesse $U(y)$ en fonction de T_1 , T_2 et dp^*/dx .

3 - Calculer le débit-volume de fluide q_v (pour une largeur de canalisation égale à l'unité) et la vitesse débitante V_d . En déduire le gradient de pression dp^*/dx nécessaire pour avoir une vitesse donnée. Exprimer alors $U(y)$ en fonction de T_1 , T_2 et V_d .

4 - La paroi froide est la paroi 2 ($y=e$), d'où $T_1 - T_2 > 0$. Calculer les gradients de vitesse sur les deux parois, et discuter leur sens. En déduire l'allure des différents profils de vitesse possibles dans l'écoulement, et leur interprétation physique. Examiner en particulier le cas de la convection naturelle pure ($V_d = 0$).

5 - Déterminer pour quelle valeur du coefficient de poussée thermique la contrainte de frottement est nulle sur la paroi 2. Interpréter ce cas particulier. Tracer l'allure du profil de vitesse correspondant.

6 - Soient τ_{p1} et τ_{p2} les contraintes de frottement sur les parois 1 et 2. En admettant qu'on est en convection naturelle si $\frac{\tau_{p1} - \tau_{p2}}{\tau_{p1}} < 10\%$ (avec V_d petit), et en convection forcée si $\frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{\tau_{p1}} < 10\%$ (avec V_d grand), déterminer pour quelles valeurs du coefficient de poussée thermique ces conditions sont réalisées.

Application numérique : écoulement d'eau ; températures de parois telles que $(T_1 + T_2)/2 = 30^\circ C$; $V_d = 0,03 m/s$; $e = 0,02 m$. Vérifier que l'écoulement est bien laminaire. Calculer les écarts $T_1 - T_2$ correspondant aux trois situations précédentes (question 4, 5 et 6). Comparer avec le cas de l'air à la même vitesse.

Solution

1 - D'après (6.1) et (5.9), les équations du problème sont les suivantes, avec $T_\infty = (T_1 + T_2)/2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= g \beta \left(T - \frac{T_1 + T_2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} &= a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

2 - Une solution indépendante de x sera caractérisée par $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ et

$\frac{\partial p^*}{\partial x} = cte$ (le cas $\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0$ correspondrait à un débit nul).

Il en résulte que $\partial V / \partial y = 0$ d'après l'équation de continuité, soit, puisque $V = 0$ à la paroi :

$$V = cte = 0$$

Le système d'équations se réduit à :

$$\begin{aligned} 0 &= g \beta \left(T - \frac{T_1 + T_2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{d^2 U}{dy^2} \\ \frac{\partial p^*}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 T}{d y^2} = 0$$

On constate que la pression p^* est indépendante de y .

De la dernière équation, on déduit immédiatement le profil de température, sachant que $T(0) = T_1$ et $T(e) = T_2$:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{e} y + T_1$$

C'est une loi de conduction pure.

La première équation s'écrit, en remplaçant T :

$$\frac{d^2 U}{d y^2} = -\frac{g \beta}{\nu} \left(\frac{T_2 - T_1}{e} y + \frac{T_1 - T_2}{2} \right) + \frac{1}{\mu} \frac{d p^*}{d x}$$

Une première intégration donne :

$$\frac{d U}{d y} = -\frac{g \beta}{\nu e} (T_2 - T_1) \frac{y^2}{2} - \frac{g \beta}{\nu} \frac{T_1 - T_2}{2} y + \frac{1}{\mu} \frac{d p^*}{d x} y + C_1$$

En intégrant une seconde fois, on obtient :

$$U = -\frac{g \beta}{6 \nu e} (T_2 - T_1) y^3 - \frac{g \beta}{4 \nu} (T_1 - T_2) y^2 + \frac{1}{2 \mu} \frac{d p^*}{d x} y^2 + C_1 y + C_2$$

Les conditions aux limites sont :

$$y = 0 : U = 0 \text{ d'où } C_2 = 0$$

$$y = e : U = 0 \text{ d'où } C_1 = \frac{g \beta}{6 \nu} (T_2 - T_1) e + \frac{g \beta}{4 \nu} (T_1 - T_2) e - \frac{1}{2 \mu} \frac{d p^*}{d x} e$$

ou encore, en adoptant $T_1 - T_2$ comme référence :

$$C_1 = \frac{g \beta}{12 \nu} (T_1 - T_2) e - \frac{1}{2 \mu} \frac{d p^*}{d x} e$$

d'où le profil de vitesse :

$$U = \frac{g \beta}{6 \nu e} (T_1 - T_2) y^3 + \left(-\frac{g \beta}{4 \nu} (T_1 - T_2) + \frac{1}{2 \mu} \frac{d p^*}{d x} \right) y^2 + \left(\frac{g \beta}{12 \nu} (T_1 - T_2) - \frac{1}{2 \mu} \frac{d p^*}{d x} \right) e y$$

3 - Pour une largeur unité du conduit, le débit est donné par :

$$q_v = \int_0^e U dy$$

$$q_v = \frac{g\beta}{6\nu e}(T_1 - T_2)\frac{e^4}{4} - \frac{g\beta}{4\nu}(T_1 - T_2)\frac{e^3}{3} + \frac{1}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\frac{e^3}{3} \\ + \frac{g\beta}{12\nu}(T_1 - T_2)e\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}e\frac{e^2}{2}$$

Après simplifications et regroupements il reste :

$$q_v = -\frac{e^3}{12\mu}\frac{dp^*}{dx}$$

d'où la vitesse débitante $V_d = q_v / e$:

$$V_d = -\frac{e^2}{12\mu}\frac{dp^*}{dx}$$

Le débit ne dépend que du gradient de pression. Il est indépendant de l'écart de température entre les parois. Pour avoir une vitesse V_d donnée, il faut imposer entre l'entrée et la sortie un écart de pression motrice tel que :

$$\frac{dp^*}{dx} = -\frac{12\mu}{e^2}V_d$$

L'expression de U en fonction de V_d est alors :

$$U = \frac{g\beta}{6\nu e}(T_1 - T_2)y^3 - \left\{ \frac{g\beta}{4\nu}(T_1 - T_2) + \frac{6V_d}{e^2} \right\} y^2 + \left\{ \frac{g\beta}{12\nu}(T_1 - T_2) + \frac{6V_d}{e^2} \right\} ey$$

4 - Les gradients aux parois ont pour expression :

- sur la paroi chaude :

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} = \frac{g\beta}{12\nu}(T_1 - T_2)e + 6\frac{V_d}{e}$$

- sur la paroi froide, en regroupant les termes :

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=e} = \frac{g\beta}{12\nu}(T_1 - T_2)e - 6\frac{V_d}{e}$$

L'écoulement est ascendant, donc V_d est positive.

A la paroi chaude, on a toujours $dU/dy > 0$, donc U est positive au voisinage de cette paroi ; le mouvement du fluide est dirigé vers le haut.

A la paroi froide, dU/dy peut être positif ou négatif, selon la valeur de V_d . Si la vitesse débitante est élevée, on a $dU/dy < 0$: U diminue vers la paroi, elle est donc positive, et le fluide se déplace localement vers le haut ; si la vitesse est faible, dU/dy est positif : U augmente en se rapprochant de la paroi, donc elle est négative (puisque $U = 0$ en $y = e$), et le mouvement du fluide est

localement dirigé vers le bas. Il y a coexistence d'un écoulement ascendant côté chaud et descendant côté froid.

Lorsque $V_d = 0$ (convection naturelle pure) il n'y a plus de mouvement d'ensemble : le débit montant est égal au débit descendant, et le profil de vitesse est antisymétrique par rapport au plan médian (figure 6.1.2). Alors $dp^*/dx = 0$.

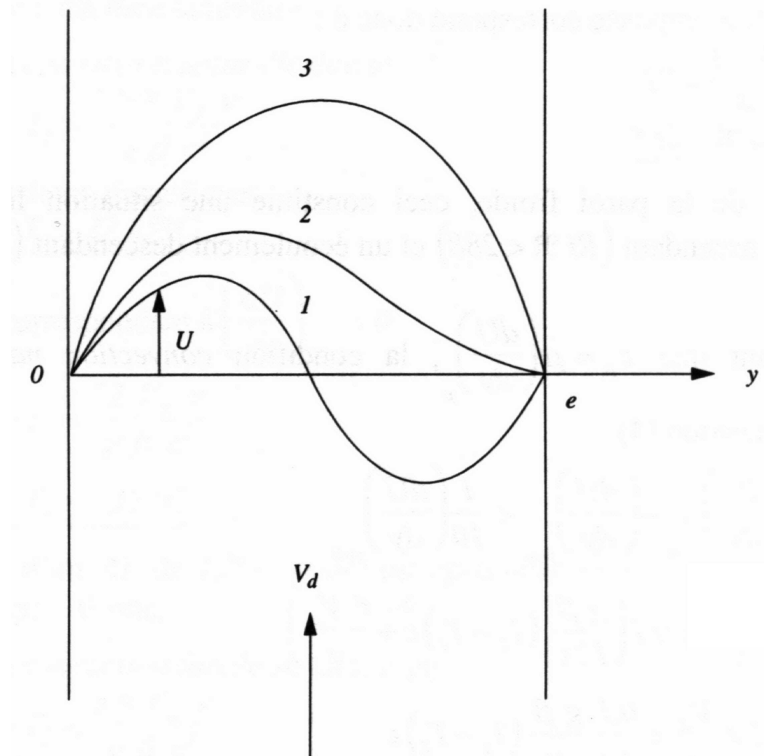


FIG. 6.1.2 - Profils de vitesse pour différentes valeurs de V_d . 1 : $V_d = 0$; 2 : $dU/dy = 0$ en $y = e$; 3 : convection forcée.

5 - La contrainte de frottement est nulle sur la paroi 2 si $\left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=e} = 0$, soit

d'après la question 4 :

$$\frac{g\beta}{12\nu}(T_1 - T_2)e - 6\frac{V_d}{e} = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{g\beta(T_1 - T_2)e^2}{\nu V_d} = 72$$

Prenons ici comme références : $\Delta T^0 = T_1 - T_2$ et $L^0 = 2e = D_h$ (diamètre hydraulique).

Le coefficient de poussée thermique a pour expression :

$$Ri \mathfrak{R} = \frac{g \beta \Delta T^0 L^0}{(V^0)^2} \frac{V^0 L^0}{\nu} = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^2}{V^0 \nu}$$

$$Ri \mathfrak{R} = \frac{4 g \beta (T_1 - T_2) e^2}{V_d \nu}$$

La condition imposée correspond donc à :

$$\frac{Ri \mathfrak{R}}{4} = 72$$

$$\underline{Ri \mathfrak{R} = 288}$$

Du côté de la paroi froide, ceci constitue une situation limite entre un écoulement ascendant ($Ri \mathfrak{R} < 288$) et un écoulement descendant ($Ri \mathfrak{R} > 288$).

6 - Sachant que $\tau_p = \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)_p$, la condition *convection naturelle* s'écrit,

d'après la question (4) :

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} - \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=e} < \frac{1}{10} \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0}$$

$$\frac{12V_d}{e} < 0,1 \left(\frac{g \beta}{12\nu} (T_1 - T_2) e + \frac{6V_d}{e} \right)$$

$$11,4 \frac{V_d}{e} < \frac{0,1 g \beta}{12 \nu} (T_1 - T_2) e$$

$$\frac{g \beta (T_1 - T_2) e^2}{V_d \nu} > 1368 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} Ri \mathfrak{R} > 1368$$

$$\underline{Ri \mathfrak{R} \gtrsim 5470}$$

La condition *convection forcée* s'exprime par :

$$\left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} + \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=e} < \frac{1}{10} \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0}$$

$$\frac{g \beta}{6\nu} (T_1 - T_2) e < 0,1 \left(\frac{g \beta}{12\nu} (T_1 - T_2) e + \frac{6V_d}{e} \right)$$

$$\frac{1,9 g \beta}{12 \nu} (T_1 - T_2) e < 0,6 \frac{V_d}{e}$$

$$\frac{g \beta (T_1 - T_2) e^2}{V_d \nu} \lesssim 3,8 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} Ri \mathfrak{R} \lesssim 3,8$$

$$\underline{Ri \mathfrak{R} \lesssim 15,2}$$

Application :

Pour l'eau à $30^\circ C$: $\beta \approx 4.10^{-4} K^{-1}$; $\nu \approx 8,5.10^{-7} m^2 / s$

Le nombre de Reynolds a pour valeur :

$$\Re = \frac{V_d 2e}{\nu} = \frac{3 \times 10^{-2} \times 2 \times 2 \times 10^{-2}}{8,5.10^{-7}} = 1410$$

L'écoulement est bien laminaire.

- La condition *convection naturelle* donne :

$$T_1 - T_2 > \frac{1368 V_d \nu}{g \beta e^2}$$

soit avec les valeurs numériques :

$$\underline{T_1 - T_2 > 22,25^\circ C}$$

- Pour le cas correspondant à $\left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=e} = 0$:

$$T_1 - T_2 = \frac{72 V_d \nu}{g \beta e^2}$$

$$\underline{T_1 - T_2 \approx 1,18^\circ C}$$

Il suffit ici d'un ΔT de $1,2^\circ C$ pour voir apparaître un écoulement descendant le long de la paroi froide.

- La condition *convection forcée* se traduit par :

$$T_1 - T_2 < \frac{3,8 V_d \nu}{g \beta e^2}$$

c'est à dire :

$$\underline{T_1 - T_2 \lesssim 0,06^\circ C}$$

Un très faible ΔT suffit pour être en convection mixte.

Pour l'air à $30^\circ C$:

$$\beta = \frac{1}{273 + 30} = 3,3.10^{-3} K^{-1} \quad ; \quad \nu \approx 1,57.10^{-5} m^2 / s$$

Le nombre de Reynolds a pour valeur : $\Re = 67,1$.

Les trois conditions précédentes donnent respectivement :

$$T_1 - T_2 \gtrsim 50^\circ C$$

$$T_1 - T_2 = 2,6^\circ C$$

$$T_1 - T_2 \lesssim 0,14^\circ C$$

Les ordres de grandeur sont comparables à ceux qui ont été obtenus avec l'eau (les ΔT sont sensiblement doublés) mais avec ici un Reynolds assez faible. A Reynolds égal, les valeurs précédentes seraient multipliées par un facteur 20 environ. La convection naturelle dominante deviendrait alors impossible à réaliser.

Commentaires

1 - La caractérisation de la température de référence T_∞ n'est pas absolument évidente. On peut toutefois vérifier que dans le cas de la convection naturelle pure ($V_d = 0$) la symétrie de l'écoulement par rapport au plan médian entraîne obligatoirement $T_\infty = (T_1 + T_2)/2$.

2 - La formulation de la question 6 est justifiée par le fait que la dérivée $(dU/dy)_{y=0}$ est toujours positive, alors que $(dU/dy)_{y=e}$ peut être positive ou négative. Une formulation équivalente serait $\left| \frac{\tau_{p1} - |\tau_{p2}|}{\tau_{p1}} \right| < 10\%$.

3 - La valeur 10% ci-dessus, choisie pour caractériser le régime de convection mixte, se discute. Elle correspond à un écart de 5% à peu près sur la contrainte résultante, c'est à dire sur dp^*/dx , dans le cas de la convection forcée. On pourrait aussi comparer les débits dans les moitiés gauche et droite du canal ; cela conduirait aux mêmes ordres de grandeur.