

Réalisation d'un modèle numérique d'un four de maintien en fonderie et définition d'un modèle réduit

Thomas LOUSSOUARN^{1,2*}, Denis MAILLET¹, Benjamin REMY¹, Diane DAN²

¹LEMETA, UMR 7563, CNRS, Vandoeuvre-Lès-Nancy, 54504, France

²ITKMM Simulation de fonderie, SNECMA Gennevilliers, Colombes, 92700, France

* (auteur correspondant : thomas.loussouarn@univ-lorraine.fr)

Résumé – Un four axisymétrique et sa charge sont modélisés numériquement en 2D axisymétrique sous FlexPDE. Le fonctionnement de l'induction ainsi que les transferts thermiques au sein du four sont modélisés. Un modèle petit corps 0D est défini pour représenter le four numérique. La réduction de modèle et l'identification des paramètres du modèle petit corps sont réalisés en utilisant une inversion de type Levenberg-Marquardt sous MATLAB.

Nomenclature

A	Vecteur potentiel magnétique, Wb.m^{-1}
J	Vecteur densité de courant, A.m^{-2}
I	Courant électrique, A
S	Surface, m^2
P_V	Puissance volumique, W.m^{-3}
P	Puissance, W
T	Température, K
h	Coefficient d'échange $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
C_p	Chaleur massique, $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
L'	Luminance directionnelle, $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$
K	Coefficient d'absorption, m^{-1}
Q_r	Flux de chaleur radiatif, W.m^{-2}
η	Rendement
R	Résistance thermique équivalente, K.W^{-1}
X	Résistance radiative équivalente, m^{-2}

Symboles grecs

ρ	Masse volumique, kg.m^{-3}
μ	Perméabilité magnétique, H.m^{-1}
Σ	Conductivité électrique, $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$
λ	Conductivité thermique, $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
σ	Constante de Stefan-Boltzmann, $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$

Indices et exposants

s	Source
int	Intérieur
ext	Extérieur
h	Haut
b	Bas

1. Introduction

La fabrication des aubes de turbine monocristallines par le procédé de fonderie à cire perdue nécessite une maîtrise des échanges thermiques du processus. Les fours utilisés sont des fours à induction fonctionnant sous vide [1]. Ces équipements de production sont peu équipés en capteur. Les seules informations utiles à la production sont les paramètres de régulation. Il est alors classique d'avoir seulement un thermocouple par élément de chauffe du four. Dans notre configuration, le four possède deux éléments de chauffe. L'objectif de cette étude est la compréhension des interactions entre l'élément chauffant (suscepteur), l'élément à chauffer (moule ou grappe), et les pertes énergétiques avec l'extérieur. Cette compréhension passe par la réalisation d'un modèle numérique du four sous FlexPDE [2]. Nous définirons ensuite un modèle réduit permettant de décrire l'état du four numérique à chaque instant.

Le modèle numérique du four est constitué de deux modèles distincts. Le premier modèle décrit le phénomène d'induction, il utilise en entrée une puissance électrique consommée par le four et donne en sortie la puissance de chauffe volumique effective. Le second modèle décrit les transferts thermiques. Il a pour entrées les puissances de chauffe effectives dans les suscepteurs et il fournit en sortie la température en chaque point du four. Ces deux modèles

sont découplés car les temps caractéristiques électromagnétiques sont très faibles devant les temps caractéristiques de conduction. A partir de ces deux modèles, nous allons générer une simulation de chauffe et refroidissement en contrôlant la puissance électrique consommée et observer les résultats. Ces résultats seront comparés à un modèle 0D réduit que l'on vérifiera comme représentatif du four numérique 2D axisymétrique.

2. Présentation du four

2.1. La configuration du four utilisée

Le module de chauffe du four est présenté en Figure 1. Il est constitué de 2 parties appelées partie haute et partie basse. Chaque partie possède un inducteur, un suscepteur, un isolant et un thermocouple. Les inducteurs ont des propriétés différentes, leur température de surface est de 473 K. L'échange radiatif entre l'isolant et l'inducteur est caractérisé par un coefficient X_{induct} . Les puissances volumiques de chauffe se développent au sein des suscepteurs. Les thermocouples ne sont pas représentés, il s'agira de points de mesure proches de la paroi du suscepteur. Au sein du four, la grappe est positionnée sur une sole refroidie à 473 K. Le contact entre la grappe et la sole est modélisé par un coefficient d'échange h_{sole} faible car le contact est mauvais. Les fermetures haute et basse du module sont réalisées par des isolants considérés parfaits (parois adiabatiques). Le système possède une symétrie de révolution suivant l'axe vertical, c'est pourquoi il sera toujours représenté en 2D axisymétrique.

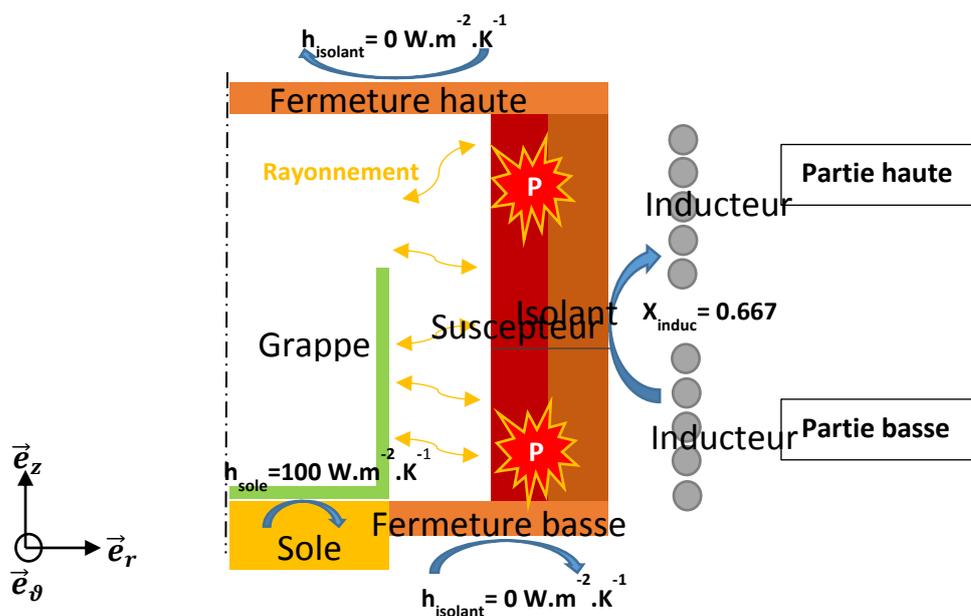


Figure 1 : Configuration du module de chauffe étudié avec une grappe céramique insérée

2.2. Modélisation électromagnétique et obtention des puissances de chauffe volumique

La modélisation se base sur l'écriture de l'équation régissant le potentiel vecteur magnétique \vec{A} . La fréquence de fonctionnement du four est de 3 kHz, une approximation des états quasi-stationnaire est réalisée [3]. Cette approximation simplifie considérablement les équations de Maxwell. Nous obtenons alors l'équation de diffusion du potentiel vecteur magnétique \vec{A} projeté sur \vec{e}_θ à résoudre :

$$-\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right] + \Sigma \frac{\partial A}{\partial t} = J_s \quad (1)$$

Avec, J_s la norme du vecteur densité de courant source en $A.m^{-2}$. Nous choisissons une formulation en courant source du modèle d'induction [4] et l'expression de la source densité de courant J_s est alors:

$$J_s = \frac{I_s}{S_{eff}} \quad (2)$$

Où I_s est l'intensité parcourant l'inducteur en A et S_{eff} la surface effective de passage du courant à cause de l'effet de peau en m^2 . I_s correspond à la racine carrée du rapport de la puissance fournie à l'inducteur en W par la résistance propre de l'inducteur avec chargement en Ω . La résolution de l'équation de diffusion se fait dans l'espace des complexes avec une approximation harmonique [3]. La résolution est réalisée par le logiciel FlexPDE.

Le lien entre puissance de chauffe volumique et vecteur potentiel magnétique est :

$$P_V = \frac{1}{\Sigma} \left| \Sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right|^2 \quad (3)$$

Ainsi, une fois le vecteur potentiel magnétique calculé, nous connaissons en tout point du système la densité volumique de puissance de chauffe dans les matériaux.

2.3. Thermique du système et rayonnement

La modélisation thermique du four est appliquée à l'espace constitué de la grappe, du vide de la chambre chaude, des suscepteurs et de l'isolant. Les phénomènes de conduction et de rayonnement sont couplés. Il s'agit alors de résoudre de façon simultanée l'équation de la chaleur en transitoire (4) et l'équation du transfert radiatif pour un milieu gris non diffusant et faiblement absorbant, équivalent à un vide primaire (5). Il y a couplage par les frontières. L'émissivité de la grappe est de 0.6 et celle du suscepteur est de 0.8. Nous considérons que le flux radiatif est constant dans le vide, le gradient du champ directionnel de la luminance dans la direction $\vec{\Omega}$ est donc nul. Nous obtenons le système suivant :

$$div \left(\lambda \overrightarrow{grad}(T(r, z, t)) \right) + P_{haut}(r, z, t) + P_{bas}(r, z, t) = \rho c_p \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{dL'(s, \vec{\Omega})}{ds} = 0 \quad (5)$$

La résolution de l'équation au transfert radiatif a été réalisée en utilisant la méthode P_1 dans un milieu non diffusant et de faible absorptivité [5]. Cette méthode utilise la décomposition du champ directionnel de la luminance L' dans une base complète des harmoniques sphériques. La résolution à l'ordre 1 consiste en l'approximation du champ directionnel de la luminance par les termes d'ordre 0 et 1 dans cette base. On obtient alors l'expression, pour le cas 2D axisymétrique suivant (Oz) :

$$L'(r, z, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} [L_0 + 3L_z \cos(\theta) + 3L_r \sin(\theta) \cos(\varphi)] \quad (6)$$

Ce qui donne au final le système d'équation des moments :

$$div \left(\frac{1}{3K} \overrightarrow{grad}(L_0) \right) = 0 \quad (7)$$

$$L_r = -\frac{1}{3K} \frac{\partial L_0}{\partial r} \quad (8) \quad L_z = -\frac{1}{3K} \frac{\partial L_0}{\partial z} \quad (9)$$

La résolution de l'équation différentielle de la luminance moyenne L_0 permet de calculer les deux composantes du flux radiatif avec k le coefficient d'absorption en m^{-1} et d'obtenir :

$$\vec{Q}_r = L_r \vec{e}_r + L_z \vec{e}_z \quad (10)$$

Les conditions aux limites radiatives sont données par les conditions aux limites de Marshak [6].

3. Génération d'un comportement four et résultats du modèle

Au sein de FlexPDE, nous entrons en entrée un profil de puissance de consigne pour les parties haute et basse en fonction du temps.

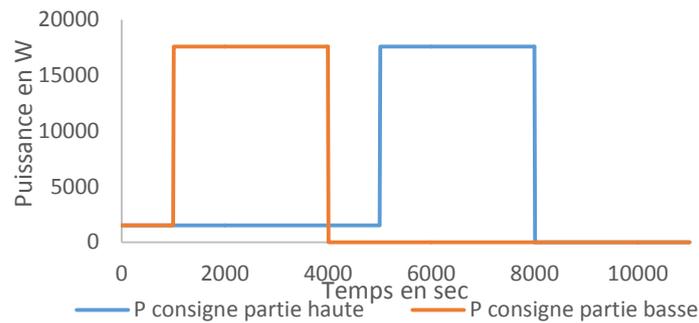


Figure 2 : Exemple de profils de puissance de consignes fournies aux inducteurs des parties haute et basse en fonction du temps

Le modèle électromagnétique génère une cartographie des puissances de chauffe volumique dans les différents éléments (Figure 3 et Figure 4).

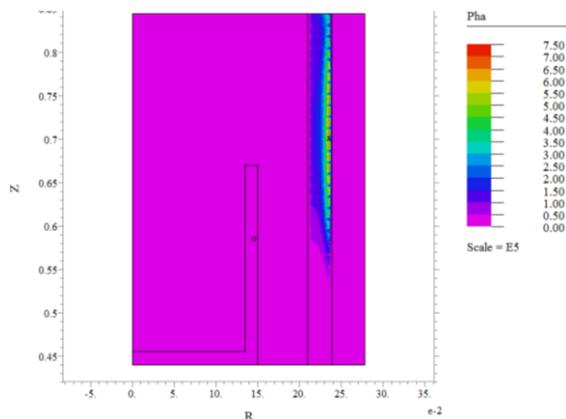


Figure 3 : Visualisation de la puissance de chauffe volumique haute en $W.m^{-3}$

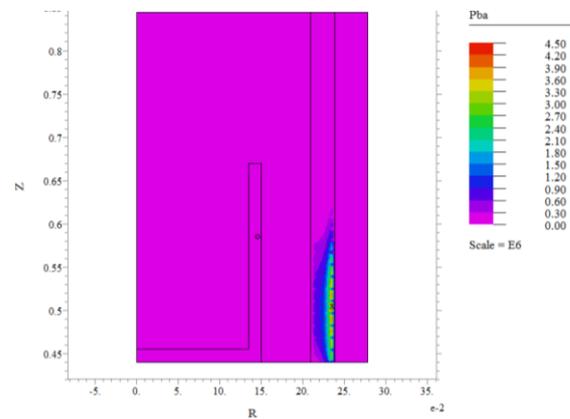


Figure 4 : Visualisation de la puissance de chauffe volumique basse en $W.m^{-3}$

Le modèle thermique implémenté sous FlexPDE fournit le champ de température, Figure 5. On peut alors extraire des profils de température en fonction du temps, Figure 6, en des points d'intérêt ou des profils de température moyennés par région.

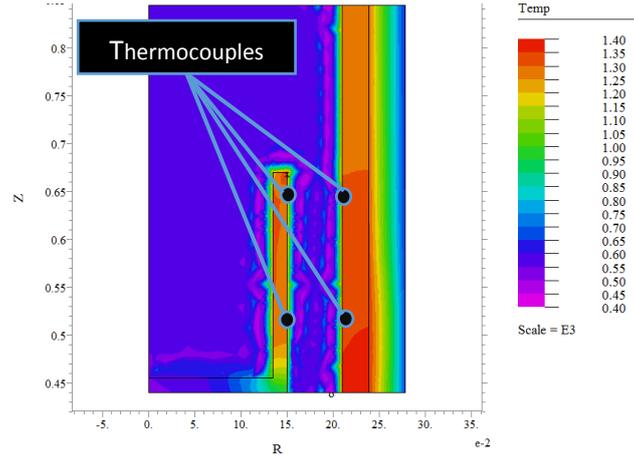


Figure 5 : Visualisation des températures au sein du système four avec FlexPDE et points de mesure de température d'intérêt

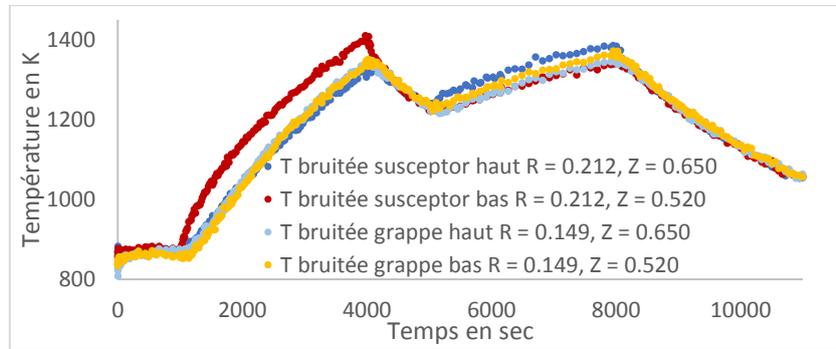


Figure 6 : Profils de température bruités issus des points de mesures thermocouples susceptor et grappe pour des profils de puissances consignés haute et basse fournie en Figure 2

4. Estimation de paramètres et réduction de modèle

4.1. Le modèle 0D petit corps et ses hypothèses

Nous choisissons un modèle 0D petit corps couplé par les puissances. Les petits corps sont les suscepteurs parties haute et basse. Les pertes avec l'extérieur sont représentées par une résistance conducto-radiative équivalente R_{ext} correspondant à l'échange du suscepteur avec la surface de l'inducteur à travers l'isolant. Les échanges avec la grappe sont modélisés par une résistance radiative équivalente X_{int} . Nous considérons qu'il n'y a pas de transfert de chaleur entre les parties haute et basse par conduction et par rayonnement. Le modèle réduit 0D est alors caractérisé par le système d'équations (11) et (12) :

$$\rho C_p V_h \frac{dT_h}{dt} = \eta_{hh} P_h(t) + \eta_{hb} P_b(t) - \frac{1}{R_{ext}^h} (T_h - T_{ext}) - \frac{\sigma}{X_{int}^h} (T_h^4 - T_{grappe}^h{}^4) \quad (11)$$

$$\rho C_p V_b \frac{dT_b}{dt} = \eta_{bb} P_b(t) + \eta_{bh} P_h(t) - \frac{1}{R_{ext}^b} (T_b - T_{ext}) - \frac{\sigma}{X_{int}^b} (T_b^4 - T_{grappe}^b{}^4) \quad (12)$$

Les paramètres à estimer sont les rendements η_{hh} et η_{bb} , les rendements croisés η_{hb} et η_{bh} , les résistances équivalentes d'échange avec l'extérieur R_{ext}^h et R_{ext}^b , les résistances équivalentes radiatives d'échange avec la grappe X_{int}^h et X_{int}^b . Nous connaissons les profils de température suscepteurs T_h et T_b , les profils de température grappe et donc T_{grappe}^h et T_{grappe}^b , la température extérieure T_{ext} . Le système est résolu par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

4.2. Validation du modèle 0D par rapport au modèle numérique intégré, définition d'une liste paramètres β_{exact}

Dans cette partie, nous allons réaliser une estimation de paramètres à l'aide d'une inversion de type Levenberg-Marquardt [7]. Le but est de déterminer les valeurs des 8 paramètres à estimer dans le cas où les températures correspondent à des températures intégrées sur les régions susceptible haut, susceptible bas, grappe haut et grappe bas. Les puissances de consigne correspondent aux profils présentés en Figure 2. Les profils de température recalculés pour les suscepteurs haut et bas sont présentés en Figure 7.

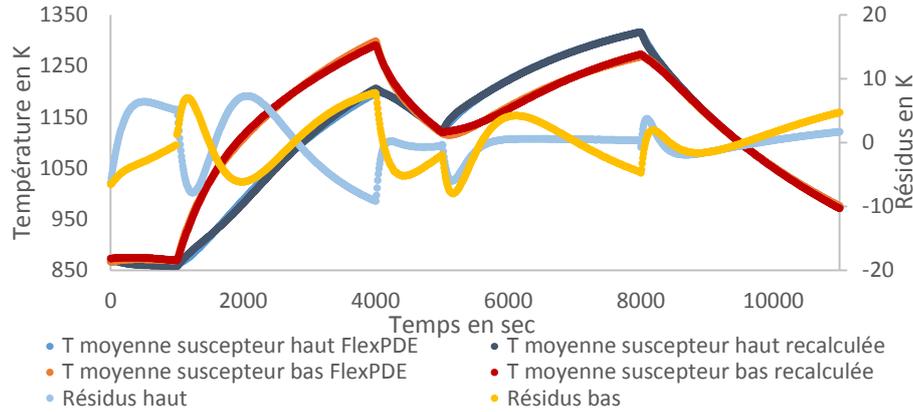


Figure 7 : Profils de températures moyennées des suscepteurs haut et bas issus de FlexPDE et du modèle 0D réduit avec les paramètres estimés par Levenberg-Marquardt

Le résidu RMS (Root Mean Square) est inférieur au 5 K d'incertitude de mesure dans le système physique réel, le modèle réduit est donc capable de reproduire les sorties du modèle détaillé FlexPDE avec une bonne précision, pour les excitations utilisées ici. Les paramètres estimés et considérés comme des références sont donnés dans le Tableau 1.

η_{hh}	η_{hb}	η_{bb}	η_{bh}	R_{ext}^h	R_{ext}^b	X_{int}^h	X_{int}^b
				K.W ⁻¹	K.W ⁻¹	m ²	m ²
1.168	0.539	0.671	0.215	0.168	1.022	1.389	5.643

Tableau 1 : Tableau présentant les valeurs des 8 paramètres estimés dans le cas des températures moyennées non bruitées

4.3. Estimation de paramètres à partir des mesures de température locales bruitées

Nous prenons dans ce cas les températures bruitées présentées en Figure 6, afin de correspondre aux points de mesure des températures dans le four de production par thermocouples.

Les profils de température des suscepteurs recalculés, suivent correctement les profils de température localisés FlexPDE, Figure 8. Le résidu RMS de l'inversion est de l'ordre du bruit ajouté avec une valeur de 6.9 K contre 5 K pour l'écart type du bruit de mesure ajouté. Les valeurs des paramètres estimés sont données dans le Tableau 2.

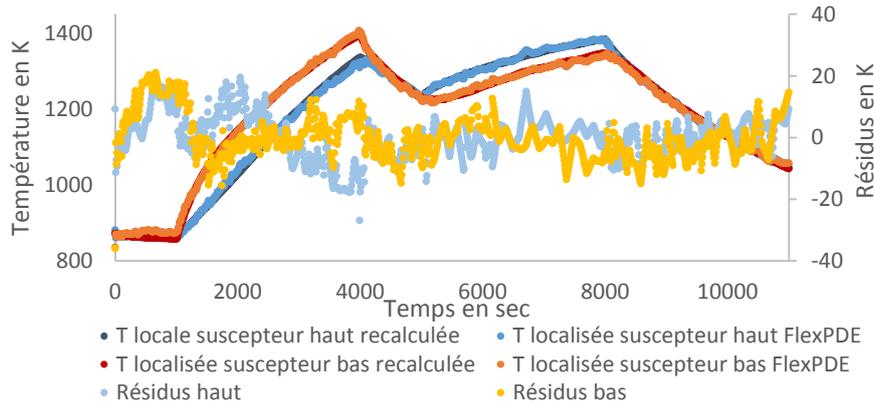


Figure 8 : Profils de températures localisées des suscepteurs haut et bas issus de FlexPDE et du modèle 0D réduit avec les paramètres estimés par Levenberg-Marquardt

Les erreurs d'estimation de paramètres ne peuvent être justifiées par un mauvais nombre de conditionnement de la matrice de sensibilité réduite du système car dans les deux cas (sans bruit et avec bruit) le nombre de conditionnement est inférieur à 35 et les écarts-types d'estimation des paramètres sont inférieur à 5 %. Ces différences montrent donc que notre modèle 0D réduit ne peut pas caractériser globalement le système mais qu'un jeu de paramètres peut correspondre à une réduction de modèle spécifique localisée ou moyenne.

	η_{hh}	η_{hb}	η_{bb}	η_{bh}	R_{ext}^h K.W ⁻¹	R_{ext}^b K.W ⁻¹	X_{int}^h m ⁻²	X_{int}^b m ⁻²
Estimation locale	0.865	0.606	0.912	0.126	0.159	0.217	3.489	3.642
Erreur avec moyenne	26 %	12 %	36 %	41 %	6 %	78 %	151 %	35 %

Tableau 2 : Présentation des résultats des estimations de paramètres dans le cas des températures locales bruitées et de l'erreur d'estimation par rapport au cas des températures moyennes

4.4. Test des paramètres estimés sur une entrée complexe, comparaison des profils de températures localisées FlexPDE et modèle réduit

Nous allons, maintenant, vérifier que le jeu de paramètres obtenus précédemment pour le modèle réduit 0D permet de retrouver les profils de température localisés obtenu par FlexPDE pour une excitation complexe donnée (non représentative de cas réels). Nous prenons des profils de puissance identiques pour la partie haute et la partie basse correspondant à la Figure 9.

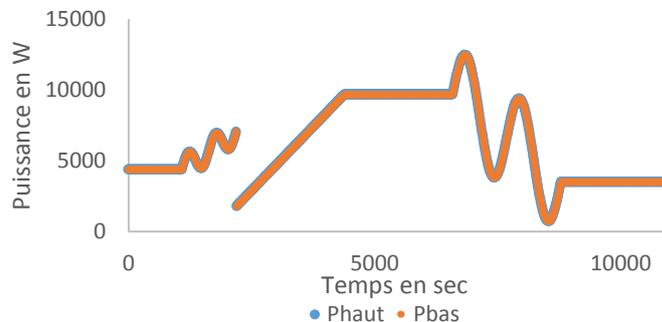


Figure 9 : Profils de puissance de consigne haute et basse pour la vérification du modèle réduit dans le cas localisé

Les profils de température obtenus pour ces puissances de consigne, par le modèle réduit 0D paramétré à la partie précédente et le modèle FlexPDE, sont présentés en Figure 10.

L'accord entre le profil de température 0D et FlexPDE pour la partie haute est bon avec un résidu RMS de 9.4 K. Le résidu RMS pour la température localisée basse est de 29 K. L'erreur pour la partie basse pourrait être engendrée par la non prise en compte du refroidissement de la grappe par contact avec la sole refroidie dans notre modèle réduit.

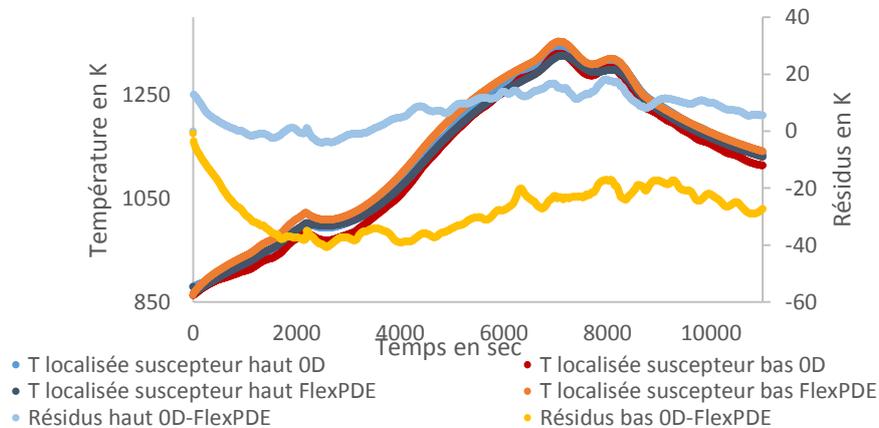


Figure 10 : Profils de températures localisées des suscepteurs haut et bas issus de FlexPDE et du modèle 0D réduit paramétrés par l'estimation de Levenberg-Marquardt réalisée en 4.3

5. Conclusion

La modélisation des échanges thermiques du four avec la grappe sous FlexPDE nous a permis de paramétrer un modèle 0D réduit couplé par les sources. Ce modèle réduit, paramétré pour les points de mesure classique dans des fours de production, nous a donné satisfaction pour la partie haute. Pour la partie basse, l'hypothèse forte de l'oubli du refroidissement par la sole comme source d'erreur sera à vérifier. Le modèle réduit sélectionné est biaisé.

La prochaine étape de ce travail est l'utilisation de méthodes d'identification de modèles paramétriques. Ce travail nous permettra de définir la stratégie afin de paramétrer un modèle réduit à partir de données expérimentales.

Références

- [1] Masson, J.-M. (2005). Fonderie et moulage de l'acier-Cas pratique. *Techniques de l'Ingénieur*, 15.
- [2] PDE solutions Inc. (2008). *Technical descriptions of FlexPDE 5.0 User guide*.
- [3] Labbé, V. (2002). *Modélisation numérique du chauffage par induction : approche éléments finis et calcul parallèle*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [4] Vinsard, G. (2013, Octobre 1). *Transfert inductif de l'énergie - Leçon 3*. Récupéré sur [arche.univ-lorraine.fr](http://arche.univ-lorraine.fr/course/view.php?id=5794): <http://arche.univ-lorraine.fr/course/view.php?id=5794>
- [5] Nguyen, H. Q., Remy, B., & Degiovanni, A. (2008). Fast and accurate simplified radiative model for modeling coupled heat transfers in glass forming process. *Advanced Materials Research*, 575-578.
- [6] Nguyen, H. Q. (2009). *Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : " Prise en compte du transfert radiatif "*. Nancy: Nancy-Université INPL.
- [7] Petit, D., & Maillat, D. (2008). Techniques inverses et estimation de paramètres. *Techniques de l'Ingénieur*, 39-47.

Remerciements

Les auteurs remercient les équipes Snecma ainsi que Gérard Vinsard et Stéphane Dufour pour leur aide.