

# Détermination d'un mur 1D équivalent à une structure 2D/3D : application d'une méthode mixte à différents ponts thermiques et analyse de ses limites.

Julien QUINTEN<sup>1\*</sup>, Véronique FELDHEIM<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UMONS – Faculté Polytechnique – Service de Thermique et Combustion  
Rue de l'Épargne, 56 – 7000 Mons – Belgique

\* (auteur correspondant : [julien.quinten@umons.ac.be](mailto:julien.quinten@umons.ac.be))

**Résumé** - Nous présentons une méthode de structure équivalente 1D. Elle permettrait de pouvoir tenir compte de la réalité des phénomènes au sein des ponts thermiques 2D/3D dans le bilan énergétique des bâtiments pour des logiciels de simulation se basant sur des flux de chaleur 1D. Nous avons appliqué cette méthode à quatre ponts thermiques différents. La précision des résultats varie suivant les cas et n'est pas toujours satisfaisante. Nous mettons en évidence qu'un comportement éloigné de celui d'un système du 1<sup>er</sup> ordre et/ou une valeur élevée de  $\phi_{ie}$  pourrait conduire à dégrader cette précision.

## Nomenclature

$A$	amplitude du flux, $W.m^{-2}$	<i>Symboles grecs</i>	
$C$	capacité thermique, $J.K^{-1}.m^{-2}$	$\phi$	facteur de structure
$K$	coefficient de transfert, $W.m^{-2}.K^{-1}$	$\varphi$	déphasage, <i>rad</i>
$P$	période, <i>s</i>	$\psi$	coefficient de déperdition, $W.m^{-1}.K^{-1}$
$q$	densité de flux de chaleur, $W.m^{-2}$	<i>Indices et exposants</i>	
$R$	résistance thermique, $m^2.K.W^{-1}$	$e$	extérieur
$s$	variable de Laplace	$i$	intérieur
$T$	température, $^{\circ}C$	$i-m$	de l'intérieur à la $m^{\text{ème}}$ couche (exclue)
$t$	temps, <i>s</i>	$m$	$m^{\text{ème}}$ couche
$V$	volume, $m^3$	$m-e$	de la $m^{\text{ème}}$ couche (exclue) à l'extérieur

## 1. Introduction

Dans la plupart des logiciels de simulation énergétique des bâtiments, il est supposé que le flux de chaleur dû à la conduction dans une paroi est 1D. On ne peut donc pas tenir compte des effets 2D-3D (par exemple au niveau des ponts thermiques) et de leur dynamique : l'évaluation de leur impact sur la performance énergétique du bâtiment ne traduit alors pas correctement la réalité des phénomènes.

Le flux de chaleur n'étant réellement 1D que sur 50 à 80% [1] de la surface des parois et les ponts thermiques pouvant représenter 5 à 39% [2] de la demande en énergie d'une habitation, une modélisation plus précise des détails 2D/3D est requise pour une évaluation exacte de leur impact énergétique non négligeable.

Une modélisation 2D/3D du bâtiment, ou d'une partie de celui-ci, utilisant la méthode des éléments ou volumes finis pourrait être réalisée mais, si l'on veut évaluer facilement au cours du temps la température et la consommation énergétique d'un bâtiment entier avec précision, nous avons besoin d'une méthode simple, rapide et nécessitant peu de ressources.

C'est dans cet ordre d'idée que nous avons développé une méthode de structure équivalente. Il existe différentes façons de définir une structure équivalente, nous en avons comparé plusieurs dans [3] afin de choisir la plus précise et la plus appropriée.

Dans cet article, nous présentons cette méthode et la suite du travail présenté dans [4] où la méthode avait été appliquée à un premier pont thermique : nous appliquons cette méthode à quatre autres ponts thermiques, nous analysons les résultats et nous tentons de mettre en avant les raisons pour lesquelles nous pourrions avoir des écarts par rapport à la réalité.

## 2. Méthode de structure équivalente

### 2.1. Principe

Le principe de la méthode est de remplacer la partie de l'enveloppe perturbée par un détail 2D/3D, où le flux de chaleur est 2D/3D, par une structure multicouche 1D ayant les mêmes comportements thermiques statique et dynamique que la partie réelle [5]. Définir cette structure revient à déterminer la résistance thermique et la capacité thermique de chaque couche, et en déduire leur conductibilité thermique, leur chaleur massique, leur masse volumique et leur épaisseur. Ces propriétés sont ensuite à introduire dans le logiciel de simulation. Le nombre optimal de couches de la structure équivalente est de 3.

### 2.2. Théorie

Nous présentons sommairement les notions théoriques nécessaires à la compréhension de la méthode étudiée. Pour davantage de détails, le lecteur est convié à consulter [3, 4, 6].

#### 2.2.1. Facteurs de structure

Les facteurs de structure  $\phi_{ii}$ ,  $\phi_{ie}$  et  $\phi_{ee}$  d'un mur représentent la fraction de chaleur stockée entre 2 états stables et qui est transférée à travers chaque surface [6], respectivement à proximité de la surface interne, à proximité de la surface externe et à proximité du centre du mur. Ils sont liés ensemble par l'Eq. (1) :

$$\phi_{ii} + 2 \times \phi_{ie} + \phi_{ee} = 1 \quad (1)$$

Des parois possédant les mêmes facteurs de structure, résistance et capacité ont des comportements dynamiques similaires même si, en détails, ils peuvent être différents [6].

Pour une géométrie quelconque de paroi, on peut déterminer deux facteurs de structure (le 3<sup>ème</sup> est déduit), grâce au champ de température  $T(x,y,z)$  dans le mur étudié qui est la solution de l'équation de diffusion en stationnaire pour  $T_i = 0$  et  $T_e = 1$ , à partir des Eqs. (2-3) [6] :

$$\phi_{ii} = \frac{1}{C} \int_V \rho c (1 - T)^2 dV \quad (2)$$

$$\phi_{ie} = \frac{1}{C} \int_V \rho c T (1 - T) dV \quad (3)$$

Pour une structure à  $n$  couches homogènes planes, leur expression [7] est :

$$\phi_{ii} = \frac{1}{R^2 C} \sum_{m=1}^n C_m \times \left( \frac{R_m^2}{3} + R_m \times R_{m-e} + R_{m-e}^2 \right) \quad (4)$$

$$\phi_{ie} = \frac{1}{R^2 C} \sum_{m=1}^n C_m \times \left( -\frac{R_m^2}{3} + \frac{R_m \times R}{2} + R_{m-e} \times R_{i-m} \right) \quad (5)$$

## 2.2.2. Sollicitations harmoniques

La théorie de Pipes [8] transposée dans le domaine harmonique permet de déterminer analytiquement, pour une paroi 1D, l'amplitude et le déphasage des flux intérieur et extérieur ( $q_i'$  et  $q_e'$ ) pour des conditions aux limites harmoniques. Pour un mur 1D à 3 couches :

$$\begin{bmatrix} T_e \\ q'_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \prod_{m=3}^1 \begin{bmatrix} D_m & B_m \\ E_m & D_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & R_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_i \\ q'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_i \\ q'_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$D_m = \cosh \left( \sqrt{\frac{2 \times \pi \times C_m \times R_m \times j}{P}} \right) \quad (7)$$

$$B_m = \sinh \left( \sqrt{\frac{2 \times \pi \times C_m \times R_m \times j}{P}} \right) / \sqrt{\frac{2 \times \pi \times C_m \times j}{R_m \times P}} \quad (8)$$

$$E_m = \sqrt{\frac{2 \times \pi \times C_m \times j}{R_m \times P}} \times \sinh \left( \sqrt{\frac{2 \times \pi \times C_m \times R_m \times j}{P}} \right) \quad (9)$$

Pour une évolution sinusoïdale de la température extérieure de période P et d'amplitude unitaire et une température intérieure égale à 0, on obtient :

$$q_i'(P) = \frac{1}{M_{1,2}} \text{ et } q_e'(P) = \frac{M_{2,2}}{M_{1,2}} \quad (10)$$

## 2.3. Méthodologie

- 1) Définition de la géométrie (2D/3D) en plaçant les plans de coupe à 1m de l'élément perturbateur [9] et calcul du champ de température de cette structure en stationnaire, avec des CL standards ( $K_i=8\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $K_e=23\text{W/m}^2\text{K}$ ,  $T_i=20^\circ\text{C}$ ,  $T_e=0^\circ\text{C}$ ).
- 2) Redéfinition de la géométrie en plaçant les plans de coupe afin que les températures de surface les plus éloignées de l'élément perturbateur ne diffèrent pas de plus de  $0.01^\circ\text{C}$  des températures de surface correspondantes à 1m de cet élément. La zone à étudier est réduite, en s'assurant de la conservation du flux et de l'adiabaticité de ces plans.
- 3) Calcul, en stationnaire, des facteurs de structure de cette géométrie 2D/3D à partir des conditions exposées au point 2.2.1. et des Eqs. (1-3).  $\underline{R}$  est également déduite de cette simulation et  $\underline{C}$  est calculée de manière analytique.
- 4) Calcul, en dynamique, de l'amplitude et du déphasage des flux q ( $A$  et  $\phi$ ) au niveau des surfaces intérieure et extérieure, lorsque la structure réelle est soumise à une évolution sinusoïdale de  $T_e$  de période  $P=24\text{h}$  et d'amplitude unitaire quand  $T_i$  vaut 0.
- 5) Calcul de la structure 1D équivalente : des combinaisons judicieuses des valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  sont testées :  $R_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont calculées (4 relations : Eqs. (4-5), résistance et capacité totales identiques), de telle sorte que la structure équivalente possède les valeurs  $R$ ,  $C$ ,  $\phi_{ii}$ ,  $\phi_{ee}$ ,  $\phi_{ie}$  identiques à celles de la structure 2D/3D. La structure retenue est celle minimisant la fonction Err (11) :

$$Err = \sqrt{\left( \frac{A'_i(24h) - A_i(24h)}{A_i(24h)} \right)^2 + \left( \frac{\phi'_i(24h) - \phi_i(24h)}{\phi_i(24h)} \right)^2 + \left( \frac{A'_e(24h) - A_e(24h)}{A_e(24h)} \right)^2 + \left( \frac{\phi'_e(24h) - \phi_e(24h)}{\phi_e(24h)} \right)^2} \quad (11)$$

Les quantités associées à « ' » se réfèrent à la structure équivalente.  $A'$ ,  $A$  et  $\varphi'$ ,  $\varphi$  sont l'amplitude et le déphasage des flux  $q'$ , déterminés via les Eqs. (6-10), et  $q$ . L'indice  $i$  ( $e$ ) se rapporte au flux au niveau de la surface intérieure (extérieure).

- 6) **Vérification de la structure équivalente** : Les évolutions au cours du temps des flux aux surfaces intérieure et extérieure sont comparées entre la structure initiale et la structure équivalente. Ces structures sont soumises aux mêmes conditions extérieures (Fig. 1).

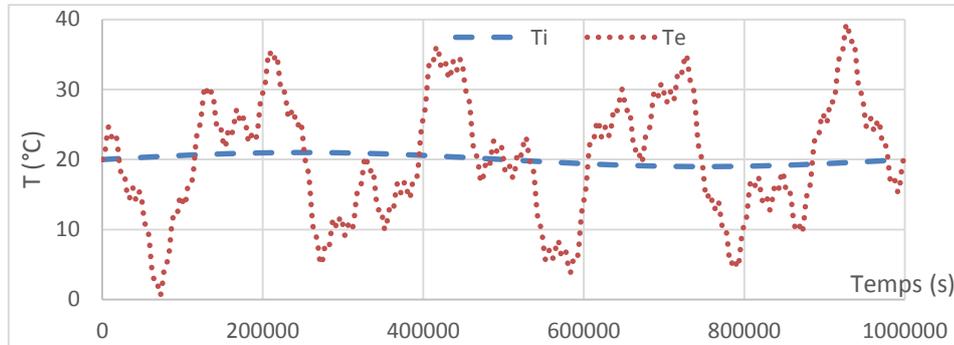


Figure 1 : Evolution des températures d'ambiances intérieure et extérieure au cours du temps

### 3. Applications

Dans [4], nous avons appliqué la méthode à un raccord plancher intérieur (structure béton) – mur extérieur (20 cm d'isolation extérieure) (PT1). Dans ce cas, le comportement thermique de la structure équivalente était très proche de celui de la structure initiale.

Nous présentons ici quatre ponts thermiques auxquels nous avons appliqué la méthode décrite ci-avant et nous comparons graphiquement le comportement thermique, en termes de flux coté intérieur (conditions aux limites : voir Fig. 1), du pont thermique et de sa structure équivalente. Par plus de clarté, le graphe ne reprend que la moitié de la période étudiée.

#### 3.1. PT2 - Angle sortant (structure massive)

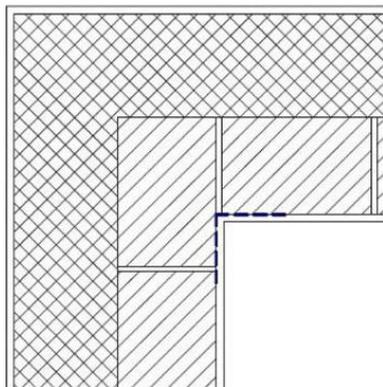


Figure 2 : PT2 – Géométrie [10]

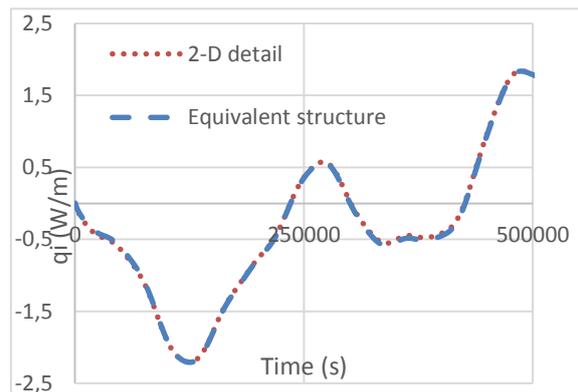


Figure 3 : Comparaison PT2 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

Le mur extérieur est constitué de l'intérieur vers l'extérieur de plâtre (1.5 cm), de briques (19 cm), de polystyrène expansé (20 cm) et de mortier (1.5 cm) : voir Fig.2.

Sur la Fig.3, l'évolution du flux intérieur au cours du temps est identique pour les structures 2D (référence) et équivalente. En intégrant les flux sur la période d'étude ( $10^6$  s  $\approx$  11.5 jours) pour les deux structures, on obtient une différence de 0.55% pour  $q_i$  et de 0.33%

pour  $q_e$ . Sur cette période, l'écart maximal rapporté à la valeur maximale du flux est de 2.7% pour  $q_i$  et de 5.9% pour  $q_e$ .

### 3.2. PT3 - Raccord plancher intérieur-mur extérieur (structure légère)

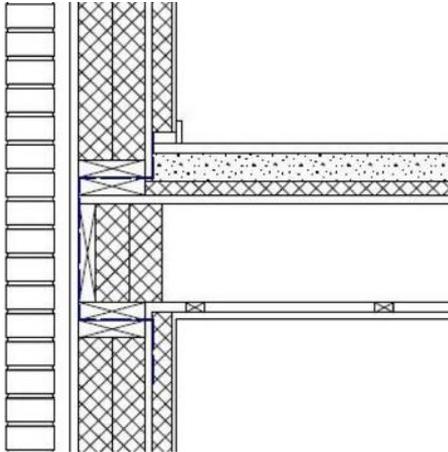


Figure 4 : PT3 – Géométrie [10]

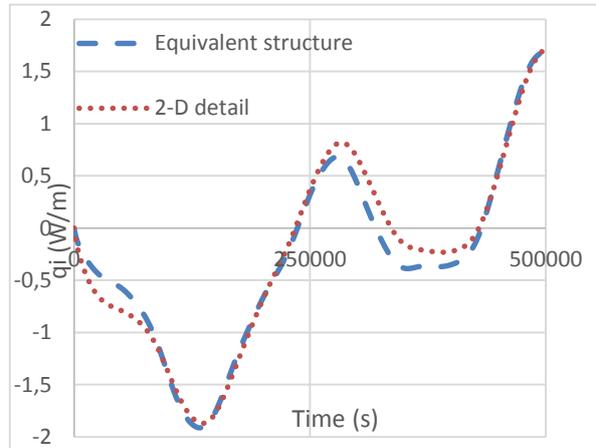


Figure 5 : Comparaison PT3 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

Le mur extérieur est constitué de l'intérieur vers l'extérieur de plâtre (1 cm), de PUR (4 cm), de fibres de bois (1.8 cm), de PUR (14 cm, 10% de bois), de fibres de bois (1.8 cm), d'une lame d'air peu ventilée (3.5 cm) et de briques (10 cm). Le plancher est constitué de plâtre (6 cm), de panneaux d'OSB (2 cm), d'air (21 cm, 13% de bois), de panneaux d'OSB (1.8 cm), d'isolation acoustique (3 cm), de béton (6 cm) et de carrelages (1 cm).

Sur la Fig.5, l'évolution du flux intérieur a la même allure pour les structures 2D et équivalente mais avec parfois un léger décalage. En intégrant les flux sur la période d'étude, on obtient une différence de 5% pour  $q_i$  et de 5.5% pour  $q_e$ . Sur cette période, l'écart maximal rapporté à la valeur maximale du flux est de 16% pour  $q_i$  et de 11% pour  $q_e$ .

Si on ne se base que sur le flux intérieur dans la fonction (11) à minimiser, on atteint une meilleure précision coté intérieur pour le mur équivalent : en intégrant le flux sur la période d'étude, on obtient alors une différence de 1.8% pour  $q_i$  et l'écart maximal rapporté à la valeur maximale est de 7.2% pour  $q_i$ . Mais on multiplie en moyenne par 3 l'erreur sur  $q_e$ .

### 3.3. PT4 - Raccord mur extérieur-mur intérieur (structure massive)

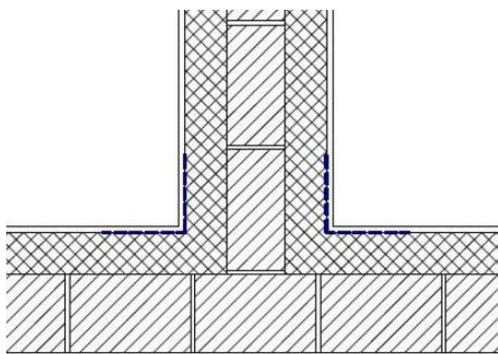


Figure 6 : PT4 – Géométrie [10]

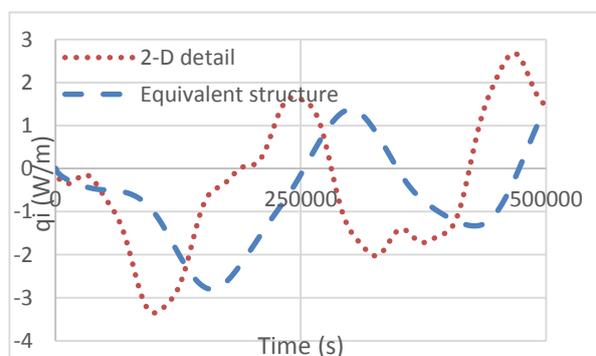


Figure 7 : Comparaison PT4 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

Le mur extérieur est constitué de l'intérieur vers l'extérieur de plâtre (1.5 cm), de polyuréthane (10 cm), de béton lourd creux (19 cm) et de mortier (1.5 cm). Le mur intérieur est constitué de 14 cm de béton creux, et de part et d'autre de PUR (10 cm) et de plâtre (1cm).

Sur la Fig.7, l'évolution du flux intérieur au cours du temps de la structure équivalente est retardée et un peu amortie comparée à celle du détail 2D. En intégrant les flux sur la période d'étude, on obtient une différence de 18% pour  $q_i$  et de 3.5% pour  $q_e$ . Sur cette période, l'écart maximal rapporté à la valeur maximale du flux est de 108% pour  $q_i$  et de 5.5% pour  $q_e$ .

### 3.4. PT5 - Raccord fenêtre-mur extérieur (structure légère)

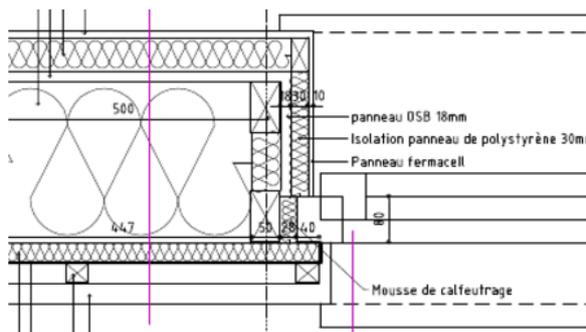


Figure 8 : PT5 – Géométrie [10]

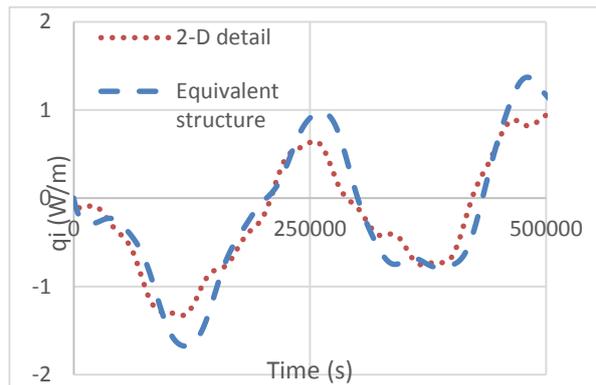


Figure 9 : Comparaison PT5 – structure équivalente :  $q_i=f(t)$

Le mur extérieur est constitué de l'intérieur vers l'extérieur de plâtre (1 cm), de fibres de bois (6 cm), de panneaux d'OSB (1.8 cm), de cellulose (28 cm) et de fibres de bois (3.5 cm).

Sur la Fig.9, on peut voir que l'évolution du flux intérieur au cours du temps pour la structure équivalente est plus lisse et moins amortie comparée à celle pour la structure 2D. En intégrant les flux sur la période d'étude, on obtient une différence de 29% pour  $q_i$  et de 23% pour  $q_e$ . Sur cette période, l'écart maximal rapporté à la valeur maximale du flux est de 45% pour  $q_i$  et de 22% pour  $q_e$ .

## 4. Source des erreurs

Dans certains cas, notamment PT4 et PT5, nous voyons que la structure équivalente déterminée par notre méthode ne conduit pas à des résultats satisfaisants en termes de précision. Le but de ce chapitre est de trouver un début de piste expliquant les raisons de ce problème afin de pouvoir le résoudre.

Pour cela, nous analysons la réponse indicielle et les caractéristiques de chacun des ponts thermiques étudiés.

#### 4.1. Réponse indicielle des ponts thermiques

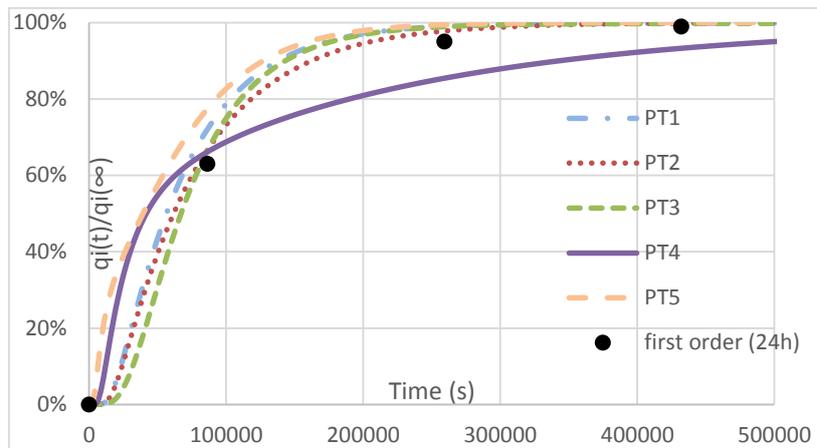


Figure 10 : Réponse indicielle de chaque pont thermique étudié

Nous soumettons chaque pont thermique à un échelon de température extérieure unitaire (conditions initiales nulles et  $T_i$  valant 0). La Fig.10 représente l'évolution au cours du temps du rapport flux intérieur au temps  $t$  sur sa valeur à l'équilibre. Les 4 points noirs représentent la valeur de ce rapport pour un système du 1<sup>er</sup> ordre ayant une constante de temps de 24h.

Nous remarquons que les ponts thermiques PT1, PT2 et PT3, ceux pour lesquels les résultats sont satisfaisants, ont une constante de temps sans doute proche de 24h et un comportement proche d'un système du 1<sup>er</sup> ordre. PT4 a lui un comportement qui s'en éloigne au début. PT5 a un comportement fort différent de celui du 1<sup>er</sup> ordre ainsi qu'une (ou plusieurs) constante de temps différente.

#### 4.2. Caractéristiques des ponts thermiques

	$R$	$C$	$K_{ID}$	$\psi$	$\phi_{ii}$	$\phi_{ie}$	$\phi_{ee}$	$Err$
	m.K.W <sup>-1</sup>	kJ.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup>	W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>	-	-	-	-
PT1	6.30	692.3	0.146	0.0042	0.921	0.025	0.026	0.032
PT2	4.66	268.5	0.146	-0.064	0.688	0.085	0.142	0.046
PT3	5.91	348.5	0.141	0.050	0.426	0.048	0.478	0.29
PT4	2.40	597.1	0.212	0.17	0.158	0.096	0.650	1.7
PT5	5.41	162.6	0.116	0.013	0.295	0.091	0.523	1.3

Tableau 1 : Caractéristiques des ponts thermiques étudiés

Dans le Tab.1, nous reprenons les caractéristiques principales des 5 ponts thermiques précédemment étudiés. On ne peut tirer de conclusions générales sur 5 cas mais nous pouvons observer plusieurs tendances :

- Les structures équivalentes les moins précises correspondent bien aux cas où la valeur de la fonction  $Err$  (11) est plus élevée.
- Lorsque l'importance de  $\phi_{ie}$  grandit comparée à celle de  $\phi_{ii}$ , l'erreur sur le flux coté intérieur est plus importante.
- La structure équivalente la moins précise est celle du PT4, qui possède le plus grand coefficient de déperdition  $\psi$  : difficile d'affirmer actuellement s'il y a un lien.
- PT5 présentant le produit  $RC$  le plus faible, il est logique que ce soit la structure qui réagisse le plus vite (Fig.10).

## 5. Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une méthode de structure 1D équivalente à un pont thermique 2D/3D. Nous avons exposé les notions théoriques principales (facteurs de structure, flux harmonique) et détaillé la méthodologie. Nous avons ensuite appliqué cette méthode à 5 ponts thermiques différents (dont un est présenté dans [4] : PT1).

Dans deux cas (PT1-PT2), nous avons des résultats très satisfaisants : le comportement de la structure équivalente 1D est similaire à celui du pont thermique. Dans deux autres cas (PT4-PT5), les résultats devraient être meilleurs, surtout en ce qui concerne le flux coté intérieur. Dans le dernier cas (PT3), il y a un faible écart pour le flux coté intérieur mais qui peut être réduit en ne basant la fonction Err (11) que sur le flux intérieur harmonique, il y a donc un choix à faire : soit optimiser uniquement le flux intérieur, soit optimiser l'intérieur et l'extérieur simultanément mais cela peut dégrader la précision sur le flux intérieur.

Dans les analyses que nous avons faites, nous avons vérifié que la fonction Err (11) utilisée pour choisir la meilleure structure équivalente est une image de sa précision. Nous avons aussi remarqué que lorsque le comportement du pont thermique s'écarte de celui d'un système du 1<sup>er</sup> ordre et/ou que le rapport  $\phi_{ie}/\phi_{ii}$  augmente, la précision sur le flux intérieur pour la structure équivalente se dégrade.

Nous avons réalisé d'autres tests en utilisant d'autres périodes pour la fonction Err (11), les parties réelle et imaginaire des flux harmoniques dans Err ou 4 couches pour la structure 1D, mais cela n'a pas conduit à d'améliorations sensibles des résultats.

Dans la suite du travail, nous poursuivons l'analyse de la méthode et de ses résultats pour d'autres ponts thermiques afin de l'améliorer ainsi que d'évaluer l'impact d'une modélisation précise des ponts thermiques sur le bilan énergétique du bâtiment.

## Références

- [1] J. Kosny, E. Kossecka, Multi-dimensional heat transfer through complex building envelope assemblies in hourly energy simulation programs, *Energy and Buildings*, 34 (2002), 445-454.
- [2] K. Martin, A. Erkoreka, I. Florezs, M. Odriozola, J.M. Sala, Problems in the calculation of thermal bridges in dynamic conditions, *Energy and Buildings*, 43 (2011), 529-535.
- [3] J. Quinten, V. Feldheim, Dynamic modelling of multidimensional thermal bridges in building envelopes: Review of existing method, application and new mixed method, *Energy and Buildings*, 110 (2016), 284-293.
- [4] J. Quinten, V. Feldheim, Détermination d'un mur 1D équivalent à une structure 2D/3D : analyse de la méthode, *Proc. Congrès Français de Thermique 2015* (La Rochelle, 26-29 mai 2015).
- [5] K. Martin, C. Escudero, A. Erkoreka, I. Flores, J.M. Sala, Equivalent wall method for dynamic characterisation of thermal bridges, *Energy and buildings*, 55 (2012), 704-714.
- [6] J. Kosny, E. Kossecka, Equivalent wall as a dynamic model of a complex thermal structure, *Journal of Building Physics*, vol. 20 no. 3 (1997), 249-268.
- [7] E. Kossecka, Correlations between structure dependent and dynamic thermal characteristics of building walls, *Journal of Building Physics*, vol. 22 no. 4 (1999), 315-333.
- [8] L. A. Pipes, Matrix analysis of heat transfer problems, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 263 no. 3 (1957).
- [9] EN ISO 10211, Thermal bridges in building construction – Heat flows and surface temperatures – Detailed calculations, *European Committee for Standardization* (2007).
- [10] [www.ponts-thermiques.be](http://www.ponts-thermiques.be), *Service Ponts Thermiques de la Plate-forme Maison Passive asbl*