

Instabilité de Rayleigh-Bénard sous champ magnétique : structures et transfert de chaleur

Sébastien Renaudière de Vaux^{1,2*}, Rémi Zamansky¹, Wladimir Bergez¹,
Philippe Tordjeman¹, Jean-François Haquet², Viviane Bouyer²

¹Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) - Université de Toulouse, CNRS-INPT-UPS, Toulouse, France

²CEA, DEN, Cadarache, SMTA/LPMA, F13108 St Paul lez Durance, France.

*(auteur correspondant : srenaudi@imft.fr)

Résumé - Nous étudions l'influence d'un champ magnétique constant et vertical sur les structures de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, ainsi que son effet sur les transferts de chaleur en paroi. Proche de la stabilité marginale, l'écoulement développe des structures fines qui s'élargissent lorsqu'on s'éloigne de cette stabilité marginale. Localement, le transfert de chaleur est modifié, les zones de fort transfert correspondant aux zones où la vitesse dirigée selon la normale sortante de la paroi est importante. Le transfert global est légèrement diminué par rapport au cas non magnétique.

Nomenclature

Lettres latines

d	hauteur de la cavité, m
g	accélération de la gravité, m/s^2
h	coefficient d'échange convectif, $W/m^2/K$
j	densité de courant sans dimension
k	vecteur d'onde sans dimension
S	surface d'échange, m^2
T	température sans dimension
u	vitesse sans dimension

Symboles grecs

μ_0	perméabilité magnétique du vide, $T \cdot m/A$
α	diffusivité thermique, m^2/s
β	coefficient de dilatation thermique, K^{-1}
κ	conductivité thermique, $W/m/K$
λ	longueur d'onde, m

ν	viscosité cinématique, m^2/s
Φ	Potentiel électrique sans dimension
σ	conductivité électrique, S/m

Indices et exposants

c	paroi chaude
f	paroi froide
p	paroi

Nombres sans dimension

Ha	Hartmann
Nu	Nusselt
Pm	Prandtl magnétique
Pr	Prandtl thermique
Ra	Rayleigh

1. Introduction

Un champ magnétique peut interagir avec l'écoulement d'un fluide conducteur électrique dans de nombreuses situations, qu'elles soient naturelles [1], ou industrielles [2]. Dans les situations industrielles, les champs magnétiques servent à amortir les écoulements (magnetic damping), à brasser des bains, ou à chauffer par induction [3]. Cette dernière application est notamment utilisée en recherche pour la sûreté nucléaire [4]. Lors d'un accident nucléaire grave, la perte de contrôle de la température d'un réacteur nucléaire provoque sa fusion.

Le cœur en fusion (le corium) traverse la deuxième barrière de confinement (la cuve en acier) puis interagit avec la troisième barrière (le radier en béton). La modélisation en laboratoire d'un événement de ce type est complexe, du fait notamment de la génération volumique de chaleur du corium. En utilisant des champs magnétiques alternatifs, on peut chauffer par induction un corium prototypique (en UO_2 appauvri), ce qui permet d'induire des courants dans

l'écoulement, qui vont créer de la dissipation par effet Joule et donc générer une source de chaleur volumique (cette technique est utilisée notamment au Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA) de Cadarache [4]). Le chauffage inductif induit également une force de Lorentz dans le fluide, susceptible de modifier l'écoulement par rapport au cas réel d'accident grave. La dynamique de ce bain (couplage force de Lorentz, dissipation Joule et convection naturelle) reste encore mal comprise, notamment pour l'estimation des transferts de chaleur aux parois pour permettre de dimensionner les barrières de confinement.

Les champs magnétiques constants sont également utilisés à grande échelle dans l'industrie. Ils servent notamment dans les pompes et les freins électromagnétiques [5], ou encore pour la solidification d'alliages métalliques. La magnétohydrodynamique (MHD) en champ constant a fait l'objet de nombreuses études dans des situations de convection naturelle dans des cas Rayleigh-Bénard [6, 7], mais soulève toujours des questions. Les précédentes études ont montré une diminution du transfert de chaleur en paroi, due au champ magnétique. Récemment, une étude a montré en champ magnétique horizontal que les structures de l'écoulement avait un nombre d'onde plus faible lorsque l'intensité du champ magnétique était augmentée, à écart de température fixe [9]. Dans le cadre des applications industrielles, la compréhension des transferts de chaleur est déterminante pour l'efficacité des procédés. Il reste cependant des questions fondamentales non résolues, notamment par rapport aux structures dans un bain soumis à un champ magnétique vertical. La compréhension des transferts de chaleur, que ce soit en champ statique ou alternatif, est déterminante pour le dimensionnement des installations.

Nous proposons de développer un outil de simulation numérique pour la MHD adapté à ces situations. La première étape a consisté à ajouter la force de Lorentz dans le code de simulation numérique Jadim [8] dans le cas des champs magnétiques constants. Ce travail a permis d'apporter des résultats sur l'instabilité de Rayleigh-Bénard dans le cas d'un champ magnétique vertical. A notre connaissance, il n'existe aucune simulation numérique instationnaire présentant la modification des structures par un champ magnétique vertical et leur influence sur le transfert de chaleur. Nous avons montré que pour un écart de température fixé entre deux plaques horizontales, le nombre d'onde des structures diminuait lorsqu'on augmentait l'intensité du champ magnétique. Cette modification des structures affecte également le transfert de chaleur à l'échelle locale, les zones de fort et faible transfert de chaleur suivant les motifs de l'écoulement. On observe une diminution du transfert de chaleur moyenné sur la paroi, due au champ magnétique, mais qui reste toutefois minime. Nous décrivons dans ce papier tout d'abord le cas étudié ainsi que les équations résolues. Dans un second temps nous montrons l'influence du champ magnétique sur les structures de l'écoulement. La dernière partie est consacrée à l'étude du transfert de chaleur pariétal.

2. Description du problème

2.1. Equations

On considère une couche fluide infinie confinée entre deux plaques rigides et horizontales, comme schématisé à la figure 1. Le fluide est soumis à l'action d'un champ magnétique vertical, constant et homogène et à l'action de la gravité. Les températures sont imposées aux parois, T_f sur la paroi haute froide et T_c sur la paroi basse chaude, de manière à ce que $T_c - T_f > 0$. Au-delà d'un écart critique, la couche fluide sera déstabilisée et de la convection naturelle apparaîtra. Le système est initialement au repos. Sous l'hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq, les équations

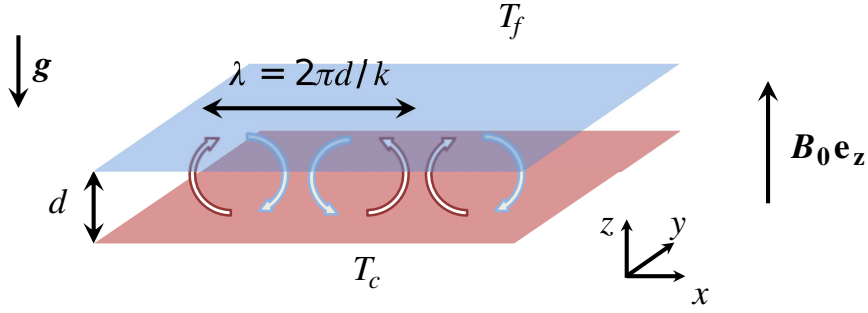


Figure 1 : Schéma du cas étudié. Les parois ont une conductivité thermique infinie. Le fluide est soumis à la gravité (flottabilité) et à la force de Lorentz.

considérées s'écrivent sous forme adimensionnée (1) et (2) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \Delta \mathbf{u} - \frac{Ra}{Pr} T \mathbf{e}_z + Ha^2 \mathbf{j} \times \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T + \Gamma j^2. \quad (2)$$

Pour adimensionner le temps, la vitesse et le champ magnétique, $t_0 = d^2/\nu$, $U_0 = \nu/d$ et B_0 ont été utilisés. L'échelle de longueur est d et l'échelle de densité de courant est $j_0 = \sigma U_0 B_0$. La température adimensionnée est $T = (T^* - T_f)/(T_c - T_f)$, avec T^* la température en Kelvin. Les nombres sans dimension qui apparaissent sont les nombres de Rayleigh $Ra = g\beta(T_c - T_f)d^3/\nu\alpha$, de Prandtl $Pr = \nu/\alpha$, de Hartmann $Ha = B_0 d \sqrt{\sigma/\rho\nu}$ et un nombre caractéristique de la dissipation Joule $\Gamma = B_0^2 d^2 / \sigma \mu_0^2 \nu (T_c - T_f) \rho c_p$. La dissipation Joule est négligeable pour les faibles valeurs de Ha et en champ constant. Ce terme ne sera pas calculé. On définit ici l'opérateur nabla en coordonnées cartésiennes $\nabla \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ et l'opérateur de Laplace $\Delta \equiv \nabla^2$. Les équations (1) et (2) sont respectivement les équations de Navier-Stokes et de transport de chaleur. Dans le cas d'un champ magnétique constant et de faibles nombres de Prandtl magnétiques $Pm = \mu_0 \sigma \nu$, l'induction du champ magnétique est négligeable. C'est l'hypothèse quasi-statique, qui permet d'écrire le champ électrique comme dérivant d'un potentiel $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$. La densité de courant s'obtient par la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = -\nabla \Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z. \quad (3)$$

Dans le cas des métaux liquides, la charge électrique est instantanément relaxée, le milieu reste neutre électriquement. Cette condition se traduit par $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, et donc, d'après (3), par une équation de Poisson pour le potentiel électrique :

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z). \quad (4)$$

Pour des parois électriquement conductrices, les conditions aux parois pour le potentiel sont des conditions de Dirichlet $\Phi_p = 0$. La stabilité marginale de cet écoulement a été étudiée par Chandrasekhar [10]. Il a déterminé l'écart de température critique au-delà duquel la convection apparaît. En terme de nombres adimensionnels, cela correspond à un nombre de Rayleigh critique Ra_c . Dans le cas non magnétique, $Ra_c = 1708$ et $Ra_c \sim \pi^2 Ha^2$ pour les très grandes valeurs de Ha . Les propriétés du gallium liquide ont été utilisées [11]. Le cas est résolu avec le code volumes finis Jadim [8] sur une boîte bi-périodique dans les directions x et y , de côté

10d. Les conditions périodiques permettent de recréer numériquement des conditions infinies. Le maillage est choisi afin de respecter les critères données par Grötzbach [12] pour la simulations numérique directe (DNS) de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Le maillage se compose de $N_x \times N_y \times N_z = 256 \times 256 \times 64$ points. Les points de calcul sont représentés à la figure 2 et comparés à des simulations pour $Ha = 0$. La ligne pleine représente la stabilité marginale. On définit la grandeur $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$, où Ra_c est le Rayleigh critique qui dépend de Ha . Ce paramètre représente la distance relative à la stabilité marginale.

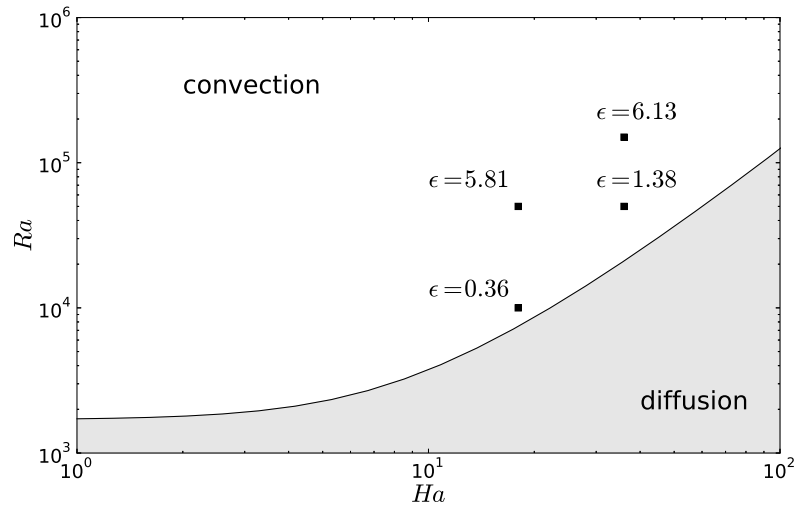


Figure 2 : Représentation des quatre points de calcul dans l'espace des paramètres. La zone grisée représente la zone stable où le transfert de chaleur se fait par diffusion.

3. Modification des structures convectives

Après un régime transitoire, les structures s'organisent et deviennent stables. Dans cette gamme de paramètres (Ha, Ra), les rouleaux 2D sont favorisés. Ceux-ci peuvent être parallèles ou bien former des spirales. Les champs de vitesse verticale dans le plan $z = 1/2$ pour

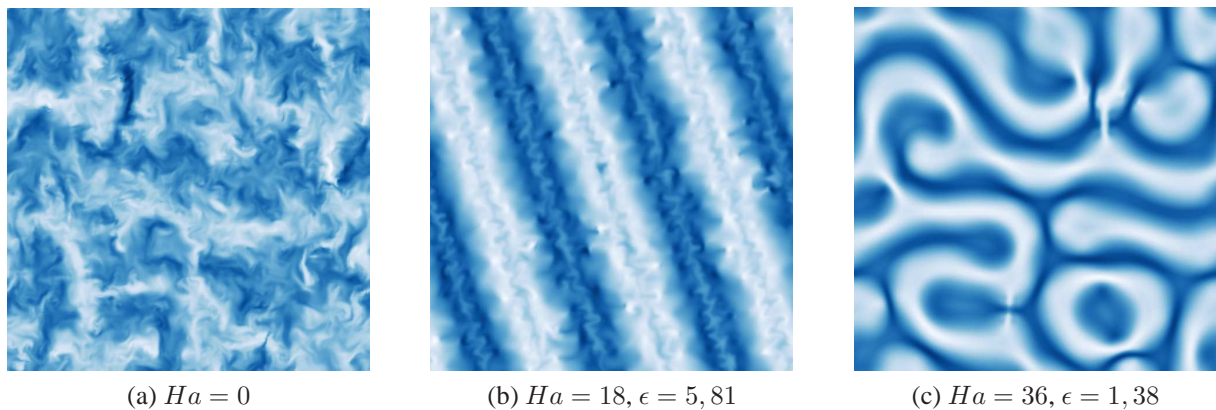
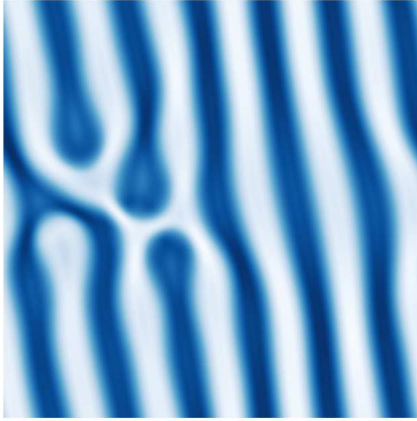


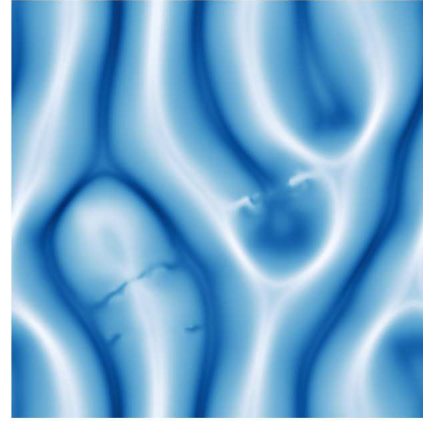
Figure 3 : Champ instantané de vitesse verticale dans le plan $z = 1/2$, normé par l'amplitude, pour $Ra = 5 \cdot 10^4$. Bleu = positif, blanc = négatif.

$Ra = 5 \cdot 10^4$ et différents Ha sont représentés à la figure 3. Sans champ magnétique (fig. 3a) des

structures chaotiques apparaissent. Celles-ci ont tendance à disparaître lorsqu'un champ magnétique est appliqué (fig. 3b). Elles deviennent inexistantes si le champ magnétique est suffisamment fort (fig. 3c). La force de Lorentz implique ainsi une forte réorganisation de l'écoulement en des structures moins chaotiques. La figure 4 donne les instantanés de champ vitesse pour les points $\epsilon = 0, 36$ et $\epsilon = 6, 13$. Comme dans les autres cas, le champ magnétique affecte sévèrement les petites structures de l'écoulement : seuls des rouleaux quasi-2D subsistent.



(a) $Ha = 18, Ra = 10^4, \epsilon = 0, 36$



(b) $Ha = 36, Ra = 1, 5 \cdot 10^5, \epsilon = 6, 13$

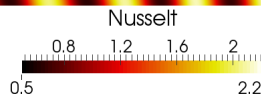
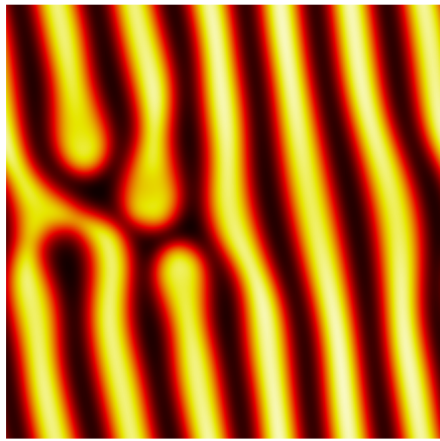
Figure 4 : *Champ instantané de vitesse verticale dans le plan $z = 1/2$, normé par l'amplitude. Bleu = positif, blanc = négatif.*

Les structures peuvent être caractérisées par leur longueur d'onde λ , ou de manière équivalente par leur nombre d'onde k (cf figure 1). Pour un Ha donné, l'augmentation de Ra favorise des structures plus larges, donc à plus faible nombre d'onde. Ces réductions des nombres d'onde ont déjà été observées dans le cas non magnétique et pour des Pr variés [13], ainsi que dans le cas d'un champ magnétique horizontal, pour des gammes de (Ha, Ra) similaires [9]. Cependant, en champ magnétique horizontal, la stabilité marginale n'est pas modifiée par rapport au cas non magnétique, i.e. $Ra_c = 1708$, quelle que soit la valeur de Ha . Nous montrons ici que la réduction du nombre d'onde est présente pour les champs magnétiques verticaux pour des paramètres (Ha, Ra) proches de ceux de Yanagisawa *et al.* [9]. Les résultats de la présente étude sont donnés au tableau 1.

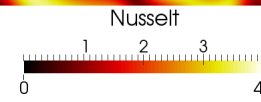
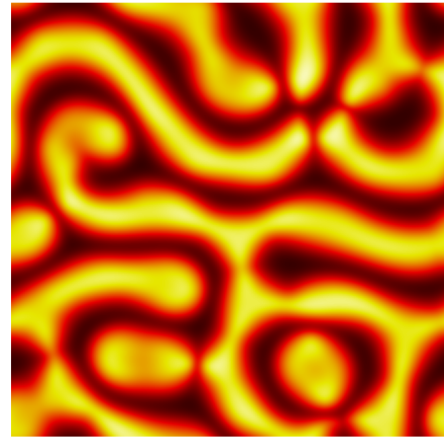
Ha	18	36	18	36
Ra	$1 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$1, 5 \cdot 10^5$
ϵ	0, 36	1, 38	5, 81	6, 13
k	$\simeq 3, 8$	$\simeq 3, 8$	$\simeq 2$	$\simeq 2, 6$

Tableau 1 : *Structures stables. Pour de faibles valeurs de ϵ , le nombre d'onde dominant est autour de $k = 3, 8$. Pour des valeurs plus élevées de ϵ , le nombre d'onde diminue.*

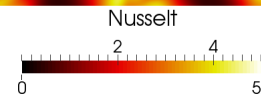
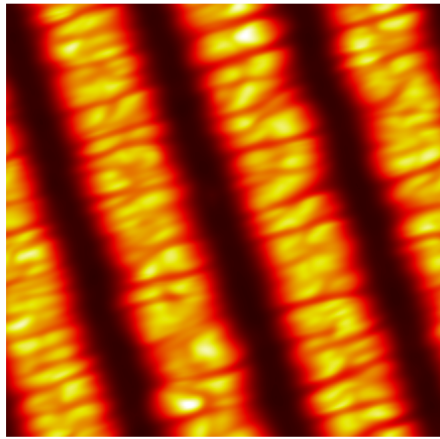
Nous avons montré ici que les structures convectives deviennent plus larges (à Ha donné) lorsque Ra est augmenté. Le transport de chaleur se faisant essentiellement par convection,



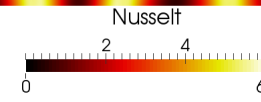
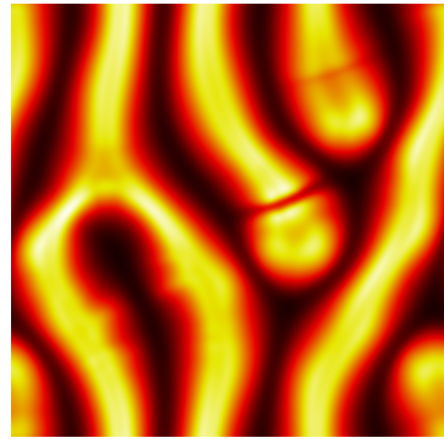
(a) $Ha = 18, Ra = 10^4, \epsilon = 0,36$



(b) $Ha = 36, Ra = 5 \cdot 10^4, \epsilon = 1,38$



(c) $Ha = 18, Ra = 5 \cdot 10^4, \epsilon = 5,81$



(d) $Ha = 36, Ra = 1,5 \cdot 10^5, \epsilon = 6,13$

Figure 5 : *Champ de Nusselt sur la paroi inférieure. Pour la paroi supérieure la répartition des zones claires et sombres est inversée.*

ces structures seront responsables des échanges aux parois. Elles vont influencer le transfert de chaleur pariétal à l'échelle locale, mais aussi le transfert de chaleur moyen.

4. Influence sur le transfert de chaleur en paroi

Les calculs montrent que le champ magnétique affecte la dynamique de l'écoulement. En conséquent, les transferts de chaleurs seront modifiés. On définit ici le coefficient d'échange convectif aux parois, de même que sa moyenne sur la paroi :

$$h = \frac{\kappa}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{paroi}, \quad (5)$$

$$\bar{h} = \frac{\kappa}{\Delta T} \frac{1}{S} \iint \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{paroi} dS, \quad (6)$$

où κ est la conductivité thermique du fluide et S la surface de la paroi. On définit aussi les coefficients de transfert adimensionnés, les nombres de Nusselt local et moyenné :

$$Nu = \frac{hd}{\kappa}, \quad (7)$$

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{hd}}{\kappa}. \quad (8)$$

Les résultats présentés à la figure 5 montrent des amplitudes en nombre de Nusselt importantes. La modifications des structures convectives (figure 4) provoque une modification de la répartition des zones à fort et bas flux de chaleur. La figure 4 montre que la répartition de ces zones suit la même répartition que les zones de fortes et basses vitesses. A cause des mouvements convectifs, il est possible que le nombre de Nusselt soit plus petit que l'unité, contrairement au Nusselt moyenné.

Cependant, même si le Nu moyenné est réduit en présence d'un champ magnétique, il reste du même ordre de grandeur, comme le montre la figure 6. Cette figure présente aussi nos résultats en l'absence de champ magnétique, cohérents avec les résultats de Rossby [14] et Aurnou et Olson [6]. Cette modification des zones à fort et faible flux de chaleur est importante dans les applications industrielles, par exemple de solidification d'alliages. Des variations conséquentes en flux de chaleur peuvent entraîner une anisotropie dans la structure finale du matériau.

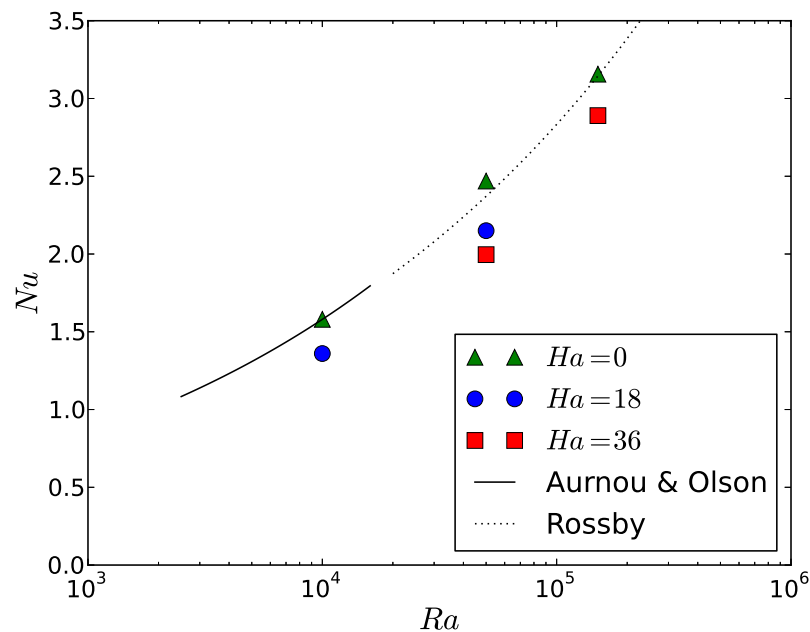


Figure 6 : Nusselt moyenné sur la surface pour les quatre points de calcul. Les lignes pleines et pointillées représentent les corrélations $Nu = f(Ra)$ de [6] et [14], obtenues sans champ magnétique. Les triangles verts représentent des cas non magnétiques simulés à titre de validation.

5. Conclusions

Les simulations montrent que les structures de l'instabilité de Rayleigh-Bénard sont modifiées lorsqu'un champ magnétique vertical est appliqué. Elles sont plus étroites proche de la stabilité marginale et s'élargissent au fur et à mesure que l'on s'éloigne de cette stabilité marginale. Cette modification des structures est essentielle pour comprendre les transferts de chaleur aux paroi. En effet, le transfert de chaleur est essentiellement convectif. Localement, les zones de fort flux de chaleur suivent les zones de forte vitesse tangentielle à la paroi. En revanche le flux de chaleur moyen reste du même ordre de grandeur par rapport au cas non magnétique. Il s'en trouve tout de même légèrement diminué car la composante advective de la force de Lorentz est toujours opposée aux composantes horizontales de la vitesse.

Les prochaines étapes de ce travail consisteront en la simulation d'un bain soumis à un champ alternatif. Il est nécessaire de résoudre l'équation de l'induction du champ magnétique. Cette situation sera représentative des cas de chauffage par induction.

Références

- [1] F. Pétrélis and S. Fauve, Chaotic dynamics of the magnetic field generated by dynamo action in a turbulent flow, *J. Phys. : Condens. Matter* 20 (2008) 494203.
- [2] R. Moreau, The fundamentals of MHD related to crystal growth, *Prog. Cryst. Growth Char. Mat.* 38, 1–4 (1999), 161–194
- [3] R. Moreau, *Magnetohydrodynamics*, Springer (1990).
- [4] C. Journeau, P. Piluso, J.-F. Haquet, E. Boccaccio, V. Saldo, J.-M. Bonnet, S. Malaval, L. Carénini, and L. Brissonneau, Two-dimensional interaction of oxidic corium with concretes : The VULCANO VB test series, *Annals of Nuclear Energy*, 36(10) :1597–1613, (2009).
- [5] P.A. Davidson, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press (2001).
- [6] J.M. Aurnou and P.L. Olson, Experiments on Rayleigh–Bénard convection, magnetoconvection and rotating magnetoconvection in liquid gallium, *J. Fluid Mech.*, 430 :283–307 (2001).
- [7] U. Burr and U. Müller, Rayleigh–Bénard convection in liquid metal layers under the influence of a vertical magnetic field, *Phys. Fluids*, 13(11) :3247–3257(2001).
- [8] J. Magnaudet, M. Rivero, and J. Fabre, Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow, *J. Fluid Mech.*, 284, 97 (1995).
- [9] T. Yanagisawa, Y. Hamano, T. Miyagoshi, Y. Yamagishi, Y. Tasaka, and Y. Takeda, *Convection patterns in a liquid metal under an imposed horizontal magnetic field*, *Phys. Rev. E*, 88(6) :063020, (2013).
- [10] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover (1981).
- [11] T. Iida and R. Guthrie, *The physical properties of liquid metals*, Clarendon Press (1988).
- [12] G. Grötzbach, Spatial resolution requirements for direct numerical simulation of the Rayleigh–Bénard convection, *J. Comp. Phys.*, 49(2) :241–264 (1983)
- [13] G. E. Willis, J. W. Deardorff and R.C.J. Somerville, Roll-diameter dependence in Rayleigh convection and its effect upon the heat flux, *J. Fluid Mech.* 54 (2), 351–367 (1972)
- [14] H.T. Rossby, A study of Bénard convection with and without rotation, *J. Fluid Mech.*, 36(2), 309–335 (1969)

Remerciements

Les auteurs remercient le Commissariat à l'Énergie Atomique ainsi que la société ECM pour le support financier. Les simulations numériques ont été menées au centre de calcul CALMIP.