

# Estimation de sources de chaleur dans les matériaux peu diffusifs

Anthony CASTILLO<sup>1\*</sup>, Jean-Laurent GARDAREIN<sup>1\*</sup>, Jonathan GASPAR<sup>1</sup>, Fabrice RIGOLLET<sup>1</sup>, Christophe LENILIOT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire IUSTI, CNRS UMR 7343, Aix-Marseille Université  
5, rue Enrico FERMI – 13453 Marseille Cedex13

\* (auteur correspondant : [anthony.castillo@univ-amu.fr](mailto:anthony.castillo@univ-amu.fr), [jean-laurent.gardarein@univ-amu.fr](mailto:jean-laurent.gardarein@univ-amu.fr))

**Résumé** - Dans ce travail, une méthode d'estimation de sources de chaleur 2D instationnaire est mise au point. Les sources seront estimées à partir d'une cartographie IR des températures sur la face avant du matériau. On se place dans le cadre de matériaux thermiquement minces. Un comparatif de la précision de l'estimation ainsi que du coût en temps de calcul sera également effectué entre une méthode directe (couplée à des techniques de filtrage) et une méthode itérative (de type gradients conjugués). Ce travail est réalisé uniquement sur des données simulées numériquement.

## Nomenclature

|            |                                     |        |                                  |
|------------|-------------------------------------|--------|----------------------------------|
| $\lambda$  | Conductivité thermique, $W / (m.K)$ | $S$    | Source, $W / m^3$                |
| $\rho$     | Masse volumique, $kg / m^3$         | $T$    | Température, °C                  |
| $L, l$     | Longueur, largeur, cm               | $Fo$   | Nombre de Fourier                |
| $\Delta t$ | Pas de temps, s                     | $[X]$  | Matrice                          |
| $C_p$      | Chaleur spécifique, $J / (kg.K)$    | $sigX$ | Ecart-type selon une coupe X, °C |

**Mots clés** : Estimation de sources, Problèmes Inverses, Méthode directe, Filtrage, SVD, Gradients Conjugués.

## 1. Introduction

Les matériaux composites, à matrice en résine renforcée par des fibres de verre, sont conçus pour leurs propriétés mécaniques remarquables, et trouvent de nombreuses applications notamment en aéronautique. Leur comportement mécanique est fortement couplé à leur comportement thermique lorsqu'ils sont en service : on parle alors d'une loi de comportement thermomécanique du matériau et il est important de connaître cette loi notamment pour comprendre les mécanismes d'endommagement. L'auto-échauffement de tels matériaux est par exemple présent lorsqu'ils sont soumis à une déformation anélastique (par exemple en traction), que ce soit en régime quasi-statique ou en régime de fatigue. 'L'observation' thermique d'un tel matériau pendant une sollicitation mécanique peut ainsi être une aide à la compréhension des mécanismes de son endommagement (frottements fibres/matrice, création de fissures dans la matrice, rupture de fibres, etc..).

Cette observation n'est cependant pas suffisante si elle n'est pas associée à une méthode d'estimation de sources de chaleur permettant de déterminer précisément les énergies mises en jeu lors de ces tests. Ces estimations consistent à déterminer une cause (la source) à partir de la conséquence (le champ de température mesuré par thermographie IR) et entrent dans la catégorie des problèmes inverses en conduction de la chaleur. Certaines méthodes ont déjà été mises au point dans un cadre 1D principalement, sur des matériaux homogènes. Elles permettent d'estimer les sources de chaleurs mises en jeu lors d'essais de traction [1]. Plus récemment des méthodes 2D directes ont été développées et utilisées sur des données numériques [2] et expérimentales. Ces méthodes se classent selon 3 grandes familles [3] :

- Calcul de dérivées (régularisation par filtrage de données) [4]
- Recherche de 'quasi-solutions' (régularisation des opérateurs inverses) [5], [6]
- Optimisations successives (algorithmes itératifs sur problème direct) [7]

Au cours de ce travail nous avons développé deux méthodes que l'on se propose de comparer. La première est une méthode d'inversion directe 2D par identification de chaque terme [8] de l'équation de diffusion couplée à un filtrage de données. Celle-ci présente l'avantage d'être extrêmement rapide mais ne donne pas de résultats satisfaisants sans un filtrage des données. La deuxième utilise les gradients conjugués en 2D [7].

## 2. Génération de données numériques

Des données numériques sont produites et bruitées afin de tester les deux méthodes d'inversion. Les données sont générées en 2D selon un schéma Crank-Nicholson aux différences finies. Une source instationnaire est imposée dans un corps 2D « thermiquement mince » ( $\lambda = 0,2W/m.K$ ,  $\rho = 1200 kg/m^3$ ,  $C_p = 1213 J/kg.K$ ) de dimensions  $L=2,5cm$  x  $l=2,5cm$ . Les distributions spatiale et temporelle de cette source sont présentées sur les (**Figure1**). Les conditions aux limites en  $x=0$ ,  $x=L$ ,  $y=0$  et  $y=l$  sont de types adiabatiques. On produit un champ de température caractéristique de ce que l'on pourrait obtenir expérimentalement : Matrice 2D (128dx.128dy) avec 1000 pas de temps à 30Hz.

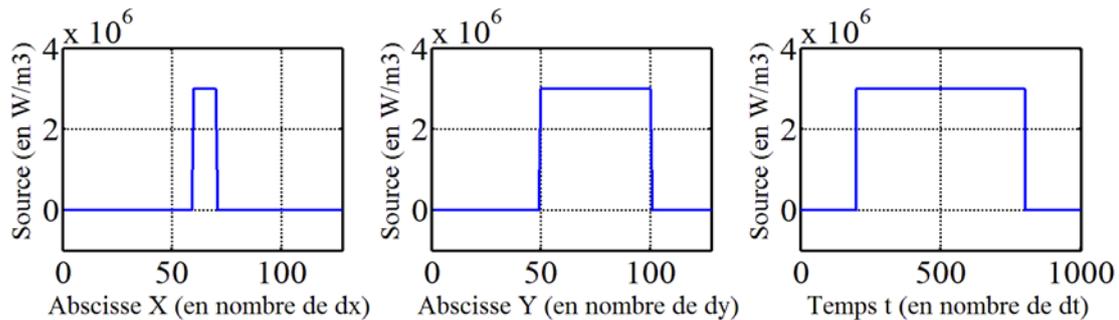


Figure1 – Coupes 1D selon  $Ox$ ,  $Oy$ , à  $t=750dt$  et Coupe 1D selon  $t$ , à  $x=80$  et  $y=65$

Le bruit ajouté au champ de température calculé est blanc, gaussien, centré en 0, et de l'ordre de grandeur de celui d'une caméra IR, à savoir  $\pm 0,2$  K. Les élévations de températures ainsi que les sources simulées sont similaires aux élévations de températures précédemment mesurées au cours d'un test de traction sur un composite (entre 20 et 60°C).

## 3. Méthodes d'estimation de sources

### 3.1. Méthode directe

#### 3.1.1. Description de la méthode

L'équation régissant la diffusion de la chaleur dans le matériau est :

$$\rho C_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T(x, y, t)) = S(x, y, t) \quad (1)$$

La résolution du problème inverse est basée sur une discrétisation selon un schéma implicite aux différences finies (Ordre 1 en temps et Ordre 2 en espace), et l'estimation du champ de termes sources se fait par identification des termes dérivés premières et secondes de la température. La discrétisation implicite permet la stabilité du schéma numérique et l'obtention d'une matrice 'opérateur' liant directement les causes (Conditions aux limites et

Sources) avec les conséquences (Champs de température). La discrétisation est faite de manière à ce que les sources recherchées soient à l'échelle du pixel. Le matériau est isotrope, thermiquement mince et les propriétés thermiques ne dépendent pas de la température. Aucun a priori sur la forme spatio-temporelle n'est donné. La température initiale est connue et uniforme  $T_{init} = 20^{\circ}\text{C}$ . On arrive à l'équation (2) par discrétisation de l'équation de diffusion de la chaleur (1) en faisant apparaître la diffusivité thermique  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p}$  : [9], [10]

$$[A]\{T\}^{N+1} = \{T\}^N + \{S\}^N \quad (2)$$

$[X]$  – Re présentation matricielle ;  $\{X\}$  – Re présentation vectorielle  
 $(N)$  – Indice temporel courant ;  $(N+1)$  – Indice temporel futur

Pour retrouver les termes sources, il suffit d'appliquer l'opérateur  $[A]$  sur le champ de température et de lui soustraire le champ de température au pas de temps précédent.

$$\{S\}^N = [A] \cdot \{T\}^{N+1} - \{T\}^N \quad (3)$$

Le calcul 'direct' demande donc une inversion de matrice, et le calcul 'inverse' (calcul du champ de termes sources 2D) ne requiert qu'un produit matrice vecteur et une soustraction. [9], [10]. Malgré tout, le bruit de mesure est amplifié par la matrice  $[A]$ , ce qui justifie un filtrage préalable des données d'entrée qui sera réalisé avec la décomposition en valeurs singulières (SVD).

### 3.1.2. Filtrage de données par décomposition en valeurs singulières SVD

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice rectangulaire  $X(M,N)$  (à savoir ici le champ de température 2d à un instant donné) est donnée par l'expression :

$$[X] = [U][S][V]^T \quad (4)$$

Cette décomposition mathématique [11] est une factorisation matricielle qui donne de manière directe une matrice rectangulaire  $S$  diagonale contenant les valeurs singulières de la matrice  $X$  (dans l'ordre décroissant). Il est alors possible de mettre en place un filtre passe-bas en tronquant ces modes à partir d'un certain rang. Les matrices  $U$  et  $V$  contiennent un ensemble de vecteurs orthonormés :  $U$  est la matrice des vecteurs propres de  $X^T X$  et  $V$  est la matrice des vecteurs propres de  $XX^T$ . La troncature d'une partie des valeurs singulières est un moyen de compresser les données d'entrées (matrice  $X$ ). Le filtrage est effectué sur des matrices 2D extraites de nos données  $T(x, y, t)$ . La première étape est une décomposition en valeurs singulières purement spatiale appliquée à chaque champ de température  $T(x, y)$  obtenu à chaque pas de temps. Cela nous donne un champ préfiltré  $T_{_f1}(x, y, t)$ . Ce champ est ensuite soumis à un deuxième processus de filtrage par SVD, en balayant l'axe  $Y$ , sur chaque matrices  $T_{_f1}(x, t)$  extraites ; on obtient ainsi le champ filtré  $T_{_f2}(x, y, t)$ . La troisième étape est aussi un filtrage SVD spatio-temporel, en balayant l'axe  $X$ , sur chaque matrice  $T_{_f2}(y, t)$  extraite. Dans le cadre de nos mesures simulées numériquement auxquelles un bruit de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma=0.2$ , le meilleur compromis est obtenu en conservant 17 valeurs singulières sur les matrices  $T(x, y)$ , 12 sur les matrices  $T_{_f1}(x, t)$  et 12 sur les matrices  $T_{_f2}(y, t)$ .

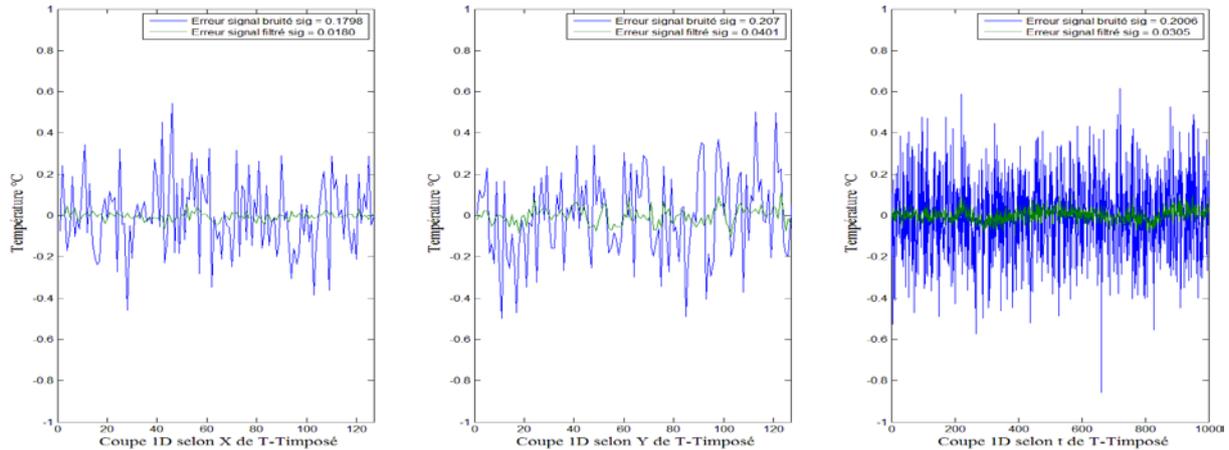


Figure2 - Coupe 1D (Ox, Oy, temps) des erreurs avec le signal parfait pour les signaux bruités et filtrés

Les nouveaux écarts-types du bruit de mesure résiduel (post-filtrage) sont présentés ci-dessous ainsi que le rapport de réduction du bruit selon les différents axes de la matrice de données :

$$\frac{SigX_{old}}{SigX_{new}} = \frac{0,1798}{0,018} = 9,98$$

$$\frac{SigY_{old}}{SigY_{new}} = \frac{0,207}{0,0401} = 5,16$$

$$\frac{Sig_t_{old}}{Sig_t_{new}} = \frac{0,2006}{0,0305} = 6,58$$

### 3.1.3. Résultat de l'estimation

Malgré cet effort de filtrage, l'estimation s'avère être décevante et les résultats inexploitable [Figure3]. C'est pourquoi afin de régulariser plus fortement notre estimation nous procédons à un sur-échantillonnage de nos données d'entrées (températures) suivi d'une moyenne temporelle glissante de nos données de sorties (champs de termes source obtenus par la première méthode inverse). L'estimation apparaît donc correcte pour une moyenne temporelle d'au moins 20 pas de temps (newdt=20.dt) [Figure4]. Cette méthode est donc très intéressante par sa rapidité d'exécution, sa simplicité, mais la précision de l'estimation requiert du matériel permettant une acquisition à haute fréquence et requiert également que le matériau étudié soit peu diffusif de sorte à ce qu'une moyenne identique faite sur le champ de température d'entrée soit également non biaisée ; c'est-à-dire qu'il faut que durant les 20 pas de temps nécessaires à la moyenne glissante, le champ de température n'ait quasiment pas changé.

## 3.2. Méthode des Gradients Conjugués (MGC)

### 3.2.1. Description de la méthode

La méthode des gradients conjugués consiste à résoudre le problème direct correspondant à notre expérience et de minimiser l'écart quadratique entre les résultats et les mesures de températures. La résolution successive d'un problème adjoint et d'un problème de sensibilité permet de déterminer respectivement la direction et la profondeur de descente. Le problème direct est défini par l'équation de diffusion de la chaleur présenté dans le paragraphe 3.1.1 (entrées : sources / sortie : températures).  $T_{init} = 20^{\circ}C$

### 3.2.2. Problème inverse

Le problème inverse consiste à estimer S afin de minimiser l'écart quadratique défini par le critère suivant :

$$J(S) = \frac{1}{2} \sum_1^{N_x N_y} \int_0^t (T_{calculé}(x, y, t, S) - T_{mesuré}(x, y, t, S))^2 dt \quad (5)$$

$T_{mesuré}$  – Température mesurée par thermographie IR

$T_{calculé}$  – Température caculée par résolution du problème direct

La méthode du gradient conjugué est une méthode itérative qui consiste à approcher le nouvel itéré S à partir de l'itéré précédent comme suit :

$$S^{it+1}(x, y, t) = S^{it}(x, y, t) - P_{descente}^{it} \cdot D_{descente}^{it}(x, y, t) \quad (6)$$

$S^{it}$  – Source estimée à l'itération it

$P_{descente}^{it}$  – Profondeur de descente calculée à l'itération it

$D_{descente}^{it}$  – Direction de descente calculée à l'itération it

La particularité de cette méthode est de construire la direction de descente  $D_{descente}^{it}$  de telle manière que les directions de descente successives soient conjuguées entre elles. Pour ce faire, la direction de descente à chaque itération est calculée comme suit :

$$D_{descente}^{it}(x, y, t) = \Psi^{it}(x, y, t) + \beta^{it} \cdot D_{descente}^{it-1}(x, y, t) \quad (7)$$

Avec  $\beta^{it}$  le coefficient de conjugaison défini par :

$$\beta^{it} = \frac{\iint [\Psi^{it}(x, y, t) \cdot (\Psi^{it}(x, y, t) - \Psi^{it-1}(x, y, t))] d\Omega dt}{\|\Psi^{it-1}(x, y, t)\|^2} \quad (8)$$

### 3.2.3. Problème adjoint et équation du gradient

Le problème adjoint permet d'obtenir l'expression du gradient du critère  $\nabla J$  afin de déterminer la direction de descente. On montre mathématiquement que dans notre cas d'estimation de sources le gradient du critère est égal aux multiplicateurs de Lagrange :  $\nabla J = \psi$

La résolution du problème adjoint permet de calculer les multiplicateurs de Lagrange :

$$\rho C_p \frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} \Psi(x, y, t)) = Err(x, y, t) \quad (9)$$

Ce problème est résolu de manière rétrograde en temps, on s'intéresse donc à une condition finale :  $\Psi(x, y, t_{final}) = 0$

Calcul des erreurs en sortie du calcul direct :

$$Err(x, y, z, t) = T_{calculé}(x, y, z, t) - T_{mesuré}(x, y, z, t) \quad (10)$$

### 3.2.4. Problème de sensibilités et profondeur de descente

La résolution du problème de sensibilités a pour but de donner les équations permettant d'obtenir la fonction de sensibilité en fonction des inconnues à estimer et ainsi de calculer la profondeur de descente  $P_{descente}^{it}$ , les équations du problème de sensibilités sont :

$$\frac{\partial \rho C_p \delta T(x, y, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} \delta T(x, y, t)) = D_{descente}(x, y, t) \quad (11)$$

Calcul de la profondeur de descente :

$$P_{descente}^{it} = \frac{\sum_1^{N_x \cdot N_y} \int_0^t (T_{calculé}^{it}(x, y, t) - T_{mesuré}(x, y, t)) \cdot \delta T^{it}(x, y, t) dt}{\sum_1^{N_x \cdot N_y} \int_0^t (\delta T^{it}(x, y, t))^2 dt} \quad (12)$$

### 3.2.5. Critère d'arrêt

En accord avec le « discrepancy principle », les itérations se poursuivent tant que le critère n'est pas inférieur ou égal à la valeur seuil définie par :

$$Seuil = \frac{1}{2} N_x \cdot N_y \cdot N_t \cdot \sigma^2 \quad (13)$$

$N_x, N_y, N_t$  – Nombre de points selon les axes  $X, Y, t$

$\sigma$  – Ecart type du bruit de mesure

Les problèmes rencontrés par ce type de méthode relèvent généralement de la convergence du calcul itératif, ou encore de la tendance de l'algorithme à 'expliquer' localement par la physique un bruit de mesure qui n'est pas physique.

Pour éviter une 'explication du bruit' de la part de l'algorithme, et accélérer les calculs, une astuce intéressante consiste à utiliser des données filtrées au préalable afin d'en réduire le bruit de mesure (filtrage identique à celui utilisé pour régulariser la méthode directe) et de nous baser sur un critère d'arrêt de l'algorithme local au pixel. Le passage à un critère dit 'local' modifie l'expression du seuil car il est propre à chaque pixel :

$$Seuil = \frac{1}{2} N_t \cdot \sigma^2 \quad (14)$$

Avec ici  $\sigma = 0,03K$

### 3.2.6. Optimisation du temps de calcul

L'ensemble des calculs sont effectués sur le logiciel Matlab. La simplicité de la géométrie du problème permet d'optimiser la durée des calculs. Les 3 problèmes direct, adjoint et sensible sont résolus par un schéma explicite aux différences finies. Ce schéma est préféré pour sa simplicité de résolution ; il est d'ailleurs possible de remplacer les produits matriciels par des produits simples terme à terme de par l'aspect lacunaire et tri-diagonal des matrices de transfert ce qui optimise encore la vitesse des calculs. Il faut simplement veiller à la stabilité

du schéma :  $Fo = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{4}$ ,  $\alpha = \text{diffusivité thermique}$

### 3.2.7. Résultat de l'estimation

La méthode des gradients conjugués est bien plus stable que la méthode directe présentée dans cet article [Figure3]. Une régularisation par moyenne glissante n'est donc pas nécessaire avec cette méthode comme le montre la [Figure4].

### 3.3. Comparatif méthode DIRECTE vs MGC

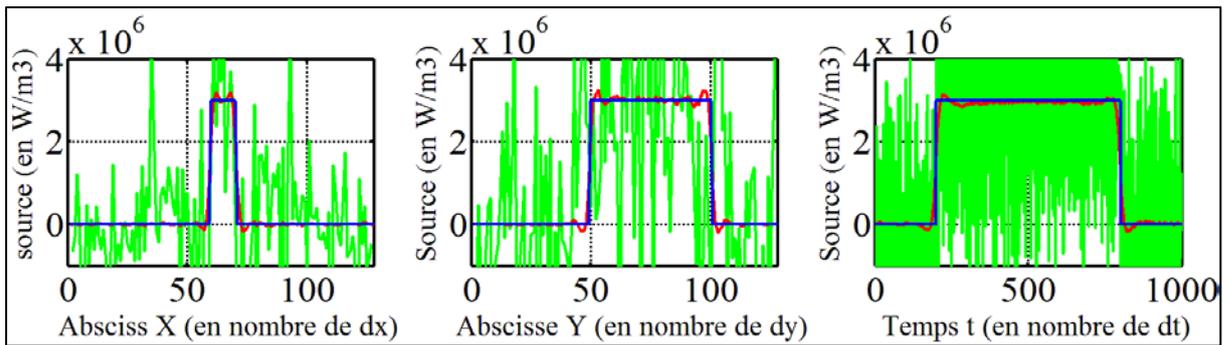


Figure3 - Estimations de sources en coupe 1D par méthode directe et itérative avec filtrage SVD & sans post-moyenne

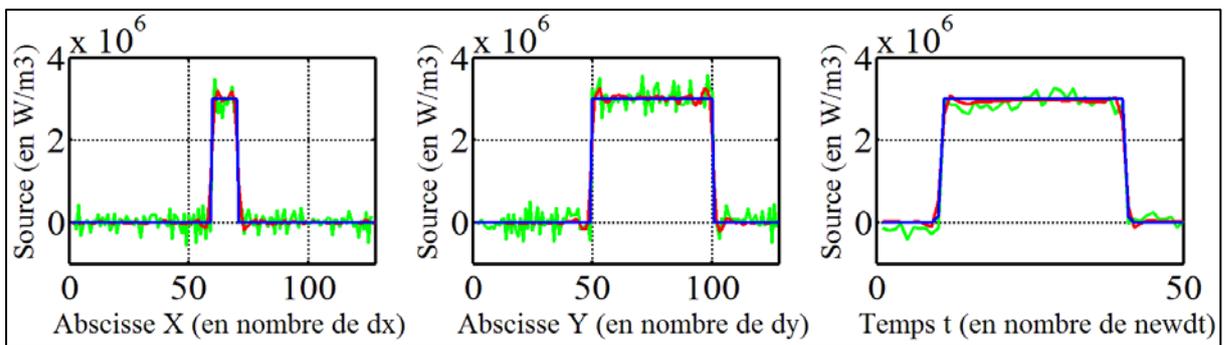
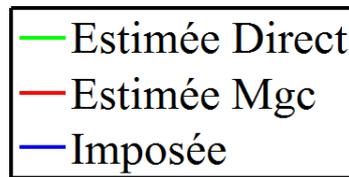


Figure4 - Estimations de sources en coupe 1D par méthode directe et itérative avec filtrage SVD & avec post-moyenne sur 20 pas de temps

La méthode directe est simple à mettre en place. En effet, le schéma implicite aux différences finies (inconditionnellement stable) discrétise seulement le temps à l'ordre 1 mais ne fait apparaître qu'un seul opérateur, l'inversion ne nécessite donc qu'un produit matrice-vecteur ; de plus cet opérateur matriciel possède un conditionnement faible ( $\sim 100$ ) ce qui limite l'amplification des perturbations aléatoires du signal d'entrée. Cette méthode est très intéressante à utiliser si le matériau étudié est peu diffusif et sous réserve d'avoir un matériel d'acquisition permettant un sur-échantillonnage des données d'entrées, car le résultat de l'estimation (avec schéma implicite, filtrage SVD et post-moyenne glissante) est quantitativement satisfaisant et également très rapide dans ces conditions d'utilisation. La méthode est également très performante pour la l'estimation des fronts violents tels que des créneaux.

La méthode du gradient conjugué reste beaucoup plus stable de manière générale. Il est important d'initialiser correctement la température du domaine lors de chaque résolution du problème direct, mais également de connaître le plus exactement possible les propriétés thermophysiques du matériau. Cette stabilité implique également une tendance (de par l'aspect diffusif de l'équation résolue) à atténuer les fronts violents de sources. Cependant, la convergence et l'estimation sont optimisées grâce notamment à la mise en place d'un critère de convergence local qui réduit le nombre d'itérations (à faible nombre d'itérations

l'estimation est stable mais très imprécise car la régularisation est trop importante) et à un filtrage des données d'entrée qui réduit l'écart-type du bruit de mesure et augmente le nombre d'itérations (afin de mieux s'approcher de la solution exacte) ; cette combinaison est un très bon compromis pour représenter les échelons de source tout en régularisant l'estimation.

L'optimisation de la programmation du schéma numérique dans les deux cas font d'elles des méthodes relativement rapide en termes de temps de calcul (5 minutes pour la méthode directe et ~ 1 heure pour la méthode itérative).

#### 4. Conclusion

Pour conclure, nous pouvons dire que la difficulté de la résolution d'un problème inverse réside dans la manière de le régulariser. A chaque configuration correspond une méthode ou une combinaison de méthode optimale. Il est préférable dans le cadre de l'estimation de sources de chaleur d'utiliser les gradients conjugués car cette méthode est intrinsèquement stable et que les optimisations à propos du critère d'arrêt, de la représentation des échelons et de la durée de calcul en font une méthode beaucoup plus générale.

Les durées d'exécution étant acceptables pour les deux méthodes (dans la configuration physique présentée dans cet article), il est possible d'envisager (lors d'un essai thermomécanique) d'utiliser les deux méthodes afin de vérifier la justesse des estimations et en déduire une analyse physique plus pertinente.

#### Références

- [1] A. Chrysochoos. Infrared thermography applied to the analysis of material behavior: a brief overview, *Quantitative InfraRed Thermography* 9 (2) pp 193-208, 2012
- [2] H.Louche, B.Wattrisse (2014) TICQ 2014 BORDEAUX « Identification de sources thermomécaniques »
- [3] N.Renault (2007) Thèse Institut National Polytechnique de Lorraine « Etude du couplage thermomécanique du PEHD par essais mécaniques et inversion d'images infrarouges »
- [4] A.Chrysochoos, H.Louche (1999) *International journal of engineering science* « An infrared image processing to analyze the calorific effects accompanying strain localization »
- [5] S. André, N. Renault, Y. Meshaka, and C. Cunat. From the thermodynamics of constitutive laws to thermomechanical experimental characterization of a semicrystalline polymer from IR imaging, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 24-1, pp 1-20, 2012.
- [6] J-L Gardarein (2007) – Thèse - « Analyse par thermographie infrarouge de la puissance déposée sur des surfaces recouvertes de carbone dans les tokamaks »
- [7] J. Gaspar (2013) – Thèse - « Fluxmétrie et caractérisation thermiques instationnaires des dépôts des composants face au plasma du Tokamak JET par techniques inverses »
- [8] A. Castillo (2015) – CFM 2015 – « Estimation de chaleur dans les matériaux minces »
- [9] C-Y.Yang (1997) *International journal of heat and mass transfer* « The determination of two heat sources in an inverse heat conduction problem »
- [10] C-Y.Yang (2005) *Applied mathematical modelling* « The determination of two moving heat sources in two-dimensional inverse heat problem »