

# Optimisation topologique 3D des systèmes de conduction de la chaleur

Talib DBOUK<sup>1\*</sup>, Jean-Luc HARION<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IMT, Mines-Douai, Énergétique Industrielle, F-59508 Douai, France. Université de Lille.

\* (auteur correspondant : [talib.dbouk@mines-douai.fr](mailto:talib.dbouk@mines-douai.fr))

**Résumé** - Les composants ou éléments de systèmes de conduction de la chaleur sont utilisés dans de très nombreuses applications telles que par exemple des plaques ou éléments de chauffage, des pièces de refroidissement de composants électroniques (faibles et fortes puissances), automobiles ... L'optimisation de ces éléments conductifs correspond à un besoin industriel important, d'une part pour une meilleure performance thermique et d'autre part pour une utilisation optimale de la matière conductrice utilisée qui représente, dans de nombreux cas, une contribution significative au coût global de production. Cette communication présente une première approche de définition de géométries optimales obtenues par optimisation topologique [1] d'un volume tridimensionnel de matières dans une configuration purement conductive.

## Nomenclature

$f_0$	fonction objectif à minimiser	$\varphi_{max}$	proportion maximale de matière conductrice
$k$	conductivité thermique, W/m.K	%	
$\dot{q}$	puissance volumique de chauffage, W/m <sup>3</sup>	<i>Indices et exposants</i>	
$T$	température K	1	matière de forte conductivité
$x$	variable de design $x_j \in [0, 1]$	0	matière de faible conductivité
<i>Symboles grecs</i>		$p$	paramètre d'interpolation
$\gamma$	rapport des conductivités thermiques des matériaux	$eff$	valeur effective locale

## 1. Introduction

L'optimisation des composants est une discipline très largement développée depuis bon nombre d'années dans les domaines de la mécanique du solide, de la mécanique des fluides ou de la thermique. Les premières méthodes développées ont porté sur l'optimisation de taille ou de forme, pour certaines basées sur des méthodes de plan d'expériences et de surfaces de réponse. Pour ces méthodes, les paramètres structurant la géométrie sont définis a priori et sont ensuite optimisés par rapport à un objectif. L'optimisation topologique est quant à elle une méthode sensiblement plus récente et radicalement différente des méthodes d'optimisation de tailles ou de formes [2, 6].

Les premiers développements ont été initiés en mécanique du solide en visant notamment une répartition optimale de matière solide homogénéisant au mieux les contraintes liées aux efforts appliqués à une structure. Concernant l'optimisation des composants thermiques, les développements portant sur des configurations impliquant un couplage conducto-convectif sont à ce jour très peu nombreux [2, 7]. Toutefois, de très nombreuses configurations applicatives de composants thermiques concerne des systèmes purement conductifs. Pour ces configurations

conductives, quelques études ont été publiées, principalement en configurations bidimensionnelles [10, 8], et plus rarement en configurations tridimensionnelles [4, 5].

Par rapport aux autres méthodes d'optimisation, l'optimisation topologique se différencie notamment sur deux points particuliers. Le premier est lié au fait que pour cette méthode, aucune information ou contrainte géométrique n'est imposée a priori en dehors des limites géométriques du domaine et des conditions sur ces limites. Le second point particulier est que pour cette méthode, à partir d'une répartition initiale quelconque de matière, les paramètres de contrôle (principalement basés sur la variable de design) permettent d'aboutir à des architectures optimisées de matière présentant des trous ou des agglomérats de matière sans aucune limitation sur les connexions ou non entre les sous-ensembles.

Ces deux points imposent une complexité significative de la méthode liée au très grand nombre de degrés de liberté imposé par la variable de design associée à chaque cellule de maillage de discrétisation du problème.

D'autre part, si la complexité des géométries optimisées par cette méthode peut dans certains cas poser un problème de réalisation par des techniques classiques de fabrication, elle est parfaitement adaptée aux structures géométriques accessibles par fabrication de pièces grâce à la technologie émergente de fabrication additive (imprimantes métalliques 3D) [11].

## 2. Configuration étudiée

La configuration étudiée est un cube tridimensionnel de volume  $L^3 = 1\text{m}^3$  (Figure1). Ce volume est constitué de deux matériaux. Le premier matériau présente un coefficient de conductivité thermique  $k_1(\text{W/m.K})$  beaucoup plus élevé que le second de conductivité  $k_0$  avec ( $\gamma = k_1/k_0; \gamma > 1$ ).

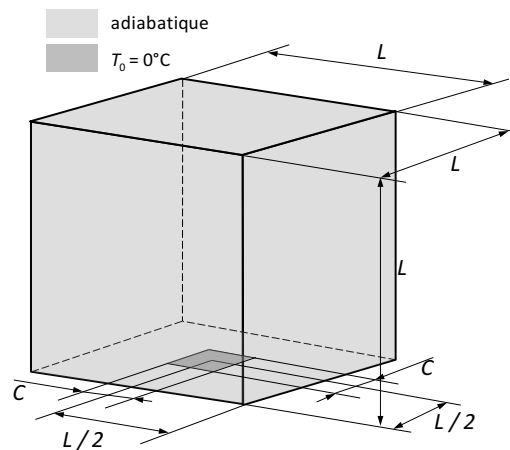


Figure 1 Configuration tridimensionnelle étudiée.

Le cube est chauffé par une puissance volumique différenciée en fonction de la nature du matériau, c'est-à-dire en fonction de la valeur de la variable de design (voir équation 4) :  $\dot{q}_1 = 0\text{W/m}^3$  et  $\dot{q}_0 = 1\text{W/m}^3$ . La puissance volumique de chauffage est contenue dans le matériau faiblement

conducteur. L'ensemble des surfaces externes du cube est supposé adiabatique sauf la part centrale de la surface inférieure  $C^2$  ( $C = \frac{L}{10}$ ). Pour cette surface  $C$  une condition de température imposée  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  est fixée (Figure 1).

La quantité maximale de matière conductrice est fixée à  $\varphi_{max} = 25\%$  (pourcentage de volume de matière conductrice dans le volume total) pour les différents résultats présentés. La fonction objectif retenue pour cette étude est de minimiser la température moyenne (c.à.d. maximiser l'évacuation de chaleur) dans ce domaine cubique chauffé pour cette quantité de matière conductrice maximale.

L'objectif de l'étude présentée est de définir l'évolution des organisations optimales de matière conductrice lorsque le rapport des conductivités  $\gamma = k_1/k_0$  évolue.

Dans cette étude, nous avons étudié trois valeurs de  $\gamma$  : 10, 100 et 1000.

### 3. Algorithmes et méthodes numériques

La méthode des volumes finis couplée à une méthode d'adjoint continu a été appliquée dans ce travail pour discrétiser l'équation de la chaleur (équation de Laplace 3D stationnaire) et pour calculer la sensibilité de la fonction objectif aux variables de design. L'algorithme d'optimisation topologique MMA (Method of Moving Asymptotes) introduit par Svanberg [9] et modifiée dans [3] a été utilisé pour rechercher les structures optimales. La méthode MMA est basée sur la réécriture du problème d'optimisation avec contraintes en un problème d'optimisation sans contrainte, uniquement dédié à la minimisation de la fonction objective. Les contraintes sont ajoutées à la fonction objectif en utilisant des multiplicateurs de Lagrange [3]. La méthode d'adjoint continu est utilisée pour calculer la sensibilité de la fonction objectif par rapport aux variables de design. L'évolution vers la solution est itérative et associée à la génération de sous-problèmes résolus avec la méthode de Newton. Les itérations successives sont arrêtées quand le critère de convergence sur la fonction objectif est satisfait.

Sur le domaine étudié, un maillage uniforme de  $N = 64 \times 64 \times 64$  mailles a été appliqué au domaine global.

Le problème peut alors être formulé par les différentes équations suivantes :

$$\text{Minimiser } f_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i \text{ pour :}$$

$$\nabla \cdot (k_{eff} \nabla T) + \dot{q}_{eff} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \leq \varphi_{max} \quad (2)$$

$$k_{eff} = k_0 + \mathbf{x}_j^p (k_1 - k_0) \quad (3)$$

$$\dot{q}_{eff} = \dot{q}_0 + \mathbf{x}_j^p (\dot{q}_1 - \dot{q}_0) \quad (4)$$

Les équations 3 et 4 représentent les ajustements locaux de la conductivité et de la source de chaleur basés sur la variable de design  $\mathbf{x}$ . Ces grandeurs effectives sont recalculées à chaque évolution de la variable de design. A partir de la structure initiale du cube (répartition initiale

de  $\mathbf{x}$ ), la ségrégation entre les deux matériaux est produite par l'augmentation progressive de  $p$  dans ces équations,  $p$  représentant une pénalisation différenciant de façon de plus en plus marquée les deux matériaux pour tendre vers une différenciation  $\mathbf{x}_j = 0$  ou  $\mathbf{x}_j = 1$ . Cette méthode (SIMP : Solid Isotropic Material with Penalization) est largement développée dans les algorithmes d'optimisation topologiques [1]. Un avantage important du code développé par rapports aux développements identifiés dans la bibliographie est qu'il sera rapidement possible de prendre en compte des maillages tridimensionnels non structurés et non uniformes. Actuellement, à notre connaissance, tous les développements réalisés sont basés sur des discrétisations spatiales structurées et uniforme, ce qui peut rapidement représenter un point bloquant pour traiter de façon satisfaisante des problèmes d'optimisation topologique appliqués à des configurations industrielles.

#### 4. Résultats

Les performances thermiques peuvent être définies par les deux paramètres adimensionnels suivants basées sur les travaux de [5] :

$$\tau_{max} = \frac{(T_{max} - T_0)k_1}{\dot{q}_1 L^2} \quad (5)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sum_{j=1}^N (\mathbf{x}_j^2 - \mathbf{x}_j)}{N(\varphi_{max}^2 - \varphi_{max})} \quad (6)$$

Le paramètre  $\tau_{max}$ , basé sur la température maximale à l'intérieur du domaine, traduit la performance thermique de refroidissement de la structure optimisée. De faibles valeurs de  $\tau_{max}$  indiquent une bonne performance de refroidissement thermique de l'architecture du matériau conducteur, tandis que des valeurs plus élevées représentent de moins bonnes performances.

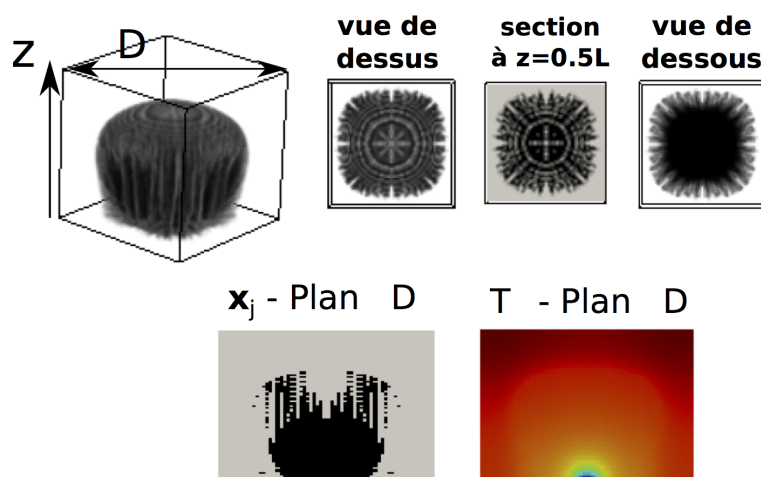


Figure 2 Architecture optimale de matière conductive et répartition de température associée pour  $\gamma = 10$ .

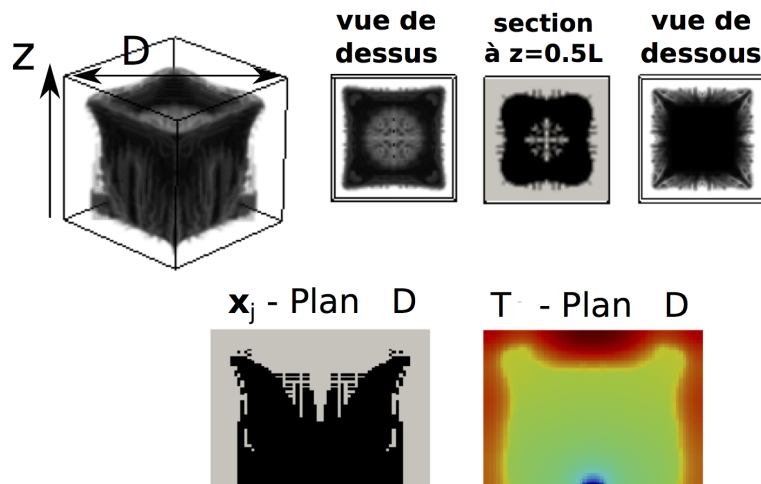


Figure 3 Architecture optimale de matière conductive et répartition de température associée pour  $\gamma = 100$ .

Le second paramètre,  $\varepsilon$ , est quant à lui un indicateur de qualité de la ségrégation obtenue entre les deux matériaux. Une valeur très proche de 1 indique qu'une très bonne différenciation est obtenue entre les deux matériaux.

Les figures 2 à 4 montrent les topologies obtenues respectivement pour  $\gamma = 10$ ,  $\gamma = 100$ , et  $\gamma = 1000$ . Ces figures présentent également les trois champs de température dans les sections diagonales  $D$ .

Ces figures montrent d'une part une influence très marquée de  $\gamma$  sur les géométries finales obtenues. L'augmentation du rapport des conductivités conduit à des configurations présentant plus de branches conductrices dans le domaine.

Les champs de température (représentés aux mêmes échelles) montrent également très nettement une meilleure performance par rapport à l'objectif de diminution de température moyenne pour une valeur plus élevée de  $\gamma$ .

Ce point est illustré par la figure 5 représentant les paramètres  $\tau_{max}$  et  $\varepsilon$ .  $\tau_{max}$  diminue de façon très importante en fonction de  $\gamma$  pour atteindre, pour  $\gamma = 1000$ , une valeur très proche de 0, qui est la condition de température imposée au puits  $C$ .

Pour les trois configurations, des valeurs de  $\varepsilon$  proches de l'unité sont obtenues (voir figure 5). On peut cependant remarquer que le meilleur taux de ségrégation ( $\varepsilon = 0,99$ ) est obtenu pour  $\gamma = 10$ . La différenciation discrète 0-1, qui traduit le changement de matière et donc obtenue avec une très bonne précision géométrique.

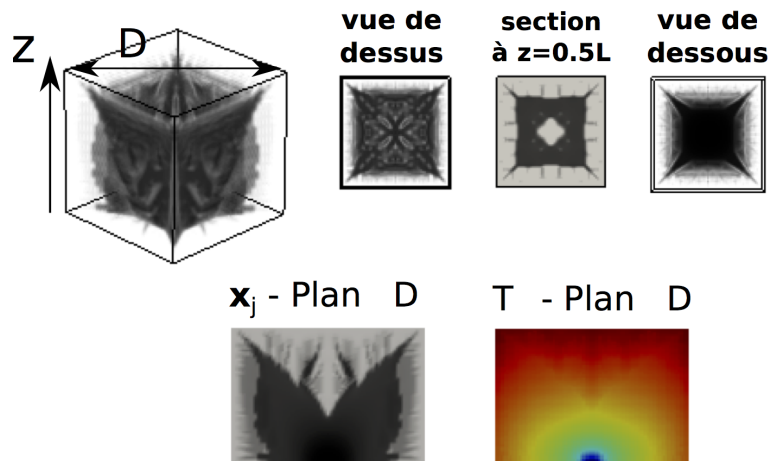


Figure 4 Architecture optimale de matière conductive et répartition de température associée pour  $\gamma = 1000$ .

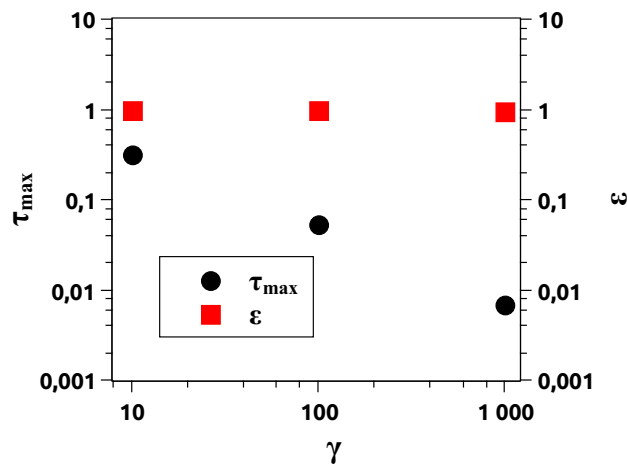


Figure 5 Performance thermique en fonction de  $\gamma$ .

## 5. Conclusion et Perspectives

Nous avons couplé la méthode de volume finis avec un algorithme avancé d'optimisation topologique [3] basé sur la méthode MMA (Method of Moving Asymptotes) de Svanberg [9]. Les outils et méthodes développés ont été appliqués au problème de conduction de la chaleur pour trouver des structures optimales de matériau conducteur dans un bloc cubique tridimensionnel chauffé par une puissance volumique. La quantité de matière conductrice est fixée à 25% du volume total. Trois différentes structures optimales ont été obtenues pour des trois valeurs de  $\gamma = \frac{k_1}{k_0}$  testées : 10, 100 et 1000 et les performances thermiques associées ont été quantifiées. Deux perspectives importantes sont associées à cette pré-étude. Tout d'abord, comme évoqué précédemment, les outils développés permettront très rapidement de prendre en compte des maillages tridimensionnels non structurés et non homogènes, ce qui permettra d'appliquer cette méthode d'optimisation à des configurations géométriques complexes, plus en phase avec des applica-

tions industrielles. La seconde perspective en cours de développement sera de coupler la convection à la conduction pour traiter des applications d'optimisation topologique tridimensionnelle en configurations conducto-convectives.

## Références

- [1] M. Bendsøe et O. Sigmund. *Topology Optimization : Theory, Methods and Applications*. Numéro ISBN : 3-540-42992-1. 2d édition, 2004.
- [2] T. Dbouk. *Topology Optimization of Heat and Mass Transfer Systems : A Review*. Soumis au, *Journal of Heat Transfer*, 2016.
- [3] T. Dbouk et J-L. Harion. *Performance of Optimization Algorithms applied to large nonlinear constrained problems*. *American Journal of Algorithms and Computing*, 2(1), pages 32– 56, 2015.
- [4] E.M. Dede. *Multiphysics Topology Optimization of Heat Transfer and Fluid Flow Systems*. Dans *Proceedings of the COMSOL® Conference*, Boston, USA., 2009.
- [5] J. Dirker et J.P. Meyer. *Topology Optimization for an Internal Heat-Conduction Cooling Scheme in a Square Domain for High Heat Flux Applications*. *Journal of Heat Transfer*, 135(11), pages 111010, 2013.
- [6] G. Marck. *Optimisation Topologique des Transferts de Chaleur et de Masse : Application aux Échangeurs de Chaleur*. Thèse de Doctorat, MINES ParisTech - Mines Douai, 2012.
- [7] G. Marck, M. Nemer, et J-L. Harion. *Topology Optimization of Heat and Mass Transfer Problems : Laminar Flow*. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 63(6), pages 508–539, 2013.
- [8] G. Marck, M. Nemer, J-L. Harion, S. Russeil, et D. Bougeard. *Topology Optimization Using the SIMP Method for Multiobjective Conductive Problems*. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 61(6), pages 439–470, 2012.
- [9] K. Svanberg. *The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pages 359–373, 1987.
- [10] X. Xianghua, L. Xingang, et R. Jianxun. *Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms*. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50, pages 1675–1682, 2007.
- [11] T. Zegard et G. H. Paulino. *Bridging topology optimization and additive manufacturing*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pages 1–18, 2015.