

Modèles réduits linéaires paramétriques de transferts conducto-radiatifs sous approximation P1.

Parametric linear reduced order models of conducto-radiative transfers under P1 approximation.

Yang LIU^{1,2}, Manuel GIRAULT^{2*}, Adel BENSELAMA², Yann BILLAUD², Didier SAURY², Denis LEMONNIER²

¹Civil Aviation University of China, 2898 rue Jin Bei – Tianjin, Chine

²Institut Pprime UPR CNRS 3346 – CNRS / ENSMA / Université de Poitiers, 1 avenue Clément Ader – 86961 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

* (auteur correspondant : manuel.girault@ensma.fr)

Résumé – Dans le cadre de la caractérisation des propriétés thermophysiques de matériaux semi-transparents pour lesquels les transferts radiatifs peuvent être modélisés par l’approximation P1, cette étude présente le développement, la construction et la validation de modèles linéaires conducto-radiatifs d’ordre réduit explicitement paramétrés par la conductivité thermique et le coefficient d’absorption effectif. Ces modèles sont construits par la Méthode d’Identification Modale (MIM) à partir de simulations issues d’un modèle de référence. Dans l’application proposée, celui-ci est un modèle bidimensionnel axisymétrique instationnaire destiné à modéliser une expérience de type « méthode flash ».

Mots-clés : milieu semi-transparent, propriétés thermophysiques, conduction, rayonnement, méthode d’identification modale.

Nomenclature

a fonction vectorielle du temps
 C_p capacité thermique massique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
 G flux radiatif incident, $W.m^{-2}$
 h coefficient d’échange, $W.m^{-2}.K^{-1}$
 $J_{id}^{(m)}$ fonctionnelle d’écart à minimiser pour l’identification du MR d’ordre m , K^2
 k_{th} conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
 m ordre du MR, i.e. nombre de ddl
 n indice de réfraction
 T température, K
 t temps, s
 X fonction vectorielle du temps dans les MR
 x position dans l’espace

Symboles grecs
 φ densité de flux de chaleur imposée, $W.m^{-2}$
 ϕ fonction vectorielle de l’espace
 κ coefficient d’absorption effectif, m^{-1}
 ρ masse volumique, $kg.m^{-3}$
 σ constante de Stefan-Blotzmann, $W.m^{-2}.K^{-4}$
ou écart quadratique moyen, K (selon contexte)
Indices et exposants
 G ou (G) relatif au flux radiatif incident
 id/val identification/validation des MR
 T ou (T) relatif à la température
0 configuration nominale

1. Introduction

Les matériaux semi-transparents sont largement utilisés dans les secteurs de l’industrie et des transports. On peut citer les revêtements utilisés comme isolant thermique autour de certaines pièces métalliques dans les moteurs d’avions [1], les vitres de cockpit ou les pare-brise, ou encore les matériaux composites utilisés pour la construction des avions [2]. La méthode flash permet de mesurer la diffusivité thermique, de laquelle on peut déduire la conductivité thermique. La spectrométrie permet d’estimer le coefficient d’absorption effectif. D’autres outils peuvent être employés pour estimer les propriétés thermophysiques de tels

matériaux. La plupart de ces outils s'appuient sur les méthodes inverses qui consistent à minimiser la différence entre des données mesurées sur un dispositif expérimental et les grandeurs correspondantes issues d'un modèle simulant l'expérience [3], soit par des méthodes de type gradient classiques, soit par des algorithmes évolutionnaires (PSO [4], algorithme génétique, etc.). En raison de leur forte capacité d'apprentissage, d'imitation et de prédiction, les réseaux de neurones artificiels ont le potentiel de rivaliser avec les méthodes inverses traditionnelles pour l'estimation des paramètres inconnus [5]-[6].

La résolution d'un problème inverse, tout comme l'entraînement d'un réseau de neurones artificiels, requiert un modèle permettant de simuler les phénomènes mis en jeu. Celui-ci s'appuie généralement sur une discrétisation spatiale du domaine (par éléments finis, volumes finis, etc.). On dispose alors d'un modèle détaillé (MD), précis mais de grande taille. Avec un tel modèle, l'estimation des paramètres thermophysiques peut s'avérer coûteuse en termes de temps de calcul, en particulier lorsque la résolution du problème inverse requiert une procédure itérative, ce qui est fréquent. Un modèle d'ordre réduit ou modèle réduit (MR) est composé d'un petit nombre de degrés de liberté, notamment par rapport aux modèles classiques issus d'une discrétisation spatiale des équations du problème [7]. Un MR permet donc de réduire le temps de calcul par rapport au MD de référence, pour des simulations directes comme pour la résolution de problèmes inverses.

Nous nous plaçons ici dans le cadre des transferts par conduction et rayonnement dans des milieux semi-transparents gris pour lesquels les transferts radiatifs peuvent être modélisés par l'approximation P1 [8]. L'objectif de ces travaux est de développer une formulation de modèle réduit linéaire permettant de calculer très rapidement et avec une précision suffisante l'évolution de la température en tout ou partie du domaine en fonction de conditions aux limites variables, avec pour paramètres explicites la conductivité thermique k_{th} et le coefficient d'absorption effectif κ du matériau. Une fois les équations du problème posées, la formulation des modèles réduits est présentée. La construction des modèles réduits par la Méthode d'Identification Modale (MIM) [7] est ensuite décrite. Enfin, l'approche est appliquée à une configuration de type « méthode flash » pour laquelle le modèle de référence est un modèle bidimensionnel axisymétrique instationnaire basé sur la méthode des volumes finis [9].

2. Equations du problème

2.1. Equations de conservation locales

On considère les transferts de chaleur par conduction et rayonnement à travers un milieu semi-transparent gris, homogène, isotrope, absorbant, émettant et non-diffusant avec des frontières noires. Le domaine est noté Ω et sa frontière Γ . Le problème peut être *a priori* 1D, 2D ou 3D. Le flux de chaleur par conduction est supposé suivre la loi de Fourier et l'approximation P1 [8] est utilisée pour le flux radiatif : $\vec{q}_{rad} = -\frac{1}{3\kappa}\vec{\nabla}G(x, t)$ où G est le rayonnement incident et κ est le coefficient d'absorption effectif. L'équation de conservation de l'énergie et l'équation de transfert radiatif s'écrivent alors respectivement :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} T(x, t)) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3\kappa} \vec{\nabla} G(x, t) \right) \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3\kappa} \vec{\nabla} G(x, t) \right) = \kappa(G(x, t) - 4n^2 \sigma T^4(x, t)) \quad (2)$$

La masse volumique ρ , la capacité thermique massique C_p , la conductivité thermique k_{th} , le coefficient d'absorption effectif κ et l'indice de réfraction n sont supposés uniformes dans le milieu et indépendants de la température.

2.2. Conditions aux limites

La condition aux limites thermique s'écrit sous la forme générale :

$$k_{th}\vec{\nabla}T \cdot \vec{n} + \frac{1}{3\kappa}\vec{\nabla}G \cdot \vec{n} = \gamma(x)\varphi(t) + h(x)(T_a - T(x,t)) \quad \forall x \in \Gamma, \forall t \in [0; t_f] \quad (3)$$

où $\varphi(t)$ est une densité de flux de chaleur imposée, $\gamma(x)$ est une fonction support permettant d'appliquer $\varphi(t)$ de manière différenciée sur la frontière, $h(x)$ est la distribution de coefficient d'échange et T_a la température ambiante. Il est ainsi possible de définir différentes parties de la frontière Γ , chacune avec une condition de Fourier ($\gamma = 0$), une condition de Neumann ($\gamma = 1$ et $h = 0$) ou une condition mixte.

La condition aux limites radiative s'écrit [8] :

$$\frac{2}{3}\vec{\nabla}G \cdot \vec{n} + \kappa G = 4\kappa n^2 \sigma T^4 \quad \forall x \in \Gamma, \forall t \in [0; t_f] \quad (4)$$

2.3. Linéarisation autour d'une configuration nominale

On considère un état stationnaire correspondant à des champs de température $T_0(x)$ et de rayonnement incident $G_0(x)$ résultant de l'application d'une densité de flux constante φ_0 . On suppose de petites variations autour de cette configuration nominale : ainsi $T(x, t) = T_0(x) + \delta T(x, t)$ et $G(x, t) = G_0(x) + \delta G(x, t)$ résultent de la densité de flux $\varphi(t) = \varphi_0 + \delta\varphi(t)$.

L'équation de l'énergie pour δT et δG s'écrit immédiatement :

$$\rho C_p \frac{\partial \delta T}{\partial t}(x, t) = \vec{\nabla} \cdot (k_{th} \vec{\nabla} \delta T(x, t)) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3\kappa} \vec{\nabla} \delta G(x, t) \right) \quad (5)$$

Compte-tenu de l'hypothèse de petites variations δT , les termes non-linéaires, i.e. les termes en δT de degré supérieur à 1, sont négligés. On obtient l'équation de transfert radiatif linéarisée :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3\kappa} \vec{\nabla} \delta G(x, t) \right) = \kappa \left(\delta G(x, t) - 16n^2 \sigma (T_0(x))^3 \delta T(x, t) \right) \quad (6)$$

On peut justifier une telle linéarisation même pour $T_0=300$ K et $\delta T \approx 30$ K. Pour ces valeurs, les termes en δT et $(\delta T)^2$ dans le développement de $(T_0 + \delta T)^4$ avec la formule du binôme sont $4(T_0)^3 \delta T = 3,24 \cdot 10^9$ K⁴ et $6(T_0)^2 (\delta T)^2 = 4,86 \cdot 10^8$ K⁴.

Les conditions aux limites du problème linéarisé pour δT et δG s'écrivent :

$$k_{th}\vec{\nabla}\delta T(x, t) \cdot \vec{n} + \frac{1}{3\kappa}\vec{\nabla}\delta G(x, t) \cdot \vec{n} = \gamma(x)\delta\varphi(t) - h(x)\delta T(x, t) \quad (7)$$

$$\frac{2}{3}\vec{\nabla}\delta G(x, t) \cdot \vec{n} + \kappa\delta G(x, t) = 16\kappa n^2 \sigma (T_0(x))^3 \delta T(x, t) \quad (8)$$

A partir de maintenant, nous travaillerons avec les équations (5) à (8).

Les conditions initiales sont $\delta T(x, t = 0) = 0$ et $\delta G(x, t = 0) = 0$, correspondant à $\delta\varphi(t = 0) = 0$. L'état stationnaire nominal peut être choisi comme celui pour lequel le milieu est à la température ambiante T_a : on a alors $\varphi_0 = 0$, $T_0(x) = T_a$ et $G_0(x) = 4n^2 \sigma T_a^4$.

3. Modèles d'ordre réduit linéaires paramétriques

3.1. Approximation des champs de température et de flux radiatif incident

De façon à séparer le temps et l'espace dans les MR, les champs de variation de température $\delta T(x, t)$ et de variation de rayonnement incident $\delta G(x, t)$ sont approchés par des sommes de produits de fonctions de l'espace et de fonctions du temps :

$$\delta T(x, t) \approx \sum_{i=1}^m \phi_i^{(T)}(x) a_i^{(T)}(t) \quad (9)$$

$$\delta G(x, t) \approx \sum_{i=1}^m \phi_i^{(G)}(x) a_i^{(G)}(t) \quad (10)$$

Les fonctions spatiales $\phi_i^{(T)}(x)$ et $\phi_i^{(G)}(x)$, $i \in [1; m]$, constituent deux troncatures de bases orthonormées de l'espace $\mathcal{L}_2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable sur Ω , muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv d\Omega$. Notre objectif est de construire des modèles réduits, c'est-à-dire des modèles comportant un petit nombre m de fonctions d'approximation.

3.2. Projections de Galerkin des équations de conservation locales

La projection de Galerkin de l'équation de l'énergie (5) consiste à forcer le résidu $\mathcal{R}_E(x, t)$ de (5), écrit avec (9) et (10), à être orthogonal à chaque $\phi_k^{(T)}(x)$, $k \in [1; m]$, de manière à ce que la projection du résidu sur le sous-espace de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ engendré par les $\phi_k^{(T)}(x)$ soit nulle :

$$\langle \mathcal{R}_E, \phi_k^{(T)} \rangle = \underbrace{\int_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial \delta T}{\partial t} \phi_k^{(T)} d\Omega}_J - \underbrace{\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left(k_{th} \vec{\nabla} \delta T + \frac{1}{3\kappa} \vec{\nabla} \delta G \right) \phi_k^{(T)} d\Omega}_D = 0 \quad \forall k \in [1; m] \quad (11)$$

De manière similaire, la projection de Galerkin de l'équation (6) s'écrit :

$$\langle \mathcal{R}_R, \phi_k^{(G)} \rangle = \underbrace{\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{3\kappa} \vec{\nabla} \delta G \right) \phi_k^{(G)} d\Omega}_L - \underbrace{\int_{\Omega} \kappa (\delta G - 16n^2 \sigma(T_0)^3 \delta T) \phi_k^{(G)} d\Omega}_N = 0 \quad \forall k \in [1; m] \quad (12)$$

Les étapes suivantes, non détaillés ici, sont ensuite effectuées :

- Les termes D et L sont intégrés par parties en utilisant la formule de Green $\int_{\Omega} f \vec{\nabla} \cdot \vec{u} d\Omega = \int_{\Gamma} f \vec{u} \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f d\Omega$;
- La condition aux limites thermique (7) et la condition aux limites radiative (8) sont respectivement introduites dans les termes de frontière des équations (11) et (12) ;
- Les approximations (9) et (10) sont introduites dans les termes où apparaissent δT et δG , en tenant compte de l'orthonormalité des fonctions $\phi_k^{(T)}(x)$ et $\phi_k^{(G)}(x)$, $k \in [1; m]$.

Après avoir sorti des intégrales la conductivité thermique k_{th} et le coefficient d'absorption effectif κ de manière à les faire apparaître comme des paramètres explicites, les projections (11) et (12) peuvent s'écrire respectivement :

$$\frac{da^{(T)}(t)}{dt} = (k_{th} M_{Td} + M_{Th}) a^{(T)}(t) + \frac{1}{\kappa} M_{Tg} a^{(G)}(t) + V \delta \varphi(t) \quad (13)$$

$$\left(\frac{1}{\kappa} M_{G0} + \kappa I_m + M_{G2} \right) a^{(G)}(t) = (\kappa M_{GT1} + M_{GT2}) a^{(T)}(t) \quad (14)$$

où les composantes des différentes matrices et du vecteur V s'écrivent, $\forall (k, i) \in [1; m]^2$:

$$(M_{Td})_{ki} = -\frac{1}{\rho c_p} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \phi_i^{(T)}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi_k^{(T)}(x) d\Omega, \quad (M_{Th})_{ki} = -\frac{1}{\rho c_p} \int_{\Gamma} h(x) \phi_i^{(T)}(x) \phi_k^{(T)}(x) d\Gamma,$$

$$(M_{Tg})_{ki} = -\frac{1}{3\rho c_p} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \phi_i^{(G)}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi_k^{(T)}(x) d\Omega, \quad V_k = \frac{1}{\rho c_p} \int_{\Gamma} \gamma(x) \phi_k^{(T)}(x) d\Gamma,$$

$$(M_{G0})_{ki} = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \phi_i^{(G)}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi_k^{(G)}(x) d\Omega, \quad (M_{G2})_{ki} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \phi_i^{(G)}(x) \phi_k^{(G)}(x) d\Gamma, \quad (M_{GT1})_{ki} =$$

$$16 \int_{\Omega} n^2 \sigma(T_0(x))^3 \phi_i^{(T)}(x) \phi_k^{(G)}(x) d\Omega, \quad (M_{GT2})_{ki} = 8 \int_{\Gamma} n^2 \sigma(T_0(x))^3 \phi_i^{(T)}(x) \phi_k^{(G)}(x) d\Gamma$$

3.3. Formulation finale des modèles réduits linéaires paramétriques

Les matrices M_{Td} et M_{G0} étant symétriques, on effectue un changement de variables avec pour matrices de passage les matrices orthogonales dont les colonnes forment respectivement un jeu de vecteurs propres de M_{Td} et M_{G0} . De plus, nous allons chercher les modèles réduits sous la forme particulière suivante des équations (13) et (14), garantissant ainsi la stabilité du modèle quelles que soient les valeurs de k_{th} et κ :

$$\frac{dX^{(T)}(t)}{dt} = (k_{th}D_T + S_T)X^{(T)}(t) + \frac{1}{\kappa}A_{TG}X^{(G)}(t) + B\delta\varphi(t) \quad (15)$$

$$\left(\frac{1}{\kappa}D_G + \kappa I_m + S_G\right)X^{(G)}(t) = -(\kappa + 1)[A_{TG}]^T X^{(T)}(t) \quad (16)$$

$D_T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $D_G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont diagonales, $S_T = -[U_T]^T U_T$ et $S_G = [U_G]^T U_G$ avec $U_T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $U_G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ triangulaires supérieures, $A_{TG} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est orthogonale, $B \in \mathbb{R}^m$.

Les équations couplées (15) et (16) permettent le calcul des vecteurs d'état réduits $X^{(T)}(t) \in \mathbb{R}^m$ et $X^{(G)}(t) \in \mathbb{R}^m$ en fonction de $\delta\varphi(t)$ et des paramètres explicites k_{th} et κ .

Les températures aux positions x_j , $j \in [1; N_{obs}]$ constituent les observables regroupés dans le vecteur $\delta T_{obs} \in \mathbb{R}^{N_{obs}}$. On définit $C \in \mathbb{R}^{N_{obs} \times m}$ telle que $C_{ji} = \phi_i^{(T)}(x_j)$. D'après (9) :

$$[\delta T_{obs}]_j(t) = \delta T(x_j, t) = \sum_{i=1}^m \phi_i^{(T)}(x_j) a_i^{(T)}(t) = \sum_{i=1}^m C_{ji} a_i^{(T)}(t) \quad \forall j \in [1; N_{obs}]$$

Soit, sous forme matricielle : $\delta T_{obs}(t) = C a^{(T)}(t)$. Le changement de variable mène à :

$$\delta T_{obs}(t) = H X^{(T)}(t) \quad (17)$$

où $H \in \mathbb{R}^{N_{obs} \times m}$. L'équation (17) permet le calcul de δT_{obs} à partir de $X^{(T)}$. La condition initiale $\delta T_{obs}(0) = 0$ implique $X^{(T)}(0) = 0$ d'après (17). On a alors $X^{(G)}(0) = 0$ d'après (16). L'équation (15) en régime permanent initial est alors satisfaite pour $\delta\varphi(0) = 0$. Notons que le cas de plusieurs densités de flux indépendantes peut être aisément traité.

3.4. Construction des modèles réduits par résolution d'un problème d'optimisation

Dans le cadre de la MIM [7], les composantes de D_T et D_G diagonales, U_T et U_G triangulaires supérieures, A_{TG} orthogonale et B dans (15) et (16), ainsi que celles de H dans (17), sont identifiées par un algorithme utilisant des techniques d'optimisation. La construction des MR constitue donc un problème d'estimation de paramètres. Pour un ordre m donné, le nombre de paramètres inconnus est $N_{param}(m) = 2m^2 + 4m + N_{obs}m$. Hormis les composantes de H qui font l'objet d'un traitement spécifique, les paramètres inconnus sont regroupés dans le vecteur θ de taille $2m^2 + 4m$. Tous les paramètres sont identifiés à travers la minimisation d'une fonction $J_{id}^{(m)}(\theta, H)$ basée sur l'écart quadratique entre, d'une part, les températures $[\delta T_{obs}]_i(j, t_k, \theta, H)$, $i \in [1; N_{obs}]$ calculées par le MR et, d'autre part, les températures correspondantes $[\delta T_{obs}^{data}]_i(j, t_k)$, $i \in [1; N_{obs}]$ calculées avec le modèle détaillé de référence, pour le même signal discret de densité de flux appliqué $\delta\varphi^{data}(t_k)$, $k \in [1; N_t^{id}]$ et le même ensemble de couples $(k_{th}, \kappa)_j^{data}$, $j \in [1; N_c^{id}]$:

$$J_{id}^{(m)}(\theta, H) = \sum_{i=1}^{N_{obs}} \sum_{j=1}^{N_c^{id}} \sum_{k=1}^{N_t^{id}} \left([\delta T_{obs}]_i(j, t_k, \theta, H) - [\delta T_{obs}^{data}]_i(j, t_k) \right)^2 \quad (18)$$

L'écart quadratique moyen correspondant est $\sigma_{id}^{(m)} = \sqrt{J_{id}^{(m)}(\theta, H) / N_{obs} N_c^{id} N_t^{id}}$.

D'après (15), (16) et (17), le vecteur δT_{obs} est non-linéaire par rapport à $D_T, U_T, A_{TG}, B, D_G, U_G$ et donc par rapport à θ , alors qu'il dépend linéairement de H . Deux méthodes d'optimisation sont donc employées à travers une approche de point fixe. Un algorithme d'Optimisation par Essaim de Particules (OEP) [4] est utilisé pour l'estimation de θ . A chaque itération de l'algorithme OEP, θ est fixé pour chaque particule de l'essaim et le vecteur $X^{(T)}(t)$ est calculé pour tous les couples (k_{th}, κ) et tous les instants. La matrice H est alors estimée par moindres carrés ordinaires à partir des données δT_{obs}^{data} . On construit d'abord un MR d'ordre $m = 1$. Des MR d'ordres supérieurs sont ensuite construits jusqu'à satisfaction d'un critère d'arrêt (obtention de la précision souhaitée ou $\sigma_{id}^{(m+1)} \approx \sigma_{id}^{(m)}$).

4. Exemple d'application : « méthode flash » sur échantillon cylindrique

4.1. Configuration étudiée

L'approche est appliquée à une configuration de type « méthode flash ». Un échantillon de forme cylindrique est soumis à un signal de densité de flux en face avant (tir de laser) et l'observable considéré est l'évolution de température au centre de la face avant. La Figure 1 illustre cette configuration 2D axisymétrique. Le modèle détaillé (MD) de référence des équations non-linéaires (1) à (4), basé sur la méthode des volumes finis, est décrit et validé dans [9]. L'indice de réfraction n est égal à 1,49. L'évolution de température utilisée comme donnée est ensuite obtenue en soustrayant la température en régime permanent initial ($T_0=300$ K) aux températures calculées. Notons que bien que la forme générale des équations des MR soit indépendante de la géométrie, les MR sont construits à partir de données simulées pour une configuration géométrique donnée. Pour une autre géométrie, de nouveaux MR, de forme similaire mais avec des paramètres de valeur différente, devraient être construits.

4.2. Identification des modèles réduits

Les données d'entrée pour l'identification des MR sont constituées par l'ensemble de $N_c^{id} = 100$ couples (k_{th}, κ) correspondant aux points rouges sur la Figure 2, dans les gammes $k_{th} \in]0; 2[$ W.m⁻¹.K⁻¹ et $\kappa \in]0; 2000[$ m⁻¹, et la densité de flux $\delta\varphi^{data}(t)$ tracée en rouge sur la Figure 3. Les sorties correspondantes sont les 100 évolutions de température $\delta T_{obs}^{data}(t)$ au centre de la face avant ($N_{obs} = 1$), calculées par le MD avec un pas de temps de $2,5 \cdot 10^{-5}$ s. Un échantillonnage à $2,5 \cdot 10^{-2}$ s est effectué, $N_t^{id} = 101$ instants sont donc utilisés pour l'identification des MR. Une série de MR d'ordre $m = 1$ à 6 a été construite à partir de ces données. La valeur de $\sigma_{id}^{(m)}$ en fonction de m est tracée en rouge sur la Figure 4. Comme attendu, $\sigma_{id}^{(m)}$ décroît avec m , jusqu'à $2,9 \cdot 10^{-2}$ K pour $m = 6$.

4.3. Validation des modèles réduits

Une fois les MR construits, plusieurs tests de validation ont été effectués. Un second ensemble de $N_c^{val} = 50$ couples (k_{th}, κ) correspondant aux carrés noirs sur la Figure 2 est ainsi utilisé. Deux tests sont présentés ici, le « test 1 » avec $\delta\varphi^{test1}(t) = \delta\varphi^{data}(t)$ utilisé dans la phase de construction des MR et le « test 2 » avec $\delta\varphi^{test2}(t)$ tracé en noir sur la Figure 3. Pour chaque test, les 50 évolutions de température au centre de la face avant sont comparées avec celles issues du MD. La valeur de $\sigma_{val}^{(m)}$, quantité similaire à $\sigma_{id}^{(m)}$, est ainsi tracée en fonction de m sur la Figure 4, en bleu pour le test 1 et en noir pour le test 2. Comme pour la phase de construction, $\sigma_{val}^{(m)}$ décroît avec m . Pour le test 1, $\sigma_{val}^{(m)}$ est très proche de $\sigma_{id}^{(m)}$ pour chacun des 6 MR, montrant la robustesse des MR vis-à-vis des paramètres (k_{th}, κ) . Pour le test 2, la durée du créneau est réduite d'un facteur 0,75 mais l'amplitude est double. Les températures sont donc plus élevées que celles atteintes dans le test 1 et la phase

d'identification. Ainsi, pour $k_{th} = 0,02 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ et $\kappa = 1020 \text{ m}^{-1}$, la température atteint 347 K. Pour une élévation de 47 K, la validité de la linéarisation est questionnable puisque $(4(T_0)^3 \delta T = 5,08 \cdot 10^9 \text{ K}^4)$ et $(6(T_0)^2 (\delta T)^2 = 1,19 \cdot 10^9 \text{ K}^4)$ dans le développement de $(T_0 + \delta T)^4$. Sans surprise, $\sigma_{val}^{(m)}$ est donc plus élevé pour le test 2 que pour le test 1 pour tous les MR. En particulier, pour $m = 6$, $\sigma_{val}^{(m)} = 7,8 \cdot 10^{-2} \text{ K}$ pour le test 2. Ces résultats montrent cependant la robustesse des MR lorsqu'on les pousse à leurs limites de validité. Enfin, à titre d'illustration, la Figure 5 et la Figure 6 montrent les évolutions de température relatives à 6 couples (k_{th}, κ) différents pour le test 2. Le temps de calcul pour une simulation du MR est d'environ 10^{-3} s , soit un gain d'un facteur 10^3 par rapport au MD à pas de temps égal.

5. Conclusion

Dans le cadre des transferts par conduction et rayonnement dans des milieux semi-transparents gris pour lesquels les transferts radiatifs peuvent être modélisés par l'approximation P1, une formulation de modèles réduits (MR) linéaires explicitement paramétrés par la conductivité thermique et le coefficient d'absorption effectif a été proposée. La construction de ces modèles réduits par la Méthode d'Identification Modale (MIM) a également été présentée. Une application sur un problème bidimensionnel axisymétrique instationnaire de type « méthode flash » a montré la capacité des MR à reproduire de façon satisfaisante l'évolution de température au centre de la face avant en réponse à un signal quelconque de densité de flux appliqué en face avant. Compte-tenu des très faibles temps de calcul induits par les MR, ces derniers pourront être utilisés pour l'estimation rapide de la conductivité thermique et du coefficient d'absorption effectif de matériaux semi-transparents, sous réserve de sensibilités suffisantes de la température observée à ces paramètres.

Références

- [1] P.Y. Wang, H.P. Tan, L.H. Liu, J.F. Luo, Heat transfer in translucent thermal barrier coatings of turbine engine, *Journal of Aerospace Power*, 15(3) (2000), 268-273.
- [2] P.Y. Wang, H.E. Cheng, H.P. Tan, Transient thermal analysis for semi-transparent composite thermal barrier coatings, *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 36(2) (2002), 180-184.
- [3] E. Ruffio, Estimation of parameters and boundary conditions in unsteady conduction for anisotropic materials, *Ph.D. Thesis*, ENSMA, 2004.
- [4] M. Clerc, *L'Optimisation par Essais Particulaires – Versions Paramétriques et Adaptatives*, Paris, Hermes Science-Lavoisier (2005).
- [5] V. Maneesh, M.K. Pradeep, An inverse method to estimate the principal thermal conductivities of composite material, *Int. Journal of Scientific & Engineering Research*, 5(7) (2014), 810-813.
- [6] Y. Liu, Y. Billaud, D. Saury, D. Lemonnier, Identification simultanée de propriétés thermo-physiques de milieux semi-transparents par un modèle réduit basé sur un réseau de neurones artificiels multicouches, *Congrès Français de Thermique* (Nantes, France, 3-6 juin 2019).
- [7] M. Girault, D. Petit, E. Videcoq, Identification of low-order models and their use for solving inverse boundary problems, dans *Thermal Measurements and Inverse Techniques*, éditeur H.R.B Orlande et al. (2011), 457–506.
- [8] M.F. Modest, *Radiative heat transfer, third edition*, Academic press, Elsevier (2013).
- [9] Y. Liu, Y. Billaud, D. Saury, D. Lemonnier, Simultaneous identification of thermal conductivity and absorption coefficient of a homogeneous medium, *16th International Heat Transfer Conference* (Beijing, China, 10-15 août 2018), 8834–8841.

Remerciements

Les auteurs souhaitent exprimer leur gratitude à China Scholarship Council Foundation pour son soutien financier, ainsi qu'à la Région Nouvelle-Aquitaine et à l'Union Européenne pour leurs financements aux travers des programmes CPER et FEDER.

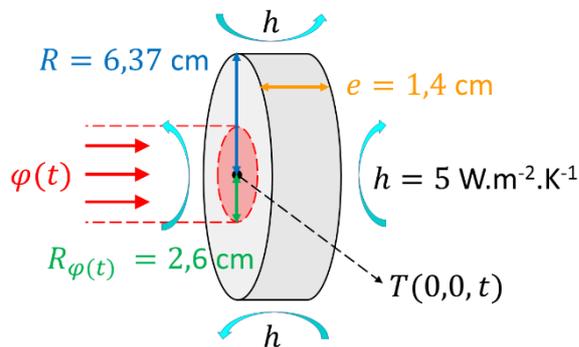


Figure 1 : schéma de la configuration étudiée de type « méthode flash »

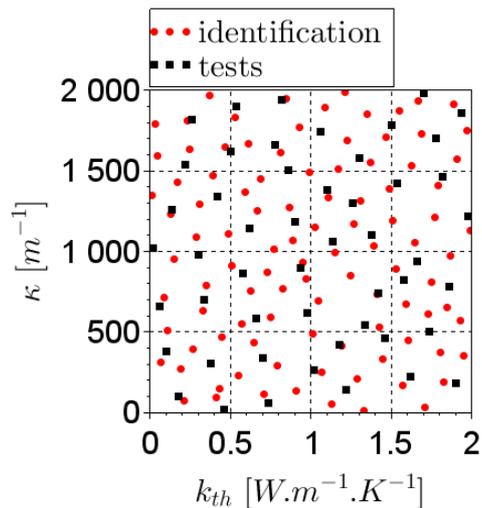


Figure 2 : couples (k_{th}, κ) pour l'identification et la validation des MR

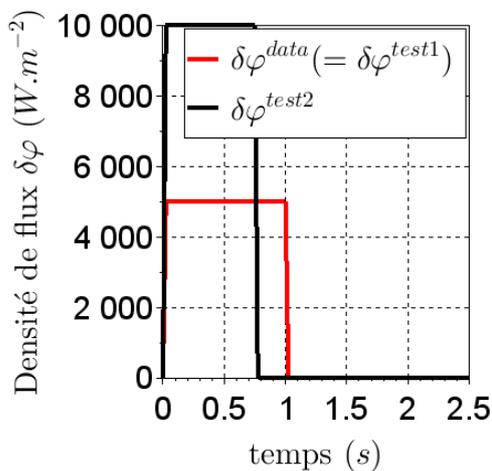


Figure 3 : densités de flux employées pour l'identification et la validation des MR

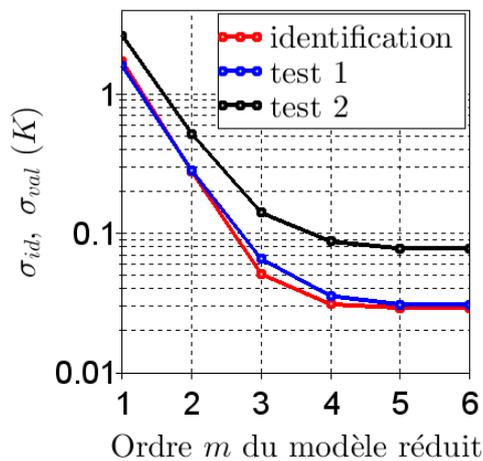


Figure 4 : identification et validation des MR. Ecart quadratique moyen $\sigma_V^{(m)}$ entre MD et MR

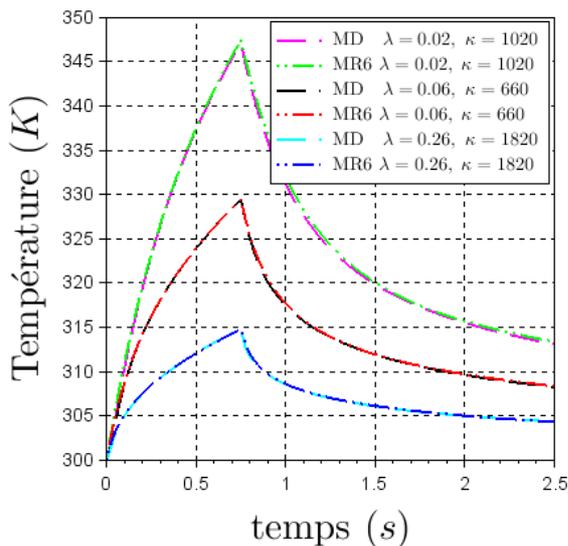


Figure 5 : températures calculées par MD et MR d'ordre 6 (test 2) pour 3 couples (k_{th}, κ)

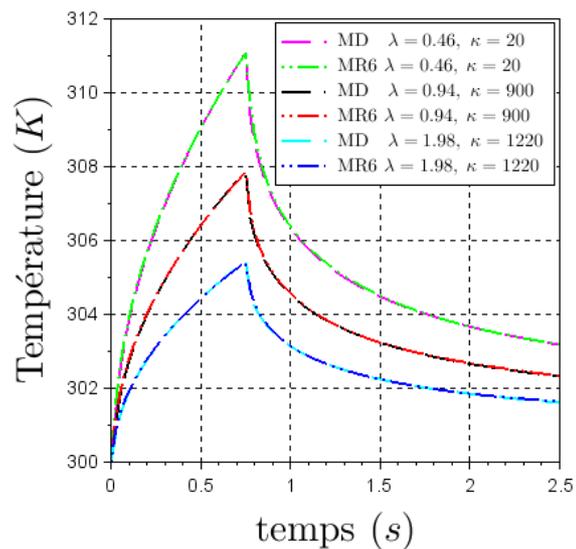


Figure 6 : températures calculées par MD et MR d'ordre 6 (test 2) pour 3 couples (k_{th}, κ)