

Réduction modale adaptée à la simulation thermique avec rayonnement : Application à une pièce dans un four industriel

Adaptation of modal reduction to thermal radiation : Application to a piece in a furnace

Benjamin GAUME^{1*}, Frédéric JOLY¹, Olivier QUEMENER¹

¹LMEE, Univ Evry, Université Paris-Saclay, 91020 Evry, France

*(auteur correspondant : b.gaume@iut.univ-evry.fr)

Résumé - Cet article présente une méthode originale de réduction de modèle dominé par les phénomènes radiatifs : le couplage entre la méthode AROMM (Amalgam Reduced Order Modal Model) et la méthode des radiosités. La méthode AROMM permet une réduction importante du nombre de degrés de liberté, tout en préservant l'intégrité de la géométrie, condition nécessaire pour la modélisation du rayonnement. L'exemple traité consiste en une pièce en titane chauffée par deux panneaux radiants dans un four. Les résultats sont satisfaisants, avec une erreur moyenne inférieure à 0.1% pour un gain en temps de calcul de l'ordre de 100.

Mots-clés : Rayonnement thermique ; Modèle réduit ; Réduction modale ; Radiosité ; Eléments finis.

Abstract - This article presents an original method to reduce model dominated by radiative phenomena: the coupling between the AROMM method (Amalgam Reduced Order Modal Model) and the radiosity method. The AROMM method allows a significant reduction in the number of degrees of freedom, while preserving the integrity of the geometry, a necessary condition for modeling the radiation. The example treated consists of a titanium part heated by two radiant panels in a furnace. The results are satisfactory, with an average error of less than 0.1 % for a gain in computation time of the order of 100.

Keywords: Thermal radiation; Reduced model; Modal reduction; Radiosity; Finite elements.

Nomenclature

c	Capacité thermique volumique, J/m^3K	T	Température, K
e	Epaisseur, m	\bar{T}	Température d'un patch, K
f	Fonction d'essai, K	<i>Symboles grecs</i>	
F_{ij}	Facteur de forme	ε	Emissivité
h	Coefficient d'échange, W/m^2K	σ	Constante Stefan-Boltzmann, $W.m^{-2}.K^{-4}$
k	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$		

1. Introduction

La simulation numérique d'applications industrielles telles que les satellites ou les fours nécessite une modélisation fine de l'ensemble des phénomènes physiques et plus particulièrement du rayonnement. Ce dernier, de par sa forte non-linéarité et son intégration dans l'espace, alourdit les simulations numériques tant en temps de calcul qu'en utilisation de mémoire. Cette difficulté devient critique lorsque le modèle est impliqué dans une boucle itérative de contrôle

ou d'identification. Il est alors intéressant d'utiliser des modèles réduits. Comme l'intégralité du champ de température est nécessaire pour la résolution de problèmes radiatifs, les méthodes modales sont appropriées. A cette fin, nous associons dans cette communication la méthode de réduction AROMM (Amalgam Reduced Order Modal Model [1]) à la méthode des radiosités. L'application traitée est une pièce en titane complexe chauffée par deux panneaux radiants placés dans un four.

2. Résolution par la méthode des éléments finis

2.1. Problème physique

Une pièce complexe en titane et oxydée doit subir un traitement thermique d'une durée de 5×10^4 s dans un four industriel initialement à $T_0 = 293.15K$ (figure 1). La pièce est chauffée par deux tubes radiants munis de réflecteurs paraboliques. Les paramètres thermophysiques des différents éléments sont regroupés dans le tableau 1.

Dans ce problème :

- les échanges avec l'extérieur (qui incluent l'isolation thermique des parois) sont supposés linéaires (coefficient h_{ext} uniforme et une température extérieure $T_{ext} = 293.15K$);
- le phénomène de convection interne est caractérisé par un unique coefficient $h_{int} = 5 W.m^{-2}.K^{-1}$ et une température de l'air inconnue T_{int} car fonction de la température des parois;
- le rayonnement entre les différentes surfaces du four (supposées grises) s'effectue dans un milieu transparent.

L'objectif de l'étude est d'obtenir la distribution de température sur la pièce chauffée pour différents scénarios thermiques détaillés dans le tableau 2.

	Capacité thermique c $J.m^{-3}.K^{-1}$	Conductivité thermique k $W.m^{-1}.K^{-1}$	Emissivité totale hémisphérique ε	Epaisseur e m
Pièce	2.35×10^6	21.9	0.8	0.001
Support	3.95×10^6	16.3	0.95	0.005
Paroi	0.18×10^6	45	0.95	0.01
Tube	3.4×10^6	45	0.95	0.01
Réflecteur	3.95×10^6	16.3	0.3	0.001

Tableau 1 : Caractéristiques thermophysiques des différents éléments

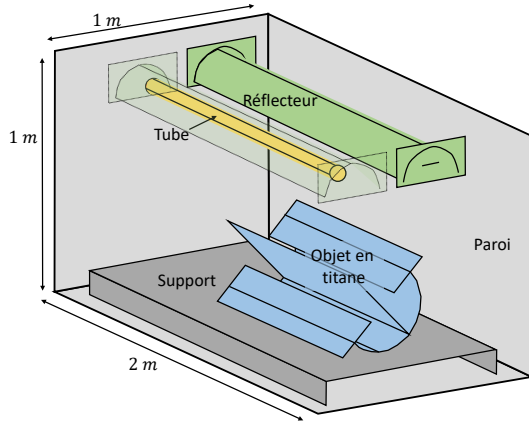


Figure 1 : La géométrie considérée

Scénario	h_{ext}	T_{tube}
	$W.m^{-2}.K^{-1}$	K
1	5	673.15
2	1	973.15
3	0.5	1273.15

Tableau 2 : Conditions aux limites

2.2. Adaptation de l'équation de la chaleur pour une coque mince avec rayonnement

En considérant les caractéristiques précédentes, le nombre de Biot maximum vaut $Bi = \frac{h e}{2k} \leq 0.072$, ce qui valide l'hypothèse d'un modèle coque [2] [3].

Les échanges convectifs à l'intérieur de l'enceinte sont modélisés via un coefficient d'échange $h_{int} = 5 W.m^{-2}.K^{-1}$ et une température d'air dépendante des températures de l'ensemble des parois intérieures :

$$T_{int}(T) = \frac{\int_{\Omega_{int}} h_{int} T d\Omega}{\int_{\Omega_{int}} h_{int} d\Omega} \quad (1)$$

Dans le problème étudié, les corps gris échangent par rayonnement dans un milieu transparent. Le rayonnement est modélisé par la méthode des radiosités, dans laquelle on considère que toutes les parois peuvent se définir comme la somme de surfaces isothermes et à propriétés radiatives uniformes. Ces zones sont appelées des patches, et l'on peut alors définir un flux net perdu par un patch $\bar{\varphi}_i$ à partir de l'ensemble des températures moyennes par patch \bar{T}_j :

$$\forall j \in [1, N_p] \quad \sum_{i=1}^{N_p} \left[\frac{\delta_{ji}}{\varepsilon_i} - \left(\frac{1}{\varepsilon_i} - 1 \right) F_{ji} \right] \bar{\varphi}_i = - \sum_{i=1}^{N_p} (\delta_{ji} - F_{ji}) \sigma \bar{T}_i^4 \quad (2)$$

$$\bar{T}_i = \frac{\int_{\Omega_{pi}} T d\Omega}{\int_{\Omega_{pi}} d\Omega} \quad (3)$$

où N_p est le nombre de patches, δ_{ji} désigne le symbole de Kronecker, ε_i est l'émissivité du patch, F_{ji} est le facteur de forme du patch j vers le patch i et Ω_{pi} le domaine défini par un patch i. La convention de signe choisie assure que le flux émis $\bar{\varphi}_i = -\varepsilon_i \sigma \bar{T}_i^4$ est négatif.

L'équation (2) s'écrit sous une forme matricielle :

$$\mathbf{A} \bar{\varphi} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{T}}^4 \quad (4)$$

Après inversion de l'équation (2), le flux échangé par un patch peut se définir comme :

$$\bar{\varphi}_j = \sum_{i=1}^{N_p} r_{ji} \bar{T}_i^4, \quad (5)$$

où r_{ji} sont les éléments de la matrice $\mathbf{R}_{rad} [N_p, N_p] = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$.

L'équation de la chaleur du problème étudié sous forme variationnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e c \frac{\partial T}{\partial t} f d\Omega = & - \int_{\Omega} e k \nabla T \cdot \nabla f d\Omega - \int_{\Omega_{int}} h_{int} T f d\Omega - \int_{\Omega_{ext}} h_{ext} T f d\Omega \\ & + \int_{\Omega_{int}} h_{int} T_{int} f d\Omega + \int_{\Omega_{ext}} h_{ext} T_{ext} f d\Omega + \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left(r_{ij} \bar{T}_i^4 \right) \int_{\Omega_j^e} f d\Omega \end{aligned} \quad (6)$$

avec la fonction d'essai $f \in H_1(\Omega)$.

La discrétisation spatiale du problème défini par les équations (1) et (6) par éléments finis de type P1 amène au problème matriciel suivant en respectant l'ordre des termes précédents :

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = [\mathbf{K} + \mathbf{H}_{int} + \mathbf{H}_{ext}] \mathbf{T} + \mathbf{U}_{cpl} T_{int}(\mathbf{T}) + \mathbf{U}_0 + \bar{\mathbf{R}}_{rad} \bar{\mathbf{T}}^4. \quad (7)$$

Le vecteur \mathbf{T} contient les températures aux N points de la discrétisation, et \mathbf{U}_0 est le vecteur des sollicitations extérieures (le flux de chaleur extérieur $\int_{\Omega} h_{ext} T_{ext}$). \mathbf{C} , \mathbf{K} , \mathbf{H}_{int} , \mathbf{H}_{ext} sont des matrices de dimension $[N \times N]$: \mathbf{C} est la matrice de capacité thermique, \mathbf{K} la matrice de conductivité \mathbf{H}_{int} et \mathbf{H}_{ext} sont les matrices de convection. Le vecteur \mathbf{U}_{cpl} est l'échange convectif de l'air à l'intérieur du four, à une température $T_{int}(\mathbf{T})$. Cette température intérieure est obtenue par résolution de l'équation (1), s'exprimant sous forme discrète :

$$T_{int}(\mathbf{T}) = \mathbf{D} \mathbf{T} \quad (8)$$

Le vecteur $\bar{\mathbf{T}}$ de dimension $[N_p]$ contient la température moyenne de chaque patch Ω_i^e et s'écrit matriciellement (d'après l'équation 3) :

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{U}_R \mathbf{T}. \quad (9)$$

La matrice \mathbf{U}_R de dimension $[N_p \times N]$ est l'opérateur moyenne, pour le calcul de la température moyenne des N_p patches à partir de la température aux N nœuds du maillage.

Enfin, la matrice de rayonnement $\bar{\mathbf{R}}_{rad} [N \times N_p]$ permet le calcul de la densité de flux aux N nœuds à partir des N_p patches. Cette matrice est calculée par la relation suivante :

$$\bar{\mathbf{R}}_{rad} = {}^t \mathbf{U}_R \mathbf{S} \mathbf{R}_{rad}, \quad (10)$$

où \mathbf{S} est une matrice diagonale $[N_p \times N_p]$ telle que S_{ii} contienne la surface du patch i . Le vecteur $\bar{\mathbf{T}}^4$ contient les éléments du vecteur $\bar{\mathbf{T}}$ élevés à la puissance 4.

2.3. Résultats du problème éléments finis

Tous les calculs ont été effectués sur un ordinateur portable avec un processeur 6 cœurs Intel® Xeon® E-2176M @ 2.7GHz et 64GB de RAM. La discrétisation éléments finis a conduit à un maillage de $N = 12\,167$ nœuds et $N_t = 24\,202$ éléments de type triangle.

Dans l'étude présentée ici, un patch correspond à un élément de type triangle issu du maillage. Comme les éléments rayonnent selon leur deux faces, nous avons un total de $N_p = 44\,838$ patches. La prise en compte du rayonnement nécessite deux calculs préliminaires. Le calcul des N_p^2 facteurs de forme est effectué en $t_{CPU}^{F_{ij}} \approx 1h$. L'inversion de l'équation 2 permettant d'obtenir le flux par patch prend $t_{CPU}^{rad} \approx 8h$. Ces deux calculs sont effectués une seule fois et réutilisés pour l'ensemble des simulations.

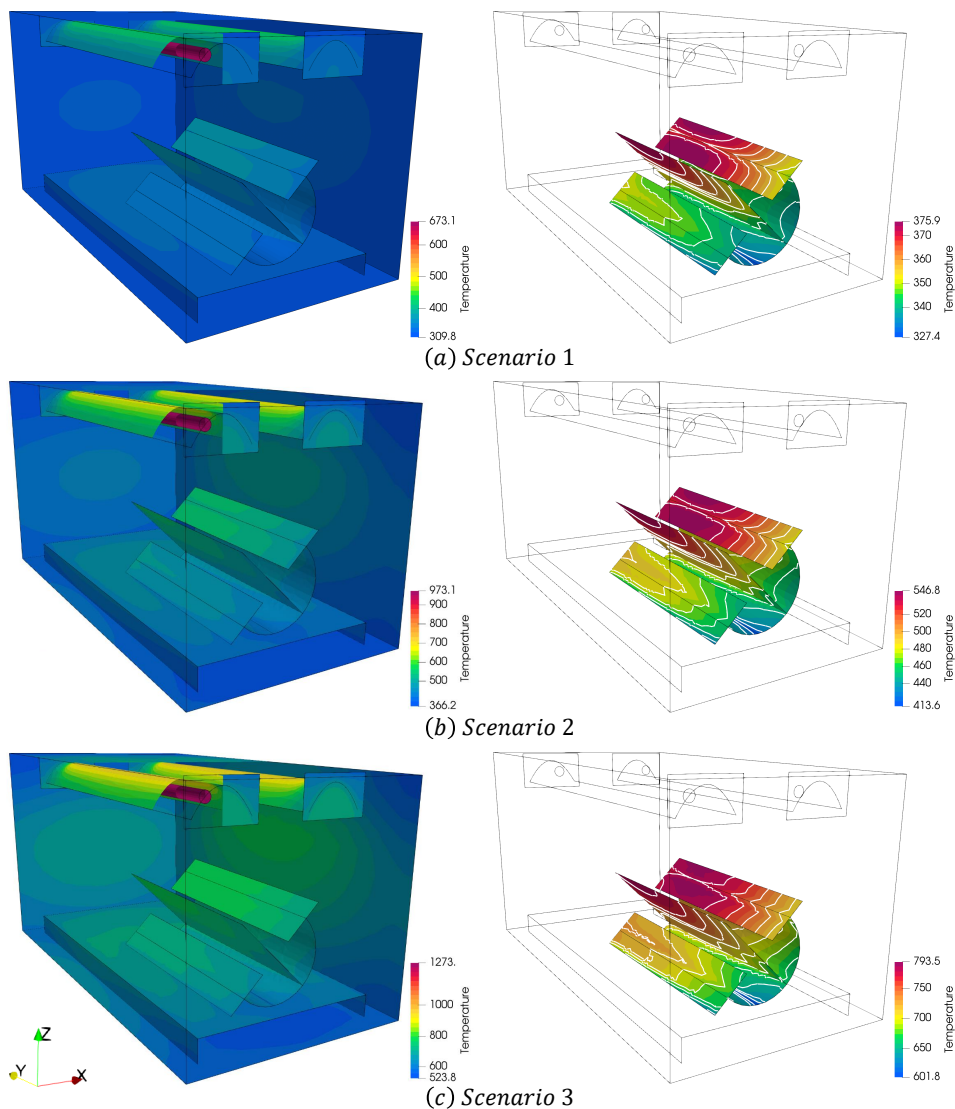


Figure 2 : Champ de température pour les 3 scénarios au temps 3000 s. La colonne de gauche correspond à la scène thermique complète, tandis que celle de droite se concentre sur l'objet en titane

La figure 2 présente le champ de température à l'instant $t = 3\,000$ s pour les 3 scénarios, caractérisés par des températures de tubes très différentes. L'augmentation de la température des émetteurs de 300 K à chaque scénario induit des variations de minimum très différentes : le

passage du scénario 1 à 2 entraîne une augmentation de ce minimum de 55 K , alors qu'entre le scénario 2 et 3, ce minimum augmente de 150 K .

Par ailleurs, le fort gradient de température sur la pièce souligne l'importance de l'effet de masque dans cette étude. Le transfert de chaleur par rayonnement est prédominant, l'effet de masque joue un rôle important. Ainsi, pour le scénario 3, plus de 200 K séparent le haut et le bas de la pièce. Cette modélisation fine a nécessité un temps CPU compris entre 4 et 6 heures selon les scénarios. Ce temps CPU important interdit toute étude paramétrique par modélisation classique, et justifie l'utilisation de modèles réduits.

3. Méthode de réduction modale

3.1. Principe

La technique consiste à décomposer le champ de températures sur un petit nombre de fonctions spatiales $\tilde{V}(M)$ appelées modes, pondérées par des coefficients d'excitation $x_i(t)$:

$$T(M, t) \approx \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{x}_i(t) \tilde{V}_i(M). \quad (11)$$

Ces modes sont obtenus en deux étapes :

- résolution d'un problème aux valeurs propres, qui donne accès à une base complète constituée de N modes V_i

$$-\int_{\Omega} e k \nabla V_i \cdot \nabla f d\Omega = z_i \int_{\Omega} e c V_i f d\Omega, \quad (12)$$

Le paramètre z_i correspond à la valeur propre associée à chacun de ces modes. Le calcul de cette base complète s'effectue en 4 minutes.

- réduction de la base complète par une méthode d'amalgame qui permet l'obtention d'une base réduite constituée de \tilde{N} modes \tilde{V}_i [4] et [5]. Cette technique s'appuie sur des scénarios de référence, pour lequel la base réduite est optimisée. Dans l'étude considérée, le cas de référence correspond au scénario 2 du tableau 2 pour lequel on impose des surfaces noires. La résolution est ainsi extrêmement rapide : le modèle réduit est obtenu en 2 min.

3.2. Equation d'état et résolution du problème réduit

L'équation d'état sous forme discrète s'obtient en remplaçant dans le problème (6) le champ de température $T(M, t)$ par sa projection dans la base modale réduite (11) et la fonction d'essai f est exprimée comme un des vecteurs \tilde{V}_i de la base.

$$\tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}} \frac{d\tilde{\mathbf{X}}}{dt} = \tilde{\mathbf{V}}^t [\mathbf{K} + \mathbf{H}_{\text{int}} + \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_{\text{cpl}}] \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{U}_0 + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{R}_{\text{rad}} \bar{\mathbf{T}}^4 \quad (13)$$

avec

$$\bar{\mathbf{T}} = {}^T \mathbf{U}_{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{X}} \quad (14)$$

où $\tilde{\mathbf{V}} \left[\tilde{N} \times \tilde{N} \right]$ est la matrice contenant les \tilde{N} modes réduits \tilde{V}_i , et \mathbf{C} , \mathbf{K} , etc. sont les matrices éléments finis définies dans Eq. (7). Les matrices comme $\tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}}$ sont denses et de dimension

$[\tilde{N} \times \tilde{N}]$. Notons que le calcul de la température d'enceinte $T_{int}(T)$ est directement intégrée dans l'équation de la chaleur (6) à travers le terme \mathbf{H}_{cpl} .

3.3. Résultats

Le champ de température pour le scénario 3 à $t = 3000\text{ s}$ calculé par le modèle réduit d'ordre 200 est représenté sur la figure 3 et doit être comparé à celui représenté sur la Fig. 2 (c). Visuellement, l'accord est très bon, et les contours produits par le rayonnement (en particulier les effets de masque) sont bien représentés. Cette première impression est confirmée par le champ erreur $|T - \tilde{T}|$: en ce qui concerne l'intégralité du four, l'écart n'excède pas 26 K , (soit 2% des 1200 K des tubes radiant). La température est particulièrement bien prédite pour la pièce en titane, puisque l'erreur sur la température maximale n'excède pas 1.5 K .

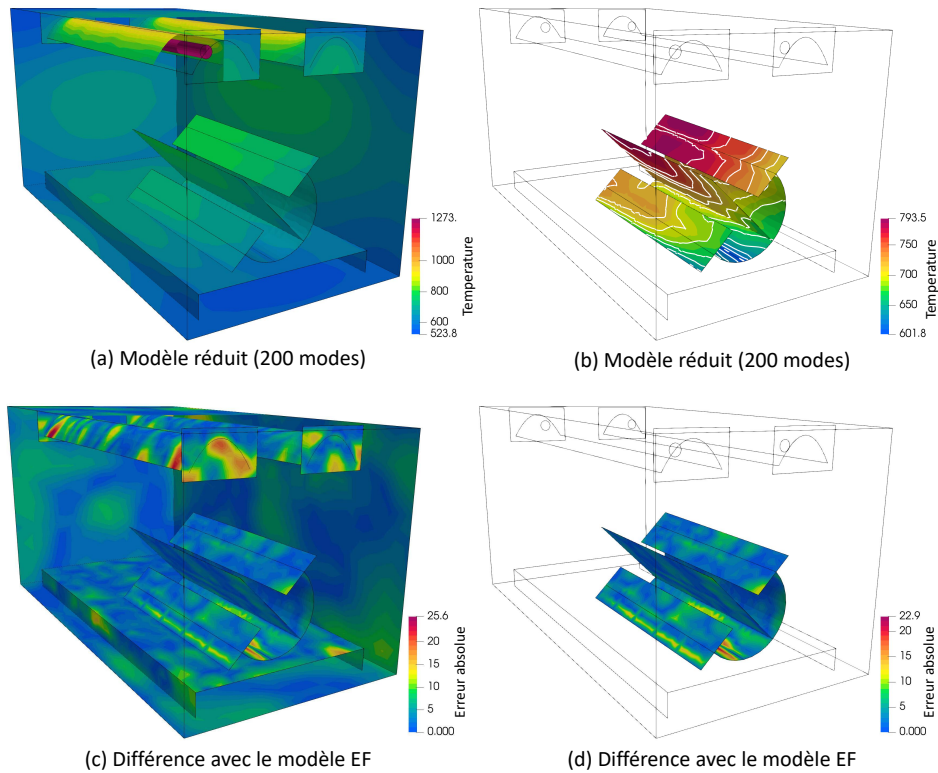


Figure 3 : Champ de température et erreur pour le scénario 3 à $t = 3000\text{ s}$

Une analyse de sensibilité du modèle réduit a été conduite (voir figure 4), en utilisant les deux erreurs relatives suivantes :

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \int_{\Omega} |T - \tilde{T}| d\Omega d\tau, \quad \varepsilon_{max} = \frac{\max_{\tau, \Omega} |T - \tilde{T}|}{\max_{\tau, \Omega}(T) - \min_{\tau, \Omega}(T)},$$

où τ est le temps de simulation et V le volume du domaine Ω . Ces figures illustrent le compromis nécessaire entre temps de calcul et précision. Même pour des modèles extrêmement réduits (20 modes par exemple), les résultats sont décents, puisque l'erreur maximale $\varepsilon_{max} \approx 10\%$ et l'erreur moyenne $\langle \varepsilon \rangle$ reste inférieure à 1%, pour un gain en temps calcul de l'ordre de 800. Cependant, cette erreur relative de 10 % correspond à une erreur en température de 100

K. Un modèle à 200 modes permet d'augmenter significativement la précision : $\langle \varepsilon \rangle \approx 0.1\%$ et $\varepsilon_{max} \approx 3\%$, au dépend d'un gain en temps calcul de l'ordre de 100. Ce résultat reste très satisfaisant puisque l'on passe de 6h de temps de calcul à 4 minutes.

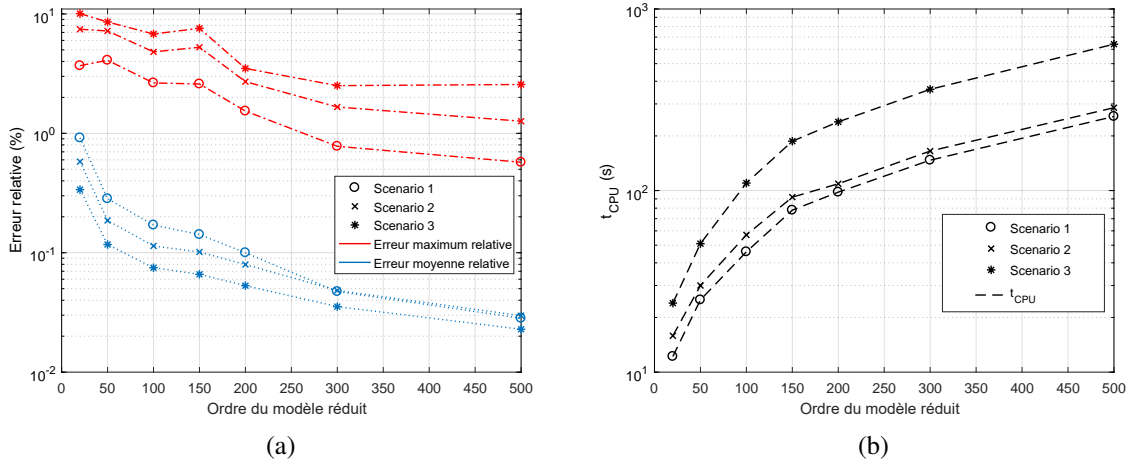


Figure 4 : Erreur relative et temps CPU en fonction de l'ordre de réduction

4. Conclusion

L'objectif de cette étude était de démontrer la faisabilité et l'intérêt de réduire un problème de rayonnement thermique pour une application réaliste, tout en modélisant la physique engendrée par le rayonnement et la géométrie. La méthode AROMM couplée à la méthode des radiosités a démontré son efficacité et sa robustesse pour les 3 scénarios choisis, moyennant un coût initial d'environ 9h de calcul. Avec un modèle modal d'ordre 200, l'erreur maximale relative s'est avérée inférieure à 3% alors que l'erreur moyenne dans le temps et l'espace est inférieure à 0.1%. A cet ordre, l'effort de calcul est très faible, seulement 4 minutes sont nécessaires pour résoudre le problème, par rapport aux 6 heures requises par le modèle détaillé. Le gain en temps de calcul est de l'ordre de 100 ou plus, quelle que soit la configuration testée. Ces performances très satisfaisantes ouvrent l'accès au contrôle en temps réel ou à l'identification de sources avec rayonnement.

Références

- [1] B. Gaume, F. Joly, O. Quéméner, Modal reduction for a problem of heat transfer with radiation in an enclosure, *IJHMT* 141 (2019) 779 – 788.
- [2] A. E. Jeffers, Heat transfer element for modeling the thermal response of non-uniformly heated plates, *Finite Elements in Analysis and Design* 63 (2013) 62 – 68.
- [3] C. An, J. Su, Lumped models for transient thermal analysis of multilayered composite pipeline with active heating, *Appl. Therm. Eng.* 87 (2015) 749 – 759.
- [4] O. Quéméner, F. Joly, A. Neveu, The generalized amalgam method for modal reduction, *IJHMT* 55 (4) (2012) 1197 – 1207.
- [5] O. Quéméner, A. Neveu, E. Videcoq, A specific reduction method for branch modal formulation : Application to highly non linear configuration, *IJTS* 46 (9) (2006) 890–907.