

# Optimisation topologique par algorithmes génétiques appliquée aux échangeurs de chaleur

## Topological optimization by genetic algorithms applied to heat exchangers

A. Lapertot<sup>1\*</sup>, C. Septet<sup>1</sup>, B. Kadoch<sup>1</sup>, O. Le Métayer<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Aix Marseille Université, CNRS, IUSTI UMR 7343, 13453, Marseille, France

\*(auteur correspondant : [arnaud.lapertot@univ-amu.fr](mailto:arnaud.lapertot@univ-amu.fr))

**Résumé** – Une étude d’optimisation topologique est mise en œuvre en utilisant les algorithmes génétiques. Elle consiste à trouver la répartition optimale de matière. Tout d’abord, le système est implémenté grâce à des modèles de transfert de chaleur et d’écoulement fluide. Ensuite, une optimisation mono-objective est appliquée à la conduction de chaleur, à l’écoulement fluide et aux milieux poreux. Enfin, un milieu poreux avec transferts de chaleur est étudié grâce à une optimisation multi-objectif.

**Mots-clés** : Conduction ; Echangeur ; Milieux poreux ; Optimisation topologique ; Transfert de chaleur.

**Abstract** – A topological optimization study is performed using genetic algorithms. It consists in finding the optimal distribution of material. First, the system is implemented using heat transfer and fluid flow models. Then, an optimization is applied to a problem of heat conduction, fluid flow and porous media. Finally, a porous media with heat transfer is studied thanks to a multi-objective optimization.

**Keywords**: Conduction; Heat exchanger; Heat transfer; Porous media; Topological optimization.

### Nomenclature

$A$  surface de contact,  $m^2$   
 $c_p$  capacité thermique massique,  $J.kg^{-1}.K^{-1}$   
 $d$  diamètre des brins,  $m$   
 $E$  énergie totale,  $J$   
 $e$  énergie interne,  $J$   
 $H$  largeur du domaine,  $m$   
 $h_{sf}$  coefficient d’échange,  $W.m^{-2}.K^{-1}$   
 $k$  conductivité thermique,  $W.m^{-1}.K^{-1}$   
 $K$  perméabilité hydraulique,  $m^2$   
 $L$  longueur du domaine,  $m$   
 $l_c$  longueur caractéristique,  $m$   
 $Nu$  nombre de Nusselt, -  
 $N_x, N_y$  nombre de mailles, -  
 $p$  pression,  $Pa$   
 $P$  puissance thermique,  $W$   
 $Pr$  nombre de Prandtl, -  
 $Re$  nombre de Reynolds, -  
 $S_c$  terme source conduction,  $W.m^{-3}$   
 $S_f$  terme source fluide,  $Pa.m^{-1}$   
 $S_{thm}$  terme source thermique,  $W$   
 $T$  température,  $^{\circ}C$   
 $\bar{T}$  température moyenne,  $^{\circ}C$   
 $u$  vitesse,  $m.s^{-1}$

$y$  fraction massique, -  
*Symboles grecs*  
 $\alpha$  fraction volumique, -  
 $\beta$  coefficient de résistance inertielle,  $m^{-1}$   
 $\epsilon$  porosité, -  
 $\rho$  masse volumique,  $kg.m^{-3}$   
 $\mu$  viscosité cinématique,  $Pa.s$   
 $\nu$  surface spécifique,  $m^2$   
 $\phi$  proportion, %  
 $\Delta p$  perte de charge,  $Pa$   
 $\Delta x, \Delta y$  dimension des mailles,  $m$

### Indices et exposants

f fluide  
l liquide  
o isolant  
p conducteur  
s solide  
thm thermique  
v vapeur

### Abréviations

NSGA Non dominated Sorting Genetic Algorithm

## 1. Introduction

L'optimisation topologique a pour objectif de trouver la répartition optimale de matière en minimisant ou en maximisant une fonction coût dans un volume donné soumis à des contraintes. Initialement très employées dans l'optimisation de pièces mécaniques et de certains systèmes fluides, ces méthodes intéressent de plus en plus les industriels pour optimiser les performances de systèmes thermiques. Par exemple, elles sont utilisées en électronique de puissance pour améliorer le refroidissement des composants par des dissipateurs thermiques [1]. Elles sont aussi utilisées pour améliorer les performances thermo-hydrauliques des échangeurs de chaleur [2]. Certaines études ont utilisé les méthodes d'optimisation sur des problèmes d'écoulements fluides en milieux poreux pour déterminer la répartition optimale des zones perméables et imperméables [3].

Cet article propose de résoudre des problèmes d'optimisation topologique mono-objectif et multi-objectifs par les algorithmes génétiques appliqués à des problèmes de conduction de chaleur, d'écoulement fluide et d'écoulement en milieux poreux. Pour cela, les modèles de transfert de chaleur, d'écoulement fluide et des milieux poreux sont implémentés. Ensuite, le système est résolu grâce à la méthode des volumes finis et d'un schéma numérique explicite en temps. Enfin, les algorithmes génétiques permettent d'obtenir la meilleure topologie pour différentes configurations pour un problème mono-objectif ou d'obtenir un ensemble de solutions pour un problème multi-objectifs. Pour ce dernier, la topologie optimale est obtenue grâce à une méthode d'aide à la décision.

## 2. Modélisation des échangeurs de chaleur

### 2.1. Conduction

Les transferts de chaleur dans les domaines solides sont traités par résolution de l'équation de la chaleur. Cette équation est définie en fonction d'un terme temporel  $\partial T_s / \partial t$ , d'un terme spatial  $\vec{\nabla} \cdot (k_s \vec{\nabla} T_s)$  et d'un terme source  $S_s$  :

$$\rho_s c_{p_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (k_s \vec{\nabla} T_s) = S_s \quad (1)$$

Le champ de température dans le domaine solide  $T_s$  est calculé par la méthode des volumes finis [4].

### 2.2. Ecoulement fluide

Le système des équations d'Euler de mélange avec espèces est utilisé pour le modèle fluide. Ce dernier est composé d'une phase liquide et d'une phase vapeur. Sous forme conservative, le modèle est défini comme suit : la première équation correspond à la conservation de la masse de la phase liquide, la deuxième à la conservation de la masse du mélange, la troisième et la quatrième à la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie totale :

$$\partial U / \partial t + \vec{\nabla} \cdot F(U) = 0 \quad (2)$$

où  $U = (\rho_l \alpha_l \quad \rho_f \quad \rho_f \vec{u} \quad \rho_f E_f)^t$  et  $F = (\rho_l \vec{u} \alpha_l \quad \rho_f \vec{u} \quad \rho \vec{u} \otimes \vec{u} + p \bar{I} \quad (\rho_f E_f + p) \vec{u})^t$  sont les vecteurs des variables conservatives et des flux conservatifs, respectivement.  $E_f = e_f + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2$  est l'énergie totale du mélange et  $e_f = y_l e_l + y_v e_v$  est l'énergie interne du mélange.  $\rho_f = \alpha_l \rho_l + \alpha_v \rho_v$  correspond à la masse volumique du mélange,  $y_l = \alpha_l \rho_l / \rho_f$  la fraction massique du liquide et  $y_v = \alpha_v \rho_v / \rho_f$  celle de la vapeur.

La méthode de résolution retenue est un schéma de Godunov au 1<sup>er</sup> ordre [5] avec une résolution approchée des problèmes de Riemann aux bords par un solveur de type HLLC [6]. Un schéma d'Euler explicite en temps est implémenté en prenant compte d'un critère de stabilité numérique *CFL*.

### 2.3. Ecoulement en milieux poreux

L'écoulement en milieux poreux est également implémenté à l'aide de l'équation d'Euler de mélange avec espèces. Dans ce cas, le vecteur des termes sources additionnels  $S = (0 \ 0 \ \vec{S}_f \ S_{thm})^t$  est non nul. De plus, le système d'équations prend en compte la porosité  $\epsilon$  qui est définie par le rapport entre le volume fluide et le volume total pour chaque maille.

$$\partial \epsilon U / \partial t + \vec{\nabla} \cdot \epsilon F(U) = \epsilon S(U) \quad (3)$$

La loi empirique de Darcy-Forchheimer est utilisée pour relier le gradient de pression et la vitesse. Cette loi est exprimée pour une structure de particules sphériques compacte. Ce type de structure répond à la loi d'Ergun [7].

$$\vec{S}_f = -\mu_f \vec{u} / K - \beta \rho_f \vec{u} \|\vec{u}\| \quad (4)$$

où  $K = d^2 \epsilon^3 / 1,2 A (1 - \epsilon)^2$ ,  $\beta = 1,8 (1 - \epsilon) / d \epsilon^3$  et  $\mu_f = y_l \mu_l + y_v \mu_v$ . Cette formulation est utilisée de façon qualitative pour des écoulements dans des mousses métalliques.

### 2.4. Echanges de chaleur entre le fluide et le solide

Une loi d'échange est implémentée pour calculer la part de flux de chaleur échangé noté  $S_{thm}$  reliant la température du solide  $T_s$  et du fluide  $T_f$ . La matrice solide et la matrice fluide correspondent aux champs de  $T_s$  et  $T_f$ , respectivement. La loi est définie telle que :

$$S_{thm} = h_{sf} v (T_s - T_f) \text{ avec } h_{sf} = \frac{k_f}{l_c} Nu = \frac{k_f}{l_c} Re^{0,9} \left( 1 - 1,5 \left( \frac{l_c}{d} \right)^{-3/2} \right) Pr^{1/3} \quad (5)$$

où  $k_f = y_l k_l + y_v k_v$  la conductivité du mélange et  $l_c = 4\epsilon / v$  la longueur caractéristique. Enfin, la température du solide est recalculée après intégration des transferts thermiques dans la matrice fluide.

Résoudre un problème d'optimisation multicritère revient à rechercher l'optimum de plusieurs objectifs. Cependant, les optimums globaux n'existent pas forcément. Par conséquent, l'optimisation a pour but de trouver l'ensemble des meilleurs compromis pour toutes les fonctions objectifs. L'ensemble de ces solutions est appelé le front de Pareto. L'algorithme génétique NSGA-II [8] est utilisé pour résoudre ce problème d'optimisation multicritère sous contraintes. Les variables et les objectifs sont définis dans chaque partie. Dans notre étude, nous avons utilisé un domaine de calcul rectangulaire de dimension constante  $L * H$  avec  $L = 0,1 \text{ m}$  et  $H = 0,02 \text{ m}$  avec un maillage cartésien régulier de  $N_x * N_y$  éléments (nombre de variables).  $\Delta x = L / N_x$  et  $\Delta y = H / N_y$  sont les tailles des mailles, respectivement.

## 3. Résultats d'un problème d'optimisation mono-objectif

### 3.1. Conduction de chaleur

L'espace est composé de  $N_x * N_y = 100 * 50$  éléments conducteurs et isolants. Une condition limite de type symétrie est appliquée au bord droit du domaine (pointillés sur la figure 1). Une condition de température  $T_{dissipateur} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  est appliquée au Sud-Est du domaine (trait bleu figure 1). Les autres bords sont adiabatiques. Aucun fluide ne circule dans le domaine. Nous supposons que chaque élément isolant émet une source volumique de chaleur  $S_0$ . Le

système se place en régime permanent donc  $\partial T/\partial t = 0$ . La conductivité est  $N_k$  fois plus forte pour des éléments conducteurs que pour des éléments isolants :  $k_p = N_k * k_0$  sachant que la conductivité de l'isolant est égale à  $k_0 = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Les variables pour le problème d'optimisation correspondent aux éléments isolants (valeur 0) et conducteurs (valeur 1). Enfin, la résistance thermique adimensionnelle  $R_{thm}$  s'exprime en fonction de la température moyenne  $\bar{T}$  dans l'ensemble du domaine [9].

$$R_{thm} = \frac{\bar{T} - T_{dissipateur}}{S_0 L H / k_0} \quad (6)$$

Le problème d'optimisation est de trouver la meilleure topologie des éléments conducteurs et isolants afin de minimiser la résistance thermique. La proportion des éléments conducteurs est une contrainte qui est fixée à 30 %. La figure 1 présente la topologie obtenue par l'algorithme génétique pour la dernière itération. Cette topologie a une forme arborescente. En effet, pour éviter la surchauffe localisée du composant, les éléments conducteurs doivent se répartir dans tout le domaine. La cartographie de température montre que la chaleur émise par les éléments isolants est dissipée par les branches des éléments conducteurs. La chaleur est ainsi transportée jusqu'à la zone froide. Ce résultat a été aussi démontré dans l'article [9].

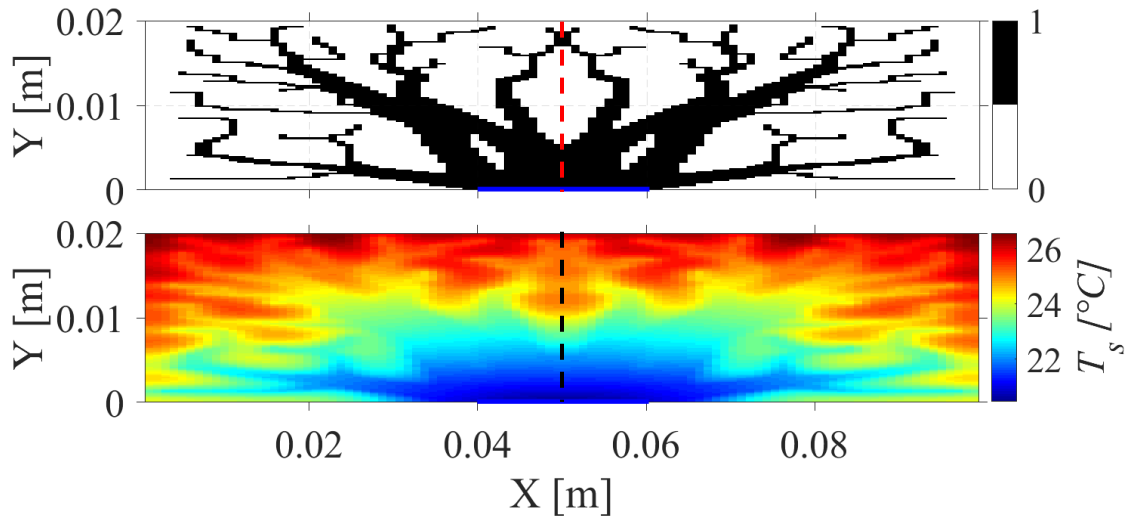


Figure 1 : Représentation de la meilleure répartition des éléments conducteurs et isolants (haut) et du champ de température du solide (bas) pour  $k_p/k_0 = 250$  et une proportion  $\phi = 30 \%$ .

### 3.2. Ecoulement fluide

L'espace est composé de  $10 * 10$  éléments fluides ou solides. Les éléments solides sont soumis à des conditions d'adhérence à la paroi (vitesse nulle aux bords) qui sont responsables des forces de frottements et des pertes de charges. Les éléments solides sont adiabatiques et le fluide se place en milieu diphasique avec  $\alpha_l = 50 \%$ . Le solide et le fluide considérés sont l'inox 316L et N-pentane respectivement. Le domaine est composé d'une entrée et d'une sortie pour le fluide sur les bords du domaine. Les autres frontières sont supposées imperméables et adiabatiques. En entrée, la vitesse d'écoulement est de  $0,02 \text{ m/s}$  et la température est de  $20 \text{ °C}$ . En sortie, la pression est de  $1 \text{ bar}$  et la température est de  $20 \text{ °C}$ . Le système se place en régime instationnaire. Les variables correspondent soit les éléments fluides (valeur 0), soit les éléments solides (valeur 1). Enfin, les pertes de charge  $\Delta p$  sont calculées à partir d'un bilan de pression entre l'entrée et la sortie de l'écoulement fluide.

$$\Delta p = \sum_{\text{entrée}} p - \sum_{\text{sortie}} p \quad (7)$$

L'algorithme génétique est ensuite appliqué pour obtenir la meilleure topologie qui minimise les pertes de charge. La proportion d'éléments solides dans le domaine est contrainte ici à 40 %. La figure 2 représente la meilleure répartition des éléments solides et fluides dans le cas où l'entrée et la sortie du fluide sont respectivement à l'Ouest (trait vert) et à l'Est (trait orange) du domaine. Les points noirs correspondent aux éléments solides et les points blancs aux éléments fluides. Nous observons que les éléments fluides se disposent pour former un canal droit. Les flèches bleues représentent le champ de vitesse de l'écoulement fluide. La norme du vecteur est constante au long du canal et est égale à  $0,02 \text{ m/s}$ . Le résultat est validé car le canal droit est un cas intuitif et incontestable pour minimiser  $\Delta p$ .

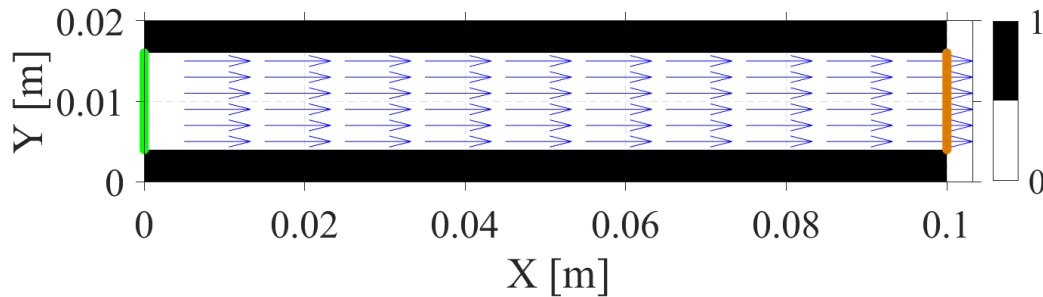


Figure 2 : Représentation de la meilleure topologie et des champs de vitesse (flèche bleue).

### 3.3. Écoulement fluide en milieu poreux

L'espace est composé de  $10 * 10$  éléments poreux. Les éléments poreux sont composés d'une phase fluide et d'une phase solide. Nous avons repris les mêmes conditions aux limites que le problème précédent. La procédure d'optimisation est de trouver la meilleure porosité pour chaque élément du domaine dans le but de minimiser les pertes de charge. Pour les variables, trois valeurs de porosités sont étudiées [0,5 ; 0,7 ; 0,9]. Une contrainte est imposée sur la proportion des éléments faiblement poreux :  $\phi$  est fixé à 40 %. La figure 3 présente que la meilleure répartition entre les éléments poreux forme un canal droit. Aucun élément n'a une porosité de 0,7. Nous remarquons que la porosité est plus grande au centre qu'en bordure car pour une même vitesse plus la porosité diminue, plus la différence de pression augmente. Étant donné que l'écoulement passe par le chemin qui lui est le moins contraignant, les pertes de pression doivent être le plus faible et la porosité la plus élevée. Le champ de vitesse est constant le long du canal et est environ égale à  $0,02 \text{ m/s}$  au centre et à  $10^{-4} \text{ m/s}$  au bord puisque l'écoulement peut aussi circuler pour une porosité de 0,5.

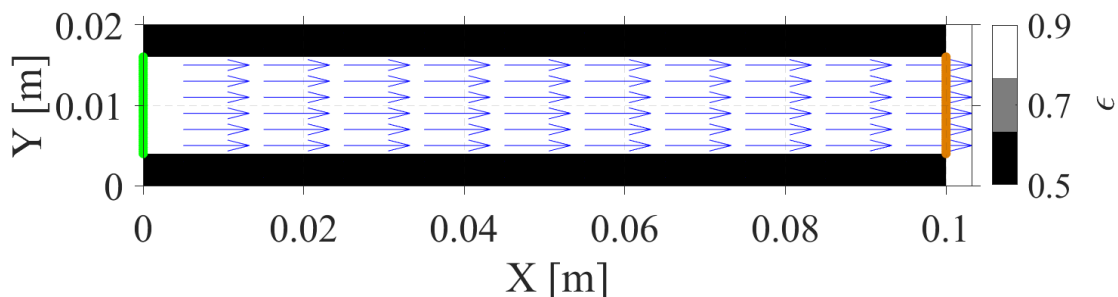


Figure 3 : Représentation de la meilleure topologie et du champ de vitesse (flèche bleue).

## 4. Résultats d'un problème d'optimisation multi-objectifs

### 4.1. Écoulement en milieu poreux avec transferts de chaleur

Soit un domaine composé de  $10 * 10$  éléments poreux. Les frontières du domaine sont composées d'une entrée et d'une sortie d'un fluide. Les conditions en entrée et en sortie sont

identiques comparées au problème précédent. Une portion du bord Sud est soumise à une condition de température de 100 °C (trait jaune sur la figure 4) et les autres frontières sont adiabatiques et imperméables. Nous supposons que la matrice solide ne conduit pas la chaleur. Nous avons utilisé deux valeurs de porosité [0,1 ; 0,9] pour chaque maille. La proportion des éléments faiblement poreux est fixée à 40 %. Deux bilans sont effectués, un pour les pertes de charge (voir équation 7) et un autre pour la puissance thermique :

$$P_{thm} = \sum_{sortie} P - \sum_{entree} P \text{ avec } P = \dot{m}_f C_{p_f} T_f \quad (8)$$

L'algorithme génétique est appliqué pour déterminer la répartition d'éléments poreux. L'objectif est de minimiser les pertes de charge et de maximiser la puissance thermique échangée. La figure 4 montre l'existence d'un front de Pareto puisque les pertes de charge et la puissance thermique sont de natures différentes et n'évoluent pas dans le même sens. En effet, le minimum de pertes de charge est obtenu en dégradant la puissance thermique et inversement. Chaque solution du front de Pareto correspond à une cartographie. Les résultats montrent que le minimum de pertes de charge (figure 4c) correspond au canal droit et que le maximum de puissance thermique (figure 4a) permet d'avoir un écoulement qui plonge vers la bordure Sud pour évacuer la chaleur émise. La topologie optimale (figure 4b) est obtenue grâce à la méthode d'aide à la décision TOPSIS [10]. Cette topologie est un mixte des deux autres topologies et permet une grande dissipation de la chaleur pour des pertes de charge faibles.

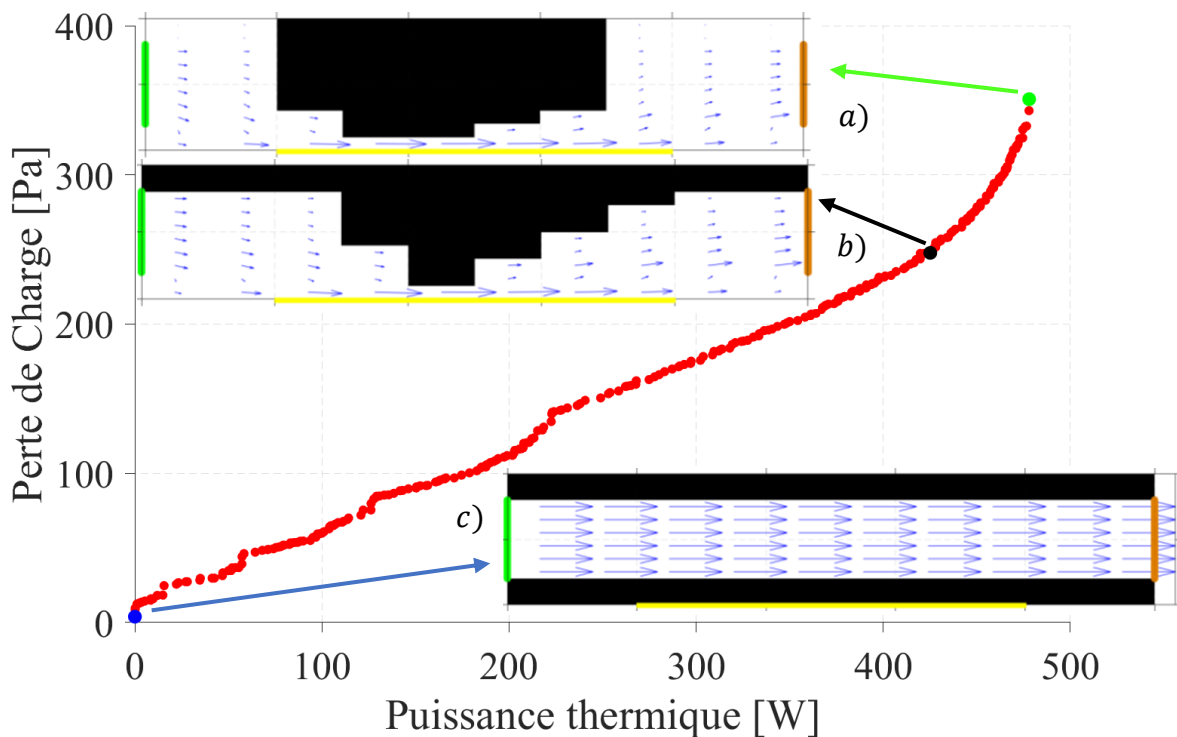


Figure 4 : Représentation du front de Pareto. La topologie a) correspond au maximum de puissance thermique, la topologie c) au minimum de perte de charge. La topologie optimale est obtenue avec TOPSIS b).

#### 4.2. Cas d'application : écoulement en milieu poreux avec termes sources dispersés

Soit un espace composé de 10 \* 10 éléments poreux. Un fluide entre sur la frontière Ouest et sort sur la frontière Est. Les conditions en entrée et en sortie de l'écoulement sont similaires que le problème précédent. Les autres bordures sont imperméables et adiabatiques. A l'intérieur du domaine, deux sources de chaleur sont implémentées (carrés jaunes sur la figure 5). La

source au Nord-Ouest émet une densité de flux  $S_1$  et la deuxième source émet une densité de flux  $S_2 < S_1$ . Les variables du problème d'optimisation correspondent à la porosité de chaque cellule, les valeurs peuvent être 0,1 ou 0,9. Les objectifs sont de minimiser les pertes de charge (équation 7) et de maximiser la puissance thermique (équation 8). La proportion  $\phi$  fixe le pourcentage des éléments faiblement poreux dans le domaine :  $\phi = 60\%$ .

L'étude d'optimisation multi-objectifs permet de fournir le front de Pareto tracé dans la figure 5 en haut. La topologie pour le minimum de pertes de charge (figure 5c) correspond à un canal droit plus rétréci comparé aux études précédentes car la proportion est de 60 %. Les pertes de charge ne sont pas égales à 0 puisque certains éléments faiblement poreux bloquent

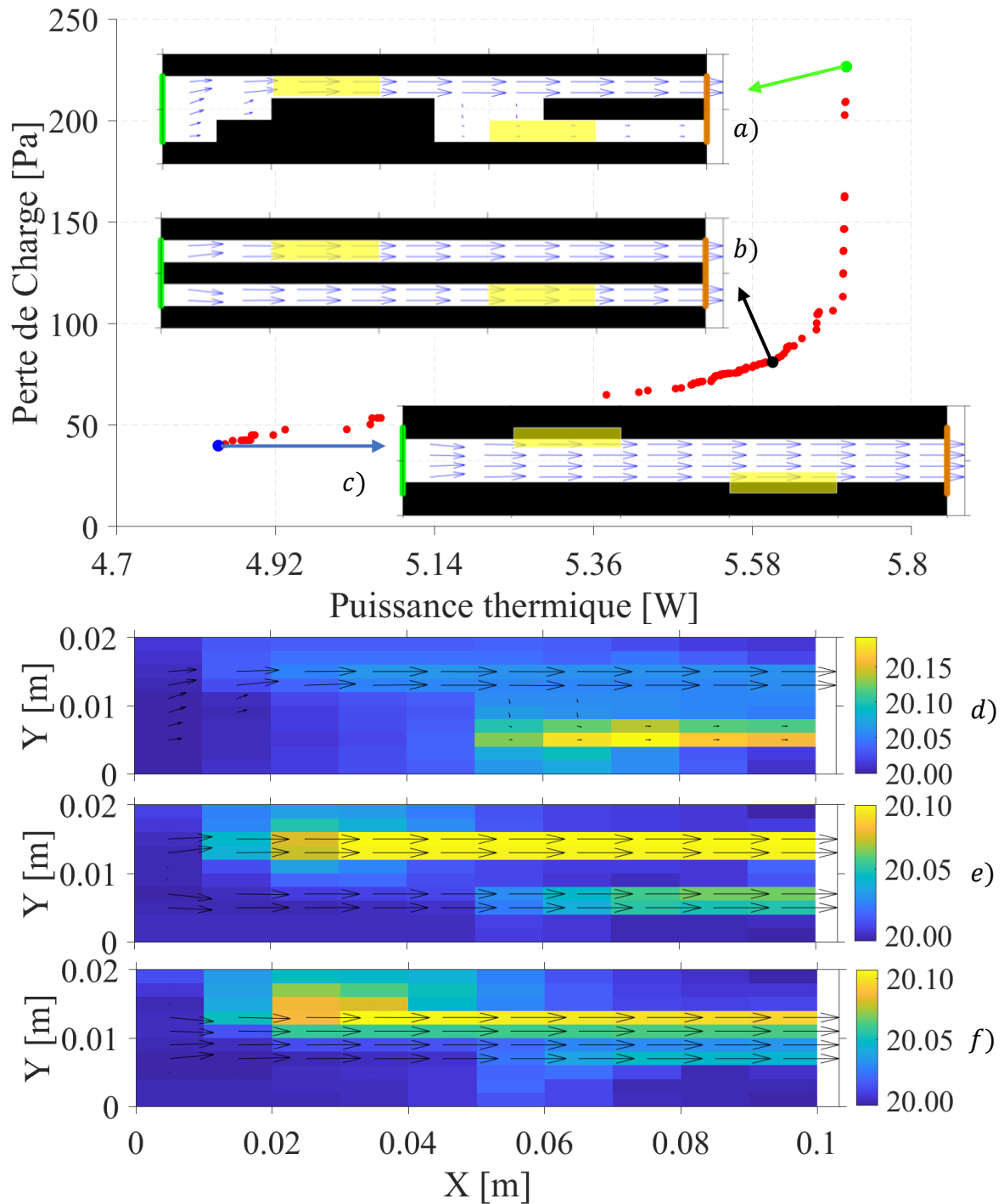


Figure 5 : Représentation du front de Pareto, des cartographies de la température du fluide et de la vitesse d'écoulement pour le maximum de  $P_{thm}$  a), pour le minimum de  $\Delta p$  c) et pour la solution optimale b).

l'entrée. De plus, pour le maximum de puissance thermique (figure 5a), l'écoulement se dirige sur la source de chaleur avec la plus forte densité de flux puis se divise en deux conduites qui vont évacuer la chaleur des deux sources. La topologie optimale correspond à deux canaux droits (figure 5b). Dans ce dernier cas, les pertes de charge sont plus élevées car la surface entre les éléments de forte et de faible porosité est plus grande donc il y a plus de force de frottement. La figure 5 en bas montre la température du fluide et la vitesse d'écoulement illustrée par les flèches. La température du fluide augmente au niveau des sources de chaleur puisqu'elle est dépendante de la température du solide. De plus, la cartographie 5d) a une puissance thermique plus grande puisque la différence de température est plus élevée. L'écoulement dissipe mieux la chaleur lorsque sa vitesse est élevée. La cartographie 5f) n'évacue pas correctement la chaleur des sources donc la différence de température est plus faible. Nous remarquons que l'écoulement ne dissipe pas suffisamment la chaleur de la source au Nord-Ouest car le fluide s'échauffe à l'endroit où la vitesse est nulle. La cartographie 5e) permet d'avoir une température assez élevée et donc de dissiper les deux sources de chaleur.

## 5. Conclusion

Dans cette étude, nous avons appliqué une procédure d'optimisation topologique appliquée à la conduction de chaleur, à l'écoulement d'un fluide et à l'écoulement d'un fluide en milieu poreux avec transferts de chaleur. Les résultats permettent de valider la méthodologie avec des topologies intuitives. Ensuite, les topologies obtenues pour le cas applicatif semblent cohérentes puisqu'elles permettent de minimiser les pertes de charge et de maximiser la puissance thermique échangée. Une perspective intéressante serait d'utiliser différentes géométries plus complexes car le canal droit est le plus intuitif. De plus, tout au long de cette étude, la proportion  $\phi$  est une contrainte que nous avons maintenue constante. Cependant,  $\phi$  doit être une variable du problème dans le cas où l'on souhaiterait optimiser la masse.

## Références

- [1] Haertel, Jan & Nellis, Gregory. (2017). A Fully Developed Flow Thermofluid Model for Topology Optimization of 3D-Printed Air-Cooled Heat Exchangers. *Applied Thermal Engineering*. 119. 10.1016/j.applthermaleng.2017.03.030.
- [2] Engelbrecht, K. & Martínez-Maradiaga, David & Haertel, Jan. (2019). Design and Testing of Topology Optimized Heat Sinks for a Tablet. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 142. 118429. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.07.079.
- [3] Wildi-Tremblay, Philippe & Gosselin, Louis (2007). Layered porous media architecture for maximal cooling; *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 50, no. 3-4, 464-478
- [4] Patankar, S. (1980). *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press.
- [5] Godunov, S. K. (1959). A finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Sbornik: Mathematics*, vol. 47, 357-393.
- [6] Toro, E. F., Spruce, M., & Speares, W. (1994). Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, Vol. 4, No. 1, 25-34.
- [7] Ergun, Sabri. "Fluid flow through packed columns." *Chem. Eng. Prog.* 48 (1952).
- [8] Deb K., Pratap A., Agarwal S. and Meyarivan T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE TRANSACTIONS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*.
- [9] Boichot, Raphaël & Fan, Y. (2016). A genetic algorithm for topology optimization of area-Topoint heat conduction problem. *International Journal of Thermal Sciences*. 108. 209-217. 10.1016/j.ijthermalsci.2016.05.015.
- [10] Wang J-J., Jing Y-Y., Zhang C-F. and Zhao J-H. (2009) Review on multi-criteria decision analysis aid in sustainable energy decision-making. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*.