

Modélisation réduite locale des transferts radiatifs dans un tokamak par une méthode hiérarchique basée sur les facteurs de Gebhart

Mickaël LE BOHEC^{1*}, Fabrice RIGOLLET¹, Charly TALATIZI², Marie-Hélène AUMEUNIER², Jonathan GASPAR¹, Christophe LE NILIOT¹

¹ Aix Marseille Université, CNRS, IUSTI UMR 7343, 13453, Marseille, France

² CEA Cadarache/Institut de Recherche sur la Fusion par confinement Magnétique, 13108 Saint-Paul-lez-Durance cedex, France

* (auteur correspondant : mickael.le-bohec@univ-amu.fr)

Résumé - Nous traitons la question de l'approximation de l'opérateur de transport $\mathbf{I} - \mathbf{RF}$ de l'équation des radiosités car dans une scène complexe, comme un tokamak, le nombre de mailles n nécessaire à sa description est très important. Les facteurs de forme entre les éléments sont alors très nombreux (n^2) et de plus très lourds à obtenir, notamment en raison des obstructions. Nous introduisons donc une méthode hiérarchique basée sur les facteurs de Gebhart calculés pour une zone d'intérêt où la précision de la solution est prioritairement recherchée. Nous montrons pour cela que les facteurs de Gebhart sont reliés au concept d'importance dans le domaine du rendu d'image.

Nomenclature

Symboles latins

F	facteur de forme, –
\mathbf{F}	matrice des facteurs de forme, –
G	facteur de Gebhart, –
\mathbf{G}	matrice des facteurs de Gebhart, –
J	radiosité, $W \cdot m^{-2}$
\mathbf{J}	vecteur des radiosités, $W \cdot m^{-2}$
\mathbf{L}	vecteur des luminances, $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$
M°	émittance noire, $W \cdot m^{-2}$
\mathbf{M}°	vecteur des émittances noires, $W \cdot m^{-2}$
n, h	nombre d'éléments dans une scène, –
O	Complexité algorithmique asymptotique, –
p	nombre d'éléments dans la ROI, –
\mathbf{R}	matrice diagonale des réflectivités, –
S	surface, m^2
\mathbf{S}	matrice diagonale des surfaces, m^2
T	température, $^\circ C$
\mathbf{T}	opérateur de transport, –

Acronyme

ROI Region Of Interest

Symboles grecs

ϵ	écart, –
ε	émissivité, –
$\mathbf{\varepsilon}$	matrice diagonale des émissivités, –
δ_i	vecteur de Kronecker, –
ρ	réflectivité, –
τ_r	taux de réduction, –
ψ	importance, –
$\boldsymbol{\psi}$	vecteur des importances, –
ψ^e	importance émise, –
$\boldsymbol{\psi}^e$	vecteur des importances émises, –

Indices et accent

i, j	indices d'éléments
i_j	de l'élément i vers l'élément j
\sim	grandeur approchée

1. Introduction

Dans un tokamak, le contrôle de la température des composants exposés au plasma peut être effectué au moyen d'une caméra infrarouge. Malheureusement, le lien entre les luminances mesurées et les températures recherchées n'est pas trivial lorsque les surfaces sont réfléchissantes. En effet, dans une telle situation une mesure ne représente pas simplement la puissance émise par la surface vue. Elle est en réalité perturbée par des réflexions provenant du reste de la scène, particulièrement dans les tokamaks de nouvelle génération tels que WEST et ASDEX Upgrade

où les surfaces intérieures observées sont métalliques (tungstène majoritairement). L'obtention d'une solution globale est donc nécessaire pour permettre de discriminer la part réfléchie de celle émise et ainsi remonter à la température. Ceci est valable même si une faible partie de la scène est vue par la caméra.

Une démarche inverse [1] est nécessaire pour retrouver les causes (les températures), à partir des effets observables (les luminances mesurées). Une telle démarche nécessite la minimisation progressive de l'écart entre des mesures et une solution obtenue à partir d'un modèle physique du problème, qualifié de modèle direct. Les températures sont d'abord estimées puis modifiées à chaque itération de sorte que les luminances reçues par la caméra et prédites par le modèle soient suffisamment proches de celles mesurées. On en déduit alors que ces dernières températures sont réellement celles de la scène. Le problème inverse peut également porter sur l'identification d'un profil d'émissivité connaissant les températures.

Puisqu'il faut résoudre plusieurs fois le problème pour chaque estimation, il est nécessaire que cette résolution soit la plus rapide possible. Le modèle direct utilisé ici est celui des radiosités [2, 3, 4], qui consiste en la construction explicite d'un opérateur de transport $\mathbf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{RF}$. Grâce à celui-ci, il n'est plus nécessaire de résoudre à chaque fois le coûteux problème des chemins optiques, chaque nouvelle solution ne demandant plus que la résolution d'un système linéaire, équivalent à l'inversion de la matrice \mathbf{T} . Dans sa version la plus courante, ce modèle suppose que le milieu est transparent et que les surfaces sont opaques, grises et diffuses (la radiosité est ainsi définie par $\mathbf{J} = \pi\mathbf{L}$; nous conservons ces notations même si les quantités radiatives calculées le sont en réalité dans la bande spectrale $\Delta\lambda$ de la caméra). C'est dans ce cadre que nous nous plaçons. Une fois le domaine discrétisé en n éléments sur lesquels la température, la réflectivité et l'éclairement sont supposés uniformes, l'équation discrète à résoudre est la suivante :

$$J_i = \varepsilon_i M_i^\circ + \rho_i \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j \quad (1)$$

soit sous forme matricielle :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{RF})\mathbf{J} = \varepsilon\mathbf{M}^\circ \quad (2)$$

Le facteur de forme F_{ij} traduit le couplage géométrique entre les éléments i et j . Il représente la part d'énergie radiative quittant la surface i et arrivant directement sur j . La principale difficulté de ce problème réside dans l'évaluation de ces n^2 facteurs qui composent l'opérateur de transport \mathbf{T} . Par ailleurs, si la scène présente des obstructions, ils ont chacun un coût de $O(n)$ relatif à la recherche d'un éventuel obstacle entre i et j parmi les $n - 2$ autres éléments. La complexité globale du problème est donc de $O(n^3)$ et il devient vite inenvisageable de vouloir obtenir l'opérateur complet pour des scènes complexes (à partir de quelques milliers de mailles). On cherche donc plutôt une approximation $\tilde{\mathbf{T}}$. Cela aura pour effet bénéfique d'accélérer la boucle itérative du problème inverse [1].

Un autre inconvénient de ce modèle est qu'il impose de connaître l'intégralité du champ de radiosité pour avoir accès à celle d'une surface particulière. Par analogie avec les schémas numériques d'Euler, on peut le qualifier d'*implicite* car il nécessite l'inversion d'une matrice. Or lors d'une mesure par thermographie, seules quelques surfaces sont vues et par conséquent, seules quelques radiosités ont un intérêt. Une reformulation de ce modèle radiatif permet de s'affranchir de cette contrainte. Pour cela, le terme d'éclairement est décomposé en une somme pondérée des émittances noires [5] :

$$J_i = \varepsilon_i M_i^\circ + \rho_i \sum_{j=1}^n G_{ij} M_j^\circ \quad (3)$$

soit sous forme matricielle :

$$\mathbf{J} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{RG})\mathbf{M}^\circ \quad (4)$$

Les termes G_{ij} sont appelés facteurs de Gebhart et représentent la part d'énergie émise par l'élément i qui est absorbée par j quel que soit le trajet emprunté. Un facteur de Gebhart non nul n'implique donc pas que les deux éléments se voient mutuellement. Cette fois-ci, un produit matriciel suffit, cette formulation peut ainsi être qualifiée d'*explicite*.

Cette formulation paraît tout à fait adaptée à une démarche de réduction de modèle. En effet, si notre zone d'intérêt (ROI - Region Of Interest) comprend p éléments, notre opérateur ne requiert plus que pn coefficients au lieu des n^2 du schéma implicite. Malheureusement, les facteurs de Gebhart sont intimement liés aux facteurs de forme et l'ensemble de la matrice \mathbf{F} est nécessaire pour les obtenir :

$$G_{ij} = F_{ij}\varepsilon_j + \sum_{k=1}^n \rho_k F_{ik} G_{kj} \quad (5)$$

soit sous forme matricielle :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{FR})\mathbf{G} = \mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

Cette approche de réduction ne peut donc être envisagée qu'a posteriori.

Dans ce papier nous commencerons par introduire brièvement la méthode hiérarchique des radiosités qui permet d'obtenir une approximation $\tilde{\mathbf{T}}$ de l'opérateur de transport $\mathbf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{RF}$. Nous montrerons qu'il est possible de lui demander de privilégier certaines zones d'une scène radiative au moyen d'une quantité appelée *Importance*. Nous démontrerons que celle-ci est liée aux facteurs de Gebhart et discuterons des conséquences de ce constat. Enfin, nous présenterons notre démarche de réduction dans son ensemble et l'illustrerons dans le contexte du contrôle par thermographie de la température des composants exposés au plasma dans le tokamak WEST.

2. Approximation de l'opérateur de transport

2.1. Méthode hiérarchique des radiosités

La méthode hiérarchique des radiosités [6, 7] repose sur le fait que les transferts radiatifs peuvent être évalués à des niveaux de détail différents suivant leur influence sur la solution. Les échanges dont l'impact est modeste peuvent être évalués à un niveau de détail faible, tandis que ceux dont l'effet est important doivent l'être à un niveau élevé.

Cette méthode construit donc un maillage multirésolution de la scène dans le but de permettre aux différentes mailles d'interagir à des échelles adaptées. Ces différents niveaux sont constitués de subdivisions successives du maillage de départ. Plusieurs maillages de la scène coexistent donc pour permettre cette représentation.

La subdivision des éléments a pour but d'affiner le calcul des échanges. Au préalable, l'intensité des transferts est évaluée au moyen d'un *estimateur* puis comparée à un *seuil* fourni par l'utilisateur. Les éléments visés par les transferts dont l'estimateur est supérieur au seuil sont subdivisés. Cela aura pour conséquence de densifier le maillage là où les transferts sont les plus intenses.

Le raffinement, lorsqu'il est nécessaire, est effectué pour un couple de mailles donné ce qui signifie qu'un même élément peut interagir avec d'autres à des niveaux de détail différents.

La puissance reçue par une maille peut donc venir de multiples niveaux. L'étape de résolution devra donc faire communiquer ces différentes échelles pour pouvoir accéder à la solution.

En procédant ainsi, aucune zone de la scène n'est privilégiée et l'opérateur $\tilde{\mathbf{T}}$ obtenu est construit dans le but de fournir une précision équivalente partout.

2.2. L'importance

Il est possible de construire un opérateur $\tilde{\mathbf{T}}$ dont l'objectif est de connaître la luminance en une zone donnée de la scène. On utilise pour cela le concept d'*importance* [8, 9]. Il s'agit d'une quantité sans dimension qui est émise par la zone d'intérêt et qui remonte les chemins optiques dans le sens contraire de celui emprunté par la radiosité. Pour cette raison, elle est qualifiée de *duale* ou d'*adjointe* à la radiosité. Cette propriété se caractérise par le fait que l'équation d'importance fait intervenir l'opérateur de transport transposé \mathbf{T}^T :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{RF})^T \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^e \quad (7)$$

où $\boldsymbol{\psi}^e$ est la source d'importance et $\boldsymbol{\psi}$ est l'importance. L'importance émise vaut 1 dans la zone d'intérêt et 0 ailleurs :

$$\psi_i^e = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \text{ROI} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

L'importance ψ_j traduit la contribution de l'élément j à la radiosité de l'élément i . Plus elle est élevée et plus l'élément j sera *important* pour l'élément i . Pour autant, ψ_j n'est pas directement une proportion d'énergie et on ne peut malheureusement pas connaître la radiosité de i en fonction des importances des autres mailles.

Par ailleurs, il faut disposer de l'ensemble de l'opérateur \mathbf{T}^T pour connaître le champ d'importance d'une ROI. Cela ne semble donc pas particulièrement pertinent mis à part dans le but de tronquer l'opérateur a posteriori en négligeant les contributions peu importantes.

En revanche, cela fait sens si on l'insère dans la logique de la méthode hiérarchique. Dans ce contexte, les raffinements n'ont lieu que si les transferts sont vifs *et* qu'ils sont importants pour le calcul de la radiosité sur notre zone d'intérêt. Smits [8] a montré qu'une mesure de l'erreur totale sur la ROI s'écrivait à l'aide de l'importance :

$$\boldsymbol{\psi}^T \Delta \mathbf{T} \mathbf{J} \quad (9)$$

avec $\Delta \mathbf{T} = |\Delta(\mathbf{I} - \mathbf{RF})| = \mathbf{R} \Delta \mathbf{F}$ l'erreur sur l'opérateur de transport. En réalité cette expression est valable avec l'emploi de toute quantité duale à la radiosité. Le lien de j vers i sera donc raffiné si sa contribution $\psi_i \rho_i \Delta F_{ij} J_j$ à l'erreur totale (9) est supérieure au seuil de raffinement.

2.3. Liens entre l'importance et les facteurs de Gebhart

Nous présentons ici deux résultats originaux qui constituent l'apport théorique principal de ce papier. Par souci de clarté, les démonstrations sont données en annexe.

Le premier (10) montre qu'en un certain sens, les facteurs de Gebhart sont également duals de la radiosité :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{RF})^T \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\delta}_i \quad (10)$$

Le second (11) donne la correspondance entre l'importance et les facteurs de Gebhart dans le cas où seul l'élément i émet de l'importance :

$$\mathbf{G}^T \boldsymbol{\delta}_i = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\delta}_i)}{\rho_i} \quad (11)$$

L'expression (10) signifie que l'on peut donc utiliser les facteurs de Gebhart, où plus précisément les termes G_{ij}/ε_j , en lieu et place de l'importance avec l'avantage que cela a un sens physique bien déterminé puisqu'ils représentent une part d'énergie.

En pratique on ne le fait pas directement car les facteurs de Gebhart sont propres à un élément, c'est-à-dire qu'un seul élément peut être source à la fois, tandis que l'importance permet de faire des calculs pour plusieurs éléments importants. Les facteurs de Gebhart obligeraient donc à faire p calculs pour obtenir p opérateurs (avec p le nombre d'éléments dans la ROI). Au lieu de cela, on construit avec l'importance un unique opérateur capable de faire ces p calculs.

L'expression (11) permet cependant d'obtenir les facteurs de Gebhart de la ROI dans son ensemble $G_{roi \rightarrow j}$. En effet, elle n'est juste à proprement parler que lorsqu'un seul élément i n'est important et qu'on souhaite obtenir les facteurs de Gebhart G_{ij} . En réalité, elle demeure valable tant que l'émissivité est uniforme sur la ROI. Si ce n'est pas le cas et qu'on souhaite tout de même connaître la fraction d'énergie partant de la ROI et absorbée par chaque surface de la scène, il faut définir une réflectivité *équivalente* pour la ROI telle que par exemple :

$$\rho_{roi} = \frac{\sum_k^p S_k \rho_k}{\sum_k^p S_k} \quad (12)$$

On calcule donc l'importance qui permet d'accéder aux facteurs de Gebhart $G_{roi \rightarrow j}$ qu'on utilise ensuite dans le critère de raffinement (9).

Un autre aspect intéressant de la relation (10) est qu'elle permet, une fois l'opérateur $\mathbf{I} - \mathbf{RF}$ approximé par la méthode hiérarchique, d'obtenir les p champs de facteurs de Gebhart sans avoir à passer par le calcul de l'opérateur $\mathbf{I} - \mathbf{FR}$ de l'équation (6).

3. Réduction de modèle

Nous résumons ici les différentes étapes de notre démarche de réduction. Nous l'appliquons ensuite sur le tokamak WEST.

3.1. Démarche de réduction

0. La scène est composée de n éléments à la résolution la plus fine et impliquerait donc le calcul de n^2 facteurs de forme avec une méthode classique à matrice pleine.
1. Au lieu de faire cela, on se limite à l'évaluation de $\sum_k^h n_k$ facteurs de forme (h étant le nombre d'éléments dans le maillage hiérarchique et n_k le nombre de facteurs de forme associés à chaque maille k) grâce à la méthode hiérarchique assistée des facteurs de Gebhart $G_{roi \rightarrow j}/\varepsilon_j$ obtenus grâce à l'expression (11). Le lien de j vers i sera donc subdivisé si $(G_{roi \rightarrow i}/\varepsilon_i)\rho_i \Delta F_{ij} J_j$ est supérieur au seuil de raffinement.
2. On calcule les p champs de facteurs de Gebhart relatifs aux p éléments de notre ROI au moyen de l'expression (10).
3. On est alors en mesure de construire un nouvel opérateur ayant pour but d'obtenir seulement les radiosités de la ROI. Son expression est celle de la relation (4). Il comprend seulement pn coefficients et présente l'avantage de déterminer le champ de radiosité souhaitée par un produit matriciel plutôt qu'une inversion ce qui est intéressant pour son utilisation future dans une boucle itérative.

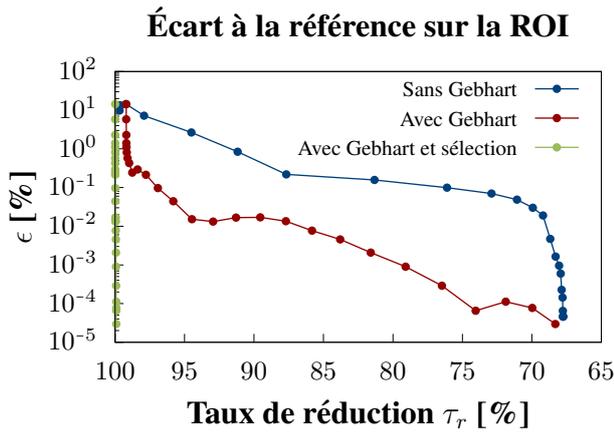


Figure 1: Évolution de l'écart à la référence sur la ROI en fonction du taux de réduction.

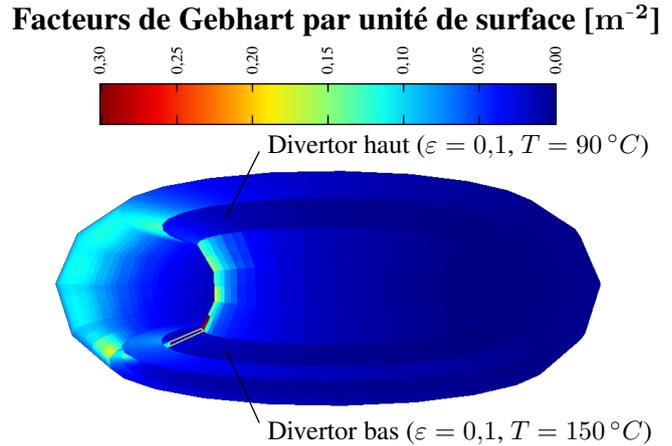


Figure 2: Facteurs de Gebhart par unité de surface pour la ROI (encadrée en jaune)

3.2. Résultats

En fournissant à la méthode hiérarchique un seuil de raffinement nul, on obtient la solution à laquelle aurait abouti la méthode des radiosités classique (avec matrice pleine) [7]. Cette solution constitue notre référence et nous permet de calculer un écart pour chaque seuil de raffinement ($\epsilon = (\sum_i S_i (J_i - \tilde{J}_i)^2 / \sum_i S_i J_i^2)^{1/2}$). Puisque les critères de raffinement sont différents si l'on utilise les facteurs de Gebhart ou non, on ne peut directement comparer les solutions entre elle pour un seuil donné. On compare donc l'écart des deux méthodes par rapport à la référence pour un taux de réduction donné. Celui-ci est défini comme la part de facteur de forme qu'il n'a pas été nécessaire de calculer.

Notre étude porte sur le tokamak WEST (figure 2). La ROI est une section du divertor bas (encadrée en jaune). Hormis les divertors, l'ensemble de la scène est à une température de $90^\circ C$ avec une émissivité de 0,3. Le maillage en lui-même représente $93 m^2$ et comporte à la résolution la plus fine 5904 éléments. La ROI est quant à elle composée de 8 éléments à la résolution la plus fine.

La figure 1 montre clairement que même si la méthode hiérarchique sans Gebhart permet d'obtenir un opérateur considérablement réduit, 91,2 % pour un écart de 0,84 %, l'utilisation des Gebhart pour focaliser la construction de l'opérateur sur la ROI aboutit à une réduction bien supérieure de 99,2 % pour un écart similaire de 0,80 %. La démarche complète, c'est-à-dire en sélectionnant a posteriori les seules p lignes qui concernent la ROI, produit même un opérateur réduit de 99,9 %.

4. Conclusion

Dans un travail précédent [1], nous avons été contraints de restreindre notre scène à un secteur de tore de 20° pour des raisons de capacité de calcul (modèle simplifié). Cette restriction, justifiée par la présence d'une périodicité thermique équivalente dans le tokamak (effet ripple), posait tout de même la question de la fermeture du domaine par des surfaces fictives.

Grâce au travail présenté dans ce papier, nous nous dotons de la capacité de faire des simulations sans restriction arbitraire de domaine (modèle réduit). Et cela, tout en construisant un opérateur de transport nécessaire pour la boucle itérative d'un problème inverse.

Pour cela, nous avons présenté la méthode hiérarchique des radiosités qui permet de limiter le nombre de facteurs de forme calculés en exploitant une logique multi-résolution dans laquelle tous les éléments n'interagissent plus à la résolution la plus fine. Nous avons montré ensuite que, même si la réduction est déjà significative, il est possible d'aller beaucoup plus loin en exploitant le fait que seule une zone restreinte de la scène nous intéresse (celle où sera résolu un problème inverse minimisant l'écart entre luminances mesurées et modélisées). L'opérateur peut donc être construit de sorte à fournir une solution plus fiable dans cette zone qu'ailleurs. Les facteurs de forme qui affinent la solution ailleurs sans l'améliorer dans notre zone d'intérêt sont ainsi jugés inutiles et ne sont pas calculés. Une reformulation du problème permet même de produire un opérateur qui ne donne la solution que sur cette zone d'intérêt. Nous avons ainsi présenté une méthode hiérarchique originale s'appuyant sur les facteurs de Gebhart. Nous avons également prouvé le lien existant entre l'importance (concept utilisé dans le domaine du rendu d'image) et les facteurs de Gebhart qui sont bien plus commodes pour une utilisation en thermique. Nos résultats montrent des écarts à une référence sur la ROI suffisamment faible (moins de 1 %) pour une fraction infime de l'opérateur (moins de 0,1 %).

Nous nous dirigeons maintenant vers l'utilisation de *clusterisation* afin de nous affranchir du nombre de mailles initiales car c'est une limitation de la méthode hiérarchique. Cela permettra de faire des calculs bien plus résolus géométriquement et thermiquement ce qui sera notamment utile pour des géométries moins régulières comme celle du tokamak allemand ASDEX Upgrade. Nous souhaiterions également étendre notre méthode à la construction d'un opérateur de transport spéculaire pour être en mesure de tenir compte de toute la diversité des effets radiatifs vus par la caméra.

Références

- [1] C. Talatizi, M.-H. Aumeunier, F. Rigollet, M. Le Bohec, J. Gérardin, J. Gaspar, C. Le Niliot, A. Herrmann : Inverse radiation problem with infrared images to monitor plasma-facing components temperature in metallic fusion devices. *Conference ISFNT*, Budapest, 22–27 septembre 2019.
- [2] M. F. Modest, *Radiative heat transfer*, Academic press, 2013.
- [3] Howell, J. R. and Menguc, M. P. and Siegel, R., *Thermal radiation heat transfer*, CRC press, 2015.
- [4] M. F. Cohen, J. R. Wallace : *Radiosity and realistic image synthesis*. Elsevier, 1993.
- [5] B. Gebhart : Surface temperature calculations in radiant surroundings of arbitrary complexity for gray diffuse radiation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 3(4) :341–346, Décembre 1961.
- [6] P. Hanrahan, D. Salzman et L. Aupperle : A rapid hierarchical radiosity algorithm. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 26(2) :273–282, Juillet 1992.
- [7] M. Le Bohec, D. Lemonnier, D. Saury : Modélisation réduite des transferts radiatifs dans l'habitat par une méthode hiérarchique. *Congrès de la SFT*, Nantes, 3–6 juin 2019.
- [8] B. E. Smits, J. R. Arvo et D. H. Salesin : An Importance-Driven Radiosity Algorithm. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, 25(4) :197–206, Juillet 1991.
- [9] J. P. Aguerre, E. Fernández, B. Beckers : Importance-driven approach for reducing urban radiative exchange computations. *Building Simulation*, 12(2) :231–246, Avril 2019.

5. Annexe : démonstrations des expressions (10) et (11)

5.1. Rappels

Les facteurs de Gebhart comme les facteurs de forme répondent à une loi de réciprocité ainsi qu'à la conservation de l'énergie :

	Facteur de forme	Facteur de Gebhart
Réciprocité	$(\mathbf{SF})^T = \mathbf{SF} \quad (13)$	$(\varepsilon \mathbf{SG})^T = \varepsilon \mathbf{SG} \quad (14)$
Conservation de l'énergie	$\sum_j F_{ij} = 1 \quad (15)$	$\sum_j G_{ij} = 1 \quad (16)$

5.2. Facteurs de Gebhart et dualité

En partant de la réciprocité des facteurs de Gebhart (14), on peut écrire :

$$(\varepsilon \mathbf{S})^{-1} \mathbf{G}^T \varepsilon \mathbf{S} = \mathbf{G} \quad (17)$$

En multipliant à gauche par $(\mathbf{I} - \mathbf{FR})$ on a :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{FR})(\varepsilon \mathbf{S})^{-1} \mathbf{G}^T \varepsilon \mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{FR}) \mathbf{G} \quad (18)$$

D'après la définition des facteurs de Gebhart (6) et la réciprocité des facteurs de forme (13) :

$$(\mathbf{S} - \mathbf{F}^T \mathbf{SR})(\varepsilon \mathbf{S})^{-1} \mathbf{G}^T \varepsilon \mathbf{S} = \mathbf{F}^T \mathbf{S} \varepsilon \quad (19)$$

Puisque les matrices \mathbf{S} , \mathbf{R} et ε sont diagonales, leur produit est commutatif. Il en va de même pour leur inverse. Ainsi :

$$(\mathbf{S} - \mathbf{F}^T \mathbf{RS}) \mathbf{S}^{-1} \varepsilon^{-1} \mathbf{G}^T \varepsilon \mathbf{S} = \mathbf{F}^T \varepsilon \mathbf{S} \quad (20)$$

et donc :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \mathbf{R}) \varepsilon^{-1} \mathbf{G}^T \varepsilon \mathbf{S} = \mathbf{F}^T \varepsilon \mathbf{S} \quad (21)$$

soit :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{RF})^T \varepsilon^{-1} \mathbf{G}^T = \mathbf{F}^T \quad (22)$$

Introduisons maintenant le vecteur de Kronecker δ_i dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i . La multiplication à droite par δ_i permet de sélectionner la ligne i de \mathbf{G} :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{RF})^T \varepsilon^{-1} \mathbf{G}^T \delta_i = \mathbf{F}^T \delta_i \quad (23)$$

5.3. Correspondance entre importance et facteurs de Gebhart

On cherche à démontrer que si seule la surface i émet de l'importance ($\psi_e = \delta_i$) alors on a le résultat suivant :

$$\mathbf{G}^T \delta_i = \frac{\varepsilon(\psi - \delta_i)}{\rho_i} \quad (24)$$

Supposant (24) vraie, on peut écrire :

$$\rho_i \varepsilon^{-1} \mathbf{G}^T \delta_i = \psi - \delta_i \quad (25)$$

soit en multipliant à gauche par $(\mathbf{I} - \mathbf{RF})^T$ puis en injectant la relation (7) :

$$\rho_i (\mathbf{I} - \mathbf{RF})^T \varepsilon^{-1} \mathbf{G}^T \delta_i = (\mathbf{I} - \mathbf{RF})^T (\psi - \delta_i) = \mathbf{F}^T \mathbf{R} \delta_i = \mathbf{F}^T \rho_i \delta_i \quad (26)$$

en divisant par ρ_i des deux cotés, on retrouve la relation (23) qui est vraie donc (24) est vraie également.