

# Identifications par modèles réduits des propriétés thermiques de matériaux fortement hétérogènes

## Identifications by reduced models of thermal properties of highly heterogeneous materials

Ana Gabriela CHAVEZ CASTILLO<sup>1\*</sup>, Julie RATOVONKERY<sup>2\*</sup>, Yassine ROUIZI<sup>1</sup>, Kamilia ABAHRI<sup>3</sup>, Olivier QUEMENER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMEE, Université d'Evry, Université Paris-Saclay, 91020 Evry, France.

<sup>2</sup> LOCIE, Université Savoie Mont Blanc, 73370 Le Bourget du Lac, France

<sup>3</sup> Laboratoire de Mécanique et Technologie, École Normale Supérieure de Cachan, 94230 Cachan, France.

\*(auteur correspondant : a.chavez@iut.univ-evry.fr)

**Résumé** - L'objectif de cette étude est d'utiliser la réduction de modèle couplée à une procédure d'identification, afin de déterminer les caractéristiques thermiques d'un échantillon de bois épicéa. Un modèle numérique a été créé à partir d'une géométrie 3D de la structure réelle du matériau issue d'un scan de micro-tomographie à rayon X. Le temps de simulation avec le modèle réduit est 220 fois plus rapide que le modèle complet avec une erreur maximale de 0,02 [°C]. Les résultats d'identification restent très satisfaisants avec une erreur de l'ordre de 1%.

**Mots-clés** : Méthode inverse ; caractérisation thermique ; modèles réduits ; propriétés thermiques ; matériaux hétérogènes.

**Abstract** - The objective of this study is to use the modal method coupled to an identification procedure, in order to determine the thermal characteristics of a sample of spruce wood. A numerical model was created from a 3D geometry of a real structure of the material from an X-ray micro-tomography scan. The simulation time with the reduced model is 220 times faster than the full model with a maximum error of 0.02 [°C]. Identification results remain entirely satisfactory with an error around 1%.

**Keywords**: Inverse method; thermal characterisation; reduced models; thermal properties; heterogeneous materials.

### Nomenclature

$k$  Conductivité thermique, W/mK  
 $c$  Capacité calorifique volumique, J/m<sup>3</sup>K  
 $h$  Coefficient d'échange, W/m<sup>2</sup>K  
 $g$  Fonction d'essai, K  
 $S$  surface d'échange, m<sup>2</sup>  
 $T$  température, K

*Symboles grecs*  
 $\alpha$  Coefficient de pondération  
 $\xi$  Coefficient de Steklov, W/m<sup>2</sup>K  
 $\varphi$  Densité de flux, W/m<sup>2</sup>

*Indices et exposants*

$F$  fibres  
 $G$  gaz

## 1. Introduction

Cette étude s'inscrit dans la problématique de la caractérisation des matériaux bio-sourcés, appelés à jouer un rôle important dans le bâtiment dans les prochaines années, et notamment

le bois <sup>1</sup>. On cherche ici à travailler sur des microstructures réelles tridimensionnelles obtenues par tomographie à rayons X, afin de chercher à caractériser les propriétés intrinsèques des différents constituants. On s'affranchit dans cette étude du problème hygrothermique en considérant un bois sec, pour lequel on cherche la capacité calorifique et la conductivité thermique. La géométrie obtenue par tomographie est ainsi utilisée dans une approche inverse, qui utilise les outils de simulation numérique de façon itérative afin de remonter à l'identification du matériau bio-sourcé. L'originalité de ce travail est l'utilisation d'un modèle numérique réduit de type modal, qui évite toute simplification de la structure complexe du matériaux hétérogène.

## 2. Position du problème

On considère le Volume Élémentaire de Référence (VER) d'un bois sec, de dimension  $231 \times 231 \times 231 \mu\text{m}^3$  qui peut faire l'objet de 2 descriptions différentes :

### 2.1. Modèle homogène $T^{Ho}$

A l'échelle macroscopique, ce VER est considéré comme un matériau homogène pour lequel on connaît les propriétés thermiques globales (capacité thermique  $\bar{c}$  et conductivité orthotrope  $\bar{\mathbf{k}}$ ), déterminées expérimentalement. Différents scénarios thermiques peuvent être appliqués, caractérisés par des sollicitations sur deux surfaces du VER situées en vis-à-vis  $S_1$  ( $\varphi = 500 [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}]$ ) et  $S_2$  ( $h = 20 [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}]$ ). Toutes les surfaces autres que  $S_1$  et  $S_2$  sont adiabatiques, et les températures environnantes et initiales sont nulles. Présentée sous forme variationnelle, l'équation 1 donne accès au champ de température  $T^{Ho}$  :

$$\int_{\Omega} \bar{c} g \frac{\partial T^{Ho}}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} T^{Ho} \bar{\mathbf{k}} \vec{\nabla} g d\Omega - \int_{S_1} T^{Ho} h g d\Gamma + \int_{S_2} \varphi g d\Gamma \quad (1)$$

Dans cette équation,  $g \in H^1$  est la fonction test de ce problème variationnel, et les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont précisées dans le Tableau 1 en fonction des surfaces du VER présentées sur la figure 1.

	$S_1$	$S_2$
Scénario 1	$\Gamma_{xy}^0$	$\Gamma_{xy}^e$
Scénario 2	$\Gamma_{yz}^0$	$\Gamma_{yz}^e$
Scénario 3	$\Gamma_{zx}^0$	$\Gamma_{zx}^e$

Tableau 1 : Scénarios des sollicitations thermiques

### 2.2. Modèle hétérogène $T^{He}$

La tomographie de ce VER permet une description précise des deux phases qui constituent le bois. Elles sont caractérisées par des propriétés thermiques spécifiques : fibre (capacité  $c_F$  et conductivité isotrope  $k_F$ ) et gaz (capacité  $c_G$  et conductivité isotrope  $k_G$ ). L'application des

<sup>1</sup>Objectif de l'état français : atteindre 10% de construction bois dans les établissements publics d'aménagement, à horizon 2022 [1].

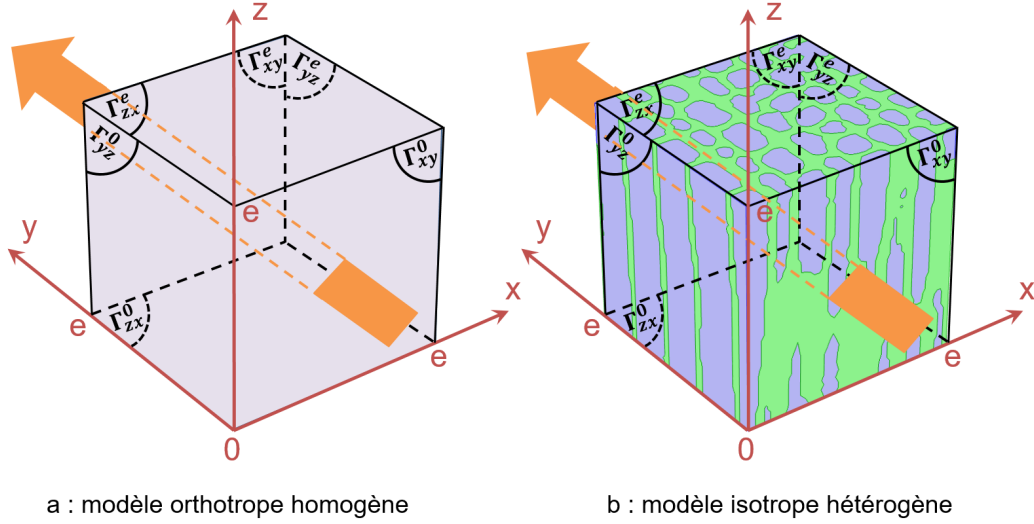


Figure 1 : Représentation des deux modèles du VER, soumis au scénario 1

différents scénarios présentés par le Tableau 1 pour cette géométrie est cette fois définie par l'équation variationnelle suivante, qui donne accès au champ de température  $T^{He}$  :

$$\begin{aligned}
c_F \int_{\Omega_F} g \frac{\partial T^{He}}{\partial t} d\Omega + c_G \int_{\Omega_G} g \frac{\partial T^{He}}{\partial t} d\Omega = \\
- k_F \int_{\Omega_F} \vec{\nabla} T^{He} \vec{\nabla} g d\Omega - k_G \int_{\Omega_G} \vec{\nabla} T^{He} \vec{\nabla} g d\Omega \quad (2) \\
- \int_{S_1} T^{He} h g d\Gamma + \int_{S_2} \varphi g d\Gamma
\end{aligned}$$

La discrétisation spatiale de ce problème est obtenue à partir d'un relevé tomographique à rayons X. Elle fait apparaître une géométrie complexe caractérisée par un grand nombre de degrés de liberté  $N \approx 100000$ . Le problème matriciel correspondant s'écrit, en respectant l'ordre des différentes intégrales de l'équation 2 sous la forme suivante :

$$(c_F \mathbf{C}_F + c_G \mathbf{C}_G) \dot{\mathbf{T}}^{He} = (k_F \mathbf{K}_F + k_G \mathbf{K}_G + \mathbf{H}) \mathbf{T}^{He} + \mathbf{U} \quad (3)$$

En partant de mesures générées par le modèle homogène orthotrope (Eq.1), l'objectif est d'estimer les propriétés des fibres ( $c_F$  et  $k_F$ ) qui apparaissent dans le modèle hétérogène (Eq.2), par comparaison entre les températures moyennes sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  obtenues par les deux modèles :

$$\begin{aligned}
\overline{T}_{S_i}^{Ho} = \overline{T}_{S_i}^{He}(k_F, c_F), \quad i = 1, 2 \\
\text{avec } \overline{T}_{S_i}^{Ho} \equiv \frac{1}{S_i} \int_{S_i} T^{Ho} d\Gamma \quad \text{et} \quad \overline{T}_{S_i}^{He} \equiv \frac{1}{S_i} \int_{S_i} T^{He} d\Gamma \quad (4)
\end{aligned}$$

Ce problème inverse engendre un grand nombre de simulations, incompatible avec un modèle numérique de grand taille de type éléments finis. On va alors chercher à construire un modèle numérique réduit de type modal.

### 3. Modèle réduit modal

La méthode modale s'appuie sur une décomposition du champ de température  $T$  sur un faible nombre  $\tilde{n}$  de fonctions spatiales connues  $\tilde{V}_i(M)$ , afin d'obtenir une approximation  $\tilde{T}$  :

$$T(M, t) \simeq \tilde{T}(M, t) = \sum_{i=1}^{\tilde{n} \ll N} \tilde{x}_i(t) \tilde{V}_i(M) \quad (5)$$

On note  $\tilde{x}_i(t)$  les états d'excitation de ces fonctions  $\tilde{V}_i(M)$ , qui sont alors les inconnues du problème. On utilise la méthode AROMM (Amalgam Reduction Order Modal Model) [2], qui s'appuie sur les étapes suivantes.

#### 3.1. Calcul de bases complètes par résolution de problèmes aux valeurs propres

On résout ici deux problèmes aux valeurs propres, afin d'obtenir deux bases de modes propres complémentaires :

- la base de Dirichlet est obtenue par résolution du problème aux valeurs propres suivant [2] :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega, & k_0 \Delta V_i^D = c_0 z_i^D V_i^D \\ \forall M \in \Gamma, & V_i^D = 0 \end{cases} \quad (6)$$

avec  $z_i^D$  la valeur propre associée à chaque vecteur propre  $V_i^D$ .

Les modes de Dirichlet permettent de reconstruire le champ de température dans le domaine  $\Omega$ , mais sont nuls sur les frontières (cf. figure 2).

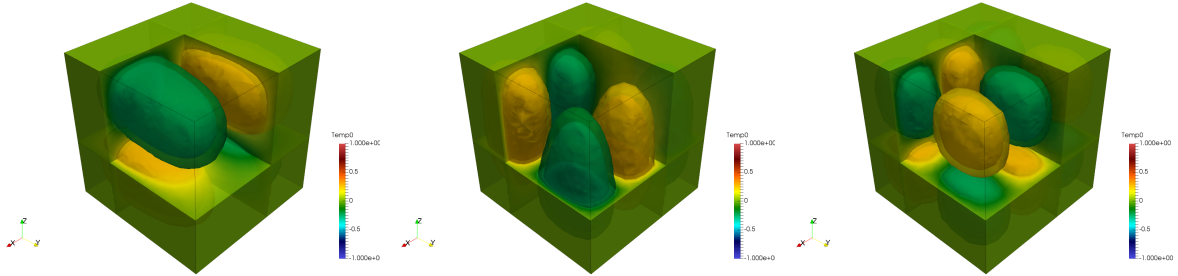


Figure 2 : Exemple de modes de Dirichlet calculés sur un cube homogène : les modes sont normalisés entre -1 et +1, l'isovaleur -0.2 en vert foncé et l'isovaleur +0.2 en jaune sont représentés

- La base de Steklov est définie par le problème aux valeurs propres suivant [2] :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega, & k_0 \Delta V_i^S = 0 \\ \forall M \in \Gamma, & k_0 \vec{\nabla} V_i^S \cdot \vec{n} = -z_i^S \zeta V_i^S \end{cases} \quad (7)$$

où  $z_i^S$  est la valeur propre de Steklov, associée au vecteur propre  $V_i^S$ , et  $\zeta$  le coefficient de Steklov, qui permet de respecter l'intégralité des dimensions de l'équation de la condition aux limites. Sa valeur est choisie de manière à équilibrer l'influence des termes liés à la valeur propre, soit :

$$\zeta = \frac{\int_{\Omega} c_0 d\Omega}{\int_{\Gamma} d\Gamma} \quad (8)$$

Les modes de Steklov sont définis à la fois sur le domaine et sur les frontières. Mais, à partir des 10<sup>ème</sup> modes, ces modes se concentrent surtout sur les surfaces et les arrêtes (voir figure 3).

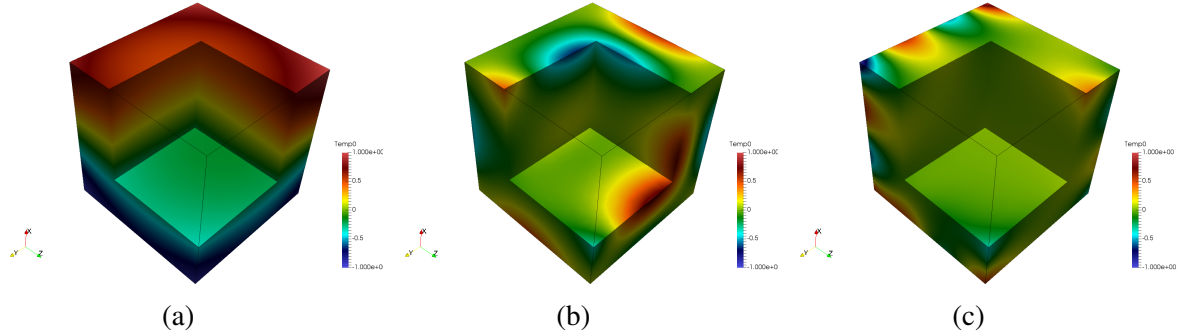


Figure 3 : Exemple de modes de Steklov calculés sur un cube homogène : les modes sont aussi normalisés entre -1 et +1, les isovalues sont représentés sous forme dégradée. (a) Mode localisé dans le volume et sur la frontière (b) Mode des surfaces et des arrêtes (c) Mode des arrêtes

La réunion de ces deux ensembles de vecteurs propres forme une base dans  $H^1$  et permet donc la reconstitution exacte d'un problème thermique. On montre que seul l'utilisation des  $\tilde{N}$  premiers modes (caractérisés par les plus grandes valeurs propres) suffit à reconstituer le problème thermique de façon satisfaisante. On ne calcule donc ici que 20% de chaque base  $V^D$  et  $V^S$ . Celles-ci sont obtenues à partir des valeurs de référence suivantes, choisies a priori :

$$\begin{aligned} \forall M \in \Omega_F, & \quad k_{F_0} = 0,53[\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}], & \quad c_{F_0} = 1,2.10^6 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}] \\ \forall M \in \Omega_G, & \quad k_{G_0} = 0,025[\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}], & \quad c_{G_0} = 1,2.10^3 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}] \end{aligned}$$

### 3.2. Réduction de la base

La réduction de la base initiale de Dirichlet Steklov s'appuie sur une méthode d'amalgame [3] qui correspond à une distribution de l'espace de  $\tilde{N}$  modes propres en  $\tilde{n}$  sous-espaces qui sont orthogonaux entre eux. Chaque sous-espace est constitué par un mode principal et quelques  $na_i$  modes mineurs. Pour assurer les propriétés de la base initiale, chaque mode sera utilisé qu'une seule fois, donnant ainsi :

$$\forall i \in \{1, \tilde{n}\} \quad \tilde{V}_i = V_{i,0} + \sum_{p=1}^{na_i} \alpha_{i,p} V_{i,p} \quad \text{et} \quad \tilde{N} = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} (na_i + 1) \quad (9)$$

Cette procédure s'appuie sur la connaissance des champs de température correspondant à des cas dits de référence. Dans cette étude, ces cas de référence correspondent aux trois scénarios du Tableau 1 et un scénario supplémentaire d'une simple relaxation thermique du VER, initialement à 30°C et refroidis par ses six faces. Pour tous ces cas, on impose des propriétés fixes. Alors que le gaz est parfaitement défini, la question se pose quant aux propriétés à utiliser pour les fibres. On choisit ici de façon arbitraire<sup>2</sup> :  $k_{F_{ref}} = 0,1[\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$  et  $c_{F_{ref}} = 1,2.10^6 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$ .

<sup>2</sup>Il aurait été possible de choisir une conductivité identique à celle utilisée pour la calcul de la base complète. A ce stade, il n'y a aucune règle, sinon de ne pas prendre une valeur identique à celle recherchée. Choisir 2 valeurs différentes de conductivités pour la calcul des base et pour la procédure d'amalgame montre la robustesse de la technique.

### 3.3. Équation d'état

L'équation d'état est obtenue par projection de l'équation de la chaleur (Eq. 3) sur la base réduite obtenue précédemment. Sous forme compacte on obtient alors :

$$(c_F \mathbf{L}_F + c_G \mathbf{L}_G) \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = (k_F \mathbf{M}_F + k_G \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_H) \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{N} \quad (10)$$

Les dimensions de ce problème correspondent alors à l'ordre  $\tilde{n}$  du modèle réduit. Sa résolution permet l'obtention des états d'excitation  $\tilde{x}$  et donc des températures  $T^{He}$ .

Dans notre cas le choix d'un modèle réduit d'ordre  $\tilde{n} = 200$  est effectué. La figure 4 montre l'évolution de la température moyenne  $\bar{T}_{S_1}^{He}$  par modèle complet et modèle réduit dans une configuration différente de celle utilisée pour la réduction du modèle, soit  $k_F = 0,3[\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$  et  $c_F = 4.10^6 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$ . Là encore les propriétés du gaz ne changeant pas puisqu'elles sont connues.

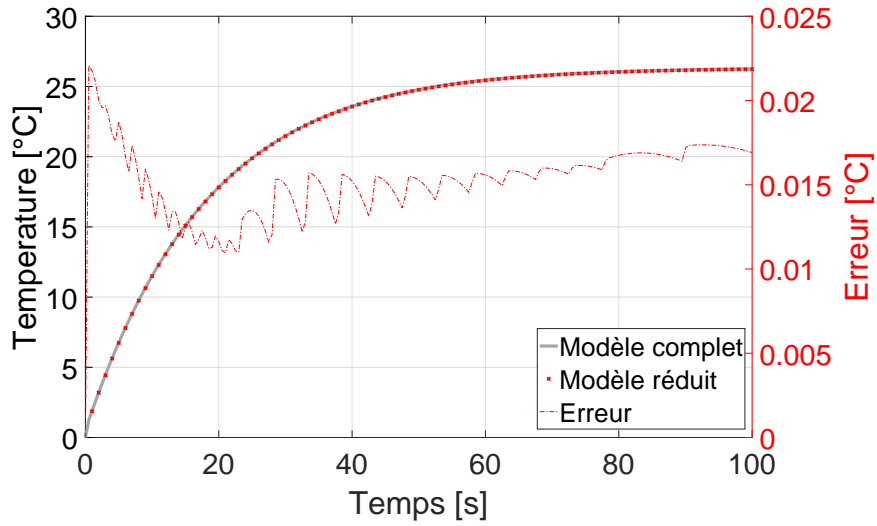


Figure 4 : Erreur de  $\bar{T}_{S_1}^{He}$  entre le modèle complet et modèle réduit

Le temps de calcul du modèle complet a été de  $t = 66 [s]$ , et celui du modèle réduit  $t = 0,3 [s]$ , ce qui permet d'exécuter une simulation 220 fois plus vite en ayant une erreur maximum de l'ordre de  $0,02 [^{\circ}\text{C}]$  (voir Figure 4). Les résultats obtenus sont très satisfaisants et montrent l'intérêt de ces modèles pour l'identification des paramètres  $k_F$  et  $c_F$ .

## 4. La méthode inverse

### 4.1. Principe

On cherche ici à identifier les valeurs de la conductivité thermique  $k_F$  et de la capacité calorifique  $c_F$  des fibres de bois du VER. Les observables  $\mathbf{Y}$  correspondant aux températures  $\bar{T}_{S_1}^{He}$  et  $\bar{T}_{S_2}^{He}$ , sont reliées au champ de température  $\mathbf{T}$  via une matrice d'observation  $\mathbf{E}$ . Ainsi, il est possible d'utiliser la formulation modale pour réduire la taille du problème inverse :

$$\mathbf{Y}^{He} = \mathbf{E}\mathbf{T}^{He} \approx \mathbf{E}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{X}} \quad (11)$$

Le principe de la méthode inverse se base sur la minimisation d'un critère quadratique basé sur l'écart entre la mesure  $\mathbf{Y}$  aux deux surfaces ( $\mathbf{E}\mathbf{T}^{Ho}(\bar{k}, \bar{c})$ ) et le résultat de la simulation

$\hat{\mathbf{Y}}^{\text{He}}$  effectuée par le modèle réduit pour les paramètres estimés  $\hat{k}_F$  et  $\hat{c}_F$  à chaque itération :

$$\mathcal{J}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_{mes}} \left( Y_{ij} - \hat{Y}_{ij}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \right)^2 \text{ avec } \hat{\boldsymbol{\beta}} = \{k_F, c_F\} \quad (12)$$

Cette procédure de minimisation utilise la méthode stochastique nommée ‘‘Particle Swarm Optimization’’ (PSO) [4], qui a pour avantage de s’affranchir des problèmes de minimums locaux potentiels.

## 4.2. Obtention des mesures

Afin d’obtenir les observables  $\bar{T}_{S_1}^{Ho}$  et  $\bar{T}_{S_2}^{Ho}$  à partir du modèle homogène (Eq. 1), on cherche ici à définir numériquement les valeurs de caractéristiques physiques  $\bar{k}$  et  $\bar{c}$ , normalement obtenues expérimentalement. Dans une première phase de test numérique, on reproduit donc la technique expérimentale fluxmétrique via le modèle hétérogène isotrope (Eq. 2), selon les 3 scénarios du Tableau 1. Avec l’hypothèse d’avoir un VER, on obtient le tenseur orthotrope de conductivité par la relation suivante :

$$k_{ii} = \frac{\varphi_i}{\bar{T}_{S_1} - \bar{T}_{S_2}} \times \frac{e}{S} \quad (13)$$

avec  $i = x, y, z$  selon le scénario utilisé

La capacité moyenne est obtenue par la relation :

$$\bar{c} = \frac{c_F \int_{\Omega_F} d\Omega + c_G \int_{\Omega_G} d\Omega}{\int_{\Omega_F} d\Omega + \int_{\Omega_G} d\Omega} \quad (14)$$

Pour des caractéristiques de fibres  $k_F = 0,3 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$  et à  $c_F = 4.10^6 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$ , on obtient les valeurs suivantes :  $\bar{k}_{xx} = 0,087 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$ ,  $\bar{k}_{yy} = 0,099 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$ ,  $\bar{k}_{zz} = 0,123 [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$ , et  $\bar{c} = 1,558.10^6 [\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}]$ .

Notons que les conductivités  $k_{xx}$  et  $k_{yy}$ , orthogonales au sens des fibres sont relativement différentes l’une de l’autre, et inférieures à  $k_{zz}$  correspondant au sens des fibres. Ces valeurs sont alors utilisées dans le modèle homogène orthotrope pour donner accès aux observables  $\mathbf{Y} = \{T_{S_1}^{Ho}, T_{S_2}^{Ho}\}$ .

## 4.3. Résultats de l’identification

L’identification des propriétés thermiques  $k_F$  et  $c_F$  s’effectue à partir de la minimisation du critère  $\mathcal{J}$  (Eq. 12). On définit l’erreur relative sur chaque paramètre identifié par la relation :

$$\sigma_{\beta_i} = \frac{|\hat{\beta}_i - \beta_i|}{\beta_i} \quad (15)$$

L’ensemble des outils numériques (réduction, simulation, identification) ont fait l’objet d’un développement interne au laboratoire en C++. Trois estimations sont effectuées en considérant respectivement des sollicitations thermiques orientées selon les axes  $x$ ,  $y$ , puis  $z$  (Tableau 1). Le Tableau 2 montre l’efficacité de la méthode puisque pour tous les cas la précision est très satisfaisante autant pour la conductivité thermique que pour la capacité calorifique.

Sens de sollicitation	$k_F$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\hat{k}_F$	$\sigma_k$ [%]	$c_F$ [J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]	$\hat{c}_F$	$\sigma_c$ [%]	$t_{CPU}$ [h]
xx	0,3	0,299	0,230%	4,00E+06	4,051E+06	1,276%	4,1
yy		0,298	0,798%		4,042E+06	1,052%	5,2
zz		0,296	1,290%		4,048E+06	1,212%	3,6

Tableau 2 : Résultats de l'identification

Afin d'estimer l'effet de l'incertitude de la détermination expérimentale des coefficients globaux  $\bar{k}$  et  $\bar{c}$ , une dernière estimation est effectuée en considérant que toutes les propriétés du matériau homogène sont augmentées de 2%. Ce calcul est mené pour une sollicitation orientée selon l'axe  $x$  (scénario 1). L'augmentation de l'incertitude dans le processus d'identification atteint alors 2,9% pour la conductivité et 3,3% pour la capacité par rapport aux valeurs recherchées  $k_f = 0,3$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>] et  $c_f = 4.10^6$  [J.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>]. On voit ainsi que l'ordre de grandeur de l'augmentation de l'erreur d'identification reste du même ordre de grandeur que l'erreur expérimentale.

## 5. Conclusion

Cette étude numérique a permis de montrer les premières résultats d'une identification effectuée sur une géométrie issue d'une tomographie d'un échantillon de bois sec. L'utilisation de la méthode modale permet de réduire les degrés de liberté de  $N \approx 100000$  à  $\tilde{n} = 200$ , ce qui permet un gain de temps de simulation important. L'utilisation de l'algorithme d'optimisation comme la PSO, a permis d'une façon simple et efficace d'effectuer les identifications avec une précision tout à fait satisfaisante. Malgré l'utilisation d'un modèle réduit on note un temps de calcul significatif pour la procédure inverse, qui montre bien l'intérêt de la méthode modale pour ce type de géométrie caractérisée par un grand nombre de degrés de liberté. Ces résultats numériques sont prometteurs mais les premières essais expérimentaux qui ont été effectués ont montré la nécessité de choisir une taille de VER plus importante, ce qui est cohérent avec les deux conductivités radiales  $k_{xx}$  et  $k_{yy}$  différentes obtenues dans notre étude. Une fois cette difficulté levée une perspective très intéressante serait la prise en compte du comportement hygrothermique du bois, qui nécessiterait alors le couplage des différentes modèles réduits hydrique et thermique.

## Références

- [1] Conseil National de l'Industrie, "Plan d'action interministériel forêt - bois du 16/11/2018." Lien : [www.conseil-national-industrie.gouv.fr/actualites/filiere-foret-bois-annonce-d-plan-d-action-interministeriel-et-signature-du-contrat-de-filiere-2018-2020](http://www.conseil-national-industrie.gouv.fr/actualites/filiere-foret-bois-annonce-d-plan-d-action-interministeriel-et-signature-du-contrat-de-filiere-2018-2020), 2018.
- [2] S. Grosjean, B. Gaume, F. Joly, K. Vera, et A. Neveu, "A modal substructuring method for non-conformal mesh. application to an electronic board," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 152, 106298, 2020.
- [3] O. Quéméner, F. Joly, et A. Neveu, "The generalized amalgam method for modal reduction," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, pp. 1197–1207, 2012.
- [4] R. Poli, J. Kennedy, et T. Blackwell, "Particle swarm optimization," *Swarm Intelligence*, vol. 1, pp. 33–57, Jun 2007.