

Modèle analytique d'un caloduc capillaire cylindrique en régime permanent

Analytical steady-state model for capillary cylindrical heat pipes

Nicolas BLET^{1*}, Denis MAILLET¹

¹ Université de Lorraine, CNRS, LEMTA, F-54000 Nancy, France

*(auteur correspondant : nicolas.blet@univ-lorraine.fr)

Résumé – Un modèle thermo-hydraulique analytique de caloduc capillaire cylindrique en régime permanent est proposé dans ce papier. Basé sur une double transformée intégrale de Fourier, il s'appuie sur une représentation originale par quadripôles thermiques. Il permet de déterminer les champs de températures 3D, de pressions et de vitesses d'un caloduc soumis à des sollicitations non-uniformes à l'évaporateur et au condenseur. Les calculs sont comparés à des résultats expérimentaux et numériques de la littérature afin de conclure sur sa validité et son domaine d'utilisation.

Mots-clés : Caloduc cylindrique ; Modèle analytique tridimensionnel ; Quadripôles thermiques

Abstract – An analytical model of cylindrical capillary heat pipe in steady-state is introduced in this paper. Based on double Fourier integral transforms, it relies on an original quadrupoles representation. Three-dimensional temperature fields, and pressure and velocity fields are evaluated for a heat pipe under non-uniform heat sources at evaporator and condenser. Simulations are compared to experimental and numerical results from literature in order to conclude on its validation and its scope.

Keywords: Cylindrical capillary heat pipe; Analytical model; Thermal quadrupoles

Nomenclature

g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	θ	différence de température, K
h	coefficient d'échange, $W.m^{-2}K^{-1}$	λ	conductivité thermique, $W.m^{-1}K^{-1}$
h_v	chaleur latente, $J.kg^{-1}$	μ	viscosité dynamique, Pa.s
i	unité imaginaire	ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
k	perméabilité, m^2	ϕ	flux de chaleur, $W.m^{-1}$
L	longueur du caloduc, m	χ	fonction indicatrice
m	valeurs propres suivant ψ	ψ	coordonnée azimutale, rad
P	pression, Pa	<i>Indices et exposants</i>	
q	source de chaleur, $W.m^{-1}$	∞	ambiance
r	coordonnée radiale, m	A	zone adiabatique
R	rayon, m	C	condenseur
S	section, m^2	E	évaporateur
T	température, K ou °C	eq	équivalent
u	vitesse axiale, $m.s^{-1}$	i	interne
v	vitesse azimutale, $m.s^{-1}$	l	liquide
x	coordonnée axiale, m	o	externe
<i>Symboles grecs</i>		sat	saturation
α_n	valeurs propres suivant x	v	vapeur
γ	angle du caloduc avec l'horizontale, rad	w	mèche poreuse

1. Introduction

Les modèles numériques des caloducs capillaires, qu'ils soient cylindriques ou plats, deviennent aujourd'hui abondants, que ce soit par éléments ou volumes finis [1-3], ou par des méthodes plus récentes comme Lattice-Boltzmann [4]. Cependant, tous ces modèles sont encore assez coûteux en temps de calcul (plusieurs heures [5]) pour permettre à la fois un dimensionnement rapide du caloduc (à l'instar des modèles macroscopiques) et une estimation précise des transferts de chaleur. Ainsi, ces dernières années, un léger retour à l'utilisation de modèles analytiques a été observé [5,6]. Dans une optique de généralisation de la méthode de mise en œuvre de ce dernier type de modèles analytiques, le modèle élaboré s'appuie sur l'utilisation de transformations intégrales de Fourier et, de manière originale, sur une représentation par quadripôles thermiques. Il permet de modéliser les transferts de chaleur tridimensionnels conductifs au sein de l'enveloppe et de la mèche poreuse du caloduc, ainsi que les écoulements de vapeur et de liquide, à l'instar des modèles précédents [5,6].

2. Description du problème et hypothèses

Le problème considéré est celui d'un caloduc cylindrique capillaire en régime permanent. Les conditions thermiques externes au niveau des évaporateur(s), condenseur(s) et zone(s) adiabatique(s) peuvent dépendre des positions axiale x et azimutale ψ . En outre, le modèle développé s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- L'écoulement de vapeur est supposé unidirectionnel suivant x , alors que l'écoulement de liquide est supposé 2D au sein de la mèche poreuse.
- Les transferts de chaleur tridimensionnels sont évalués au sein de la paroi et du poreux. Les conductivités thermiques des solides et du fluide sont supposées constantes. Au sein de la mèche poreuse, les transferts thermiques sont supposés uniquement conductifs, l'écoulement de liquide étant de faible vitesse ; on modélise en outre cette zone par l'intermédiaire d'une conductivité thermique équivalente « poreux/liquide », notée λ_{eq} . En outre, les extrémités axiales du caloduc (en $x=0$ et $x=L$) sont supposées adiabatiques.
- Le fonctionnement du caloduc est supposé normal, avec une interface liquide/vapeur localisée au niveau la frontière de l'espace vapeur avec le poreux. Aucun effet thermique de la courbure de l'interface ou d'un bouchon liquide au condenseur n'est pris en compte.

3. Développement du modèle quadripolaire

3.1. Relations générales des transferts thermiques

Les transferts thermiques par conduction, dans la paroi ou dans le poreux, en régime permanent, vérifient l'équation de la chaleur tridimensionnelle cylindrique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

Pour faciliter la résolution analytique, on travaille plutôt en différence de températures par rapport à la température moyenne de saturation $\theta = T - \bar{T}_{sat}$. A partir des conditions aux limites (adiabatiques en x et périodiques en ψ), la transformée intégrale de Fourier complexe suivante peut être introduite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\tilde{\theta}_{nm}(r) = \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} \theta(x, \psi, r) \cos(\alpha_n x) e^{-im\psi} dx d\psi \quad (2)$$

avec $\alpha_n = n\pi/L$, valeurs propres suivant la longueur du caloduc. La transformation inverse associée, pour revenir dans le domaine spatial réel, s'écrit :

$$\theta(x, \psi, r) = \frac{1}{2\pi L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_{0m}(r) e^{im\psi} + \frac{1}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_{nm}(r) \cos(\alpha_n x) e^{im\psi} \quad (3)$$

En appliquant la transformation (2) à l'équation (1), on obtient les équations différentielles vérifiées par les transformées intégrales :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{\theta}_{nm}}{dr} \right) - \left(\alpha_n^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \tilde{\theta}_{nm} = 0 \quad (4)$$

En introduisant la transformée de la densité linéique et angulaire du flux radial $\phi = -\lambda r \cdot \partial \theta / \partial r$, la relation quadripolaire suivante entre deux rayons R_1 et R_2 , dans un même matériau, peut être écrite :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\theta}_{nm} \\ \tilde{\phi}_{nm} \end{pmatrix}_{r=R_2} = \begin{pmatrix} A_{nm} & B_{nm} \\ C_{nm} & D_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_{nm} \\ \tilde{\phi}_{nm} \end{pmatrix}_{r=R_1} \quad (5)$$

où les coefficients quadripolaires (identiques pour m et $-m$) ont pour expressions :

- $A_{00} = D_{00} = 1$; $B_{00} = -\ln(R_2/R_1)/\lambda$; $C_{00} = 0$
 - $A_{0m} = D_{0m} = \left[(R_1/R_2)^m + (R_2/R_1)^m \right] / 2$; $B_{0m} = \left[(R_1/R_2)^m - (R_2/R_1)^m \right] / (2\lambda m)$; $C_{0m} = \lambda m \left[(R_1/R_2)^m - (R_2/R_1)^m \right] / 2$
 - $A_{nm} = \alpha_n R_1 (I_{m2} K_{m+1} + I_{m+1} K_{m2}) + m (I_{m1} K_{m2} - I_{m2} K_{m1})$; $B_{nm} = [I_{m1} K_{m2} - I_{m2} K_{m1}] / \lambda$;
 $C_{nm} = \lambda \alpha_n^2 R_1 R_2 (I_{m+1} K_{m+2} - I_{m+2} K_{m+1}) - \lambda \alpha_n m R_1 (I_{m2} K_{m+1} + I_{m+1} K_{m2}) + \lambda \alpha_n m R_2 (I_{m1} K_{m+2} + I_{m+2} K_{m1}) + \lambda m^2 (I_{m2} K_{m1} - I_{m1} K_{m2})$
 $D_{nm} = \alpha_n R_2 (I_{m1} K_{m+2} + I_{m+2} K_{m1}) + m (I_{m2} K_{m1} - I_{m1} K_{m2})$
- avec les notations $(I/K)_{m/m+j} = (I/K)_{m/m+1} (\alpha_n R_j)$, où I_m et K_m sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre m , respectivement, de première et deuxième espèce.

La modélisation quadripolaire du présent problème thermique conductif permet de relier ainsi les valeurs du couple $(\tilde{\theta}_{nm}, \tilde{\phi}_{nm})$ entre les rayons externe R_o et interne R_i , par simple produit matriciel des quadripôles thermiques des deux couches (paroi et poreux). Les coefficients quadripolaires de ce modèle global seront notés A_{nm}^{HP} par la suite.

3.2. Condition limite à l'interface liquide/vapeur

3.2.1. Hypothèses et bilan sur l'écoulement de vapeur

Le bilan de matière de l'écoulement de vapeur s'écrit :

$$\frac{du_v}{dx} = -\frac{2}{R_i} u_{r,v} \Big|_{R_i} = -\frac{1}{\rho_v h_{lv} S_v} \int_{-\pi}^{\pi} \phi \Big|_{R_i} d\psi \quad (6)$$

avec u_v vitesse axiale moyenne de la vapeur, $u_{r,v} \Big|_{R_i}$ vitesse radiale moyenne de la vapeur à l'interface, reliée au flux total de changement de phase sur ψ en $r=R_i$.

En supposant que les pertes de charges de l'écoulement vapeur sont laminaires, suivant la loi de Darcy-Weisbach, et en négligeant les pressions dynamique et hydrostatique, le bilan de quantité de mouvement se réduit à :

$$\frac{dP_v}{dx} = -\frac{8\mu_v}{R_i^2} u_v \quad (7)$$

La dérivée de l'équation (7) par rapport à x , couplée à l'équation (6), conduit à la relation :

$$\frac{d^2 P_v}{dx^2} = \frac{8\mu_v}{\rho_v h_{lv} \pi R_i^4} \int_{-\pi}^{\pi} \phi \Big|_{R_i} d\psi = K_v \int_{-\pi}^{\pi} \phi \Big|_{R_i} d\psi \quad (8)$$

Enfin, en supposant que la température de saturation varie très peu autour de la température moyenne \bar{T}_{sat} , la courbe de pression vapeur est linéarisée en introduisant la pente $K_{sat} = dP_v / dT_v$, évaluée à cette température de référence.

3.2.2. Implications sur les transformées intégrales à l'interface

A partir de la relation (8) et de la linéarisation de la courbe de saturation, les valeurs et relations des transformées en $r=R_i$ suivantes peuvent être déduites :

$$\tilde{\phi}_{00} \Big|_{R_i} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_{n0} \Big|_{R_i} = -\frac{K_{sat} \alpha_n^2}{2\pi K_v} \tilde{\theta}_{n0} \Big|_{R_i} \quad \text{pour } n \neq 0 \quad (9)$$

En outre, en $r=R_i$, la définition de la température moyenne de saturation implique que $\tilde{\theta}_{00} \Big|_{R_i} = 0$ et l'uniformité de la température de vapeur suivant ψ implique que $\tilde{\theta}_{nm} \Big|_{R_i} = 0$, pour tout n et pour tout $m \neq 0$.

3.3. Couplage thermo-hydraulique

A partir du modèle quadripolaire global et des relations en $r = R_i$ précédentes, on peut exprimer l'ensemble des transformées inconnues externe et interne en fonction des transformées de θ en $r = R_o$.

De même qu'en $r = R_i$, les transformées fondamentales en θ et ϕ sont nulles en $r = R_o$, impliquant que la température moyenne externe est égale à la température moyenne de saturation, et que le bilan de flux de chaleur externe est nul (ce qui est cohérent avec le bilan thermique global du système). En outre, on obtient pour les harmoniques ($n \neq 0$) :

$$\left. \tilde{\phi}_{n0} \right|_{R_o} = \frac{\mathcal{C}_{n0}}{\mathcal{A}_{n0}} \left. \tilde{\theta}_{n0} \right|_{R_o} \quad \text{et} \quad \left. \tilde{\phi}_{nm} \right|_{R_o} = \frac{D_{nm}^{HP}}{B_{nm}^{HP}} \left. \tilde{\theta}_{nm} \right|_{R_o} \quad \text{pour } m \neq 0 \quad (10)$$

avec $\mathcal{A}_{n0} = A_{n0}^{HP} - \frac{K_{sat} \alpha_n^2}{2\pi K_v} B_{n0}^{HP}$ et $\mathcal{C}_{n0} = C_{n0}^{HP} - \frac{K_{sat} \alpha_n^2}{2\pi K_v} D_{n0}^{HP}$ issus du couplage thermo-hydraulique.

En $r = R_i$, les transformées non nulles ont pour expressions ($n \neq 0$) :

$$\left. \tilde{\theta}_{n0} \right|_{R_i} = \frac{1}{\mathcal{A}_{n0}} \left. \tilde{\theta}_{n0} \right|_{R_o}; \quad \left. \tilde{\phi}_{n0} \right|_{R_i} = \frac{-K_{sat} \alpha_n^2 / 2\pi K_v}{\mathcal{A}_{n0}} \left. \tilde{\theta}_{n0} \right|_{R_o} \quad \text{et} \quad \left. \tilde{\phi}_{nm} \right|_{R_i} = \frac{1}{B_{nm}^{HP}} \left. \tilde{\theta}_{nm} \right|_{R_o} \quad \text{pour } m \neq 0 \quad (11)$$

3.4. Expressions hydrauliques

3.4.1. Écoulement vapeur

A partir de la relation (8) et sachant que la pression de vapeur moyenne correspond à la pression de saturation à la température \bar{T}_{sat} , on peut exprimer la pression de vapeur suivant x à partir des transformées du flux en $r = R_i$:

$$P_v(x) = P_{sat}(\bar{T}_{sat}) - \frac{2K_v}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left. \tilde{\phi}_{n0} \right|_{R_i}}{\alpha_n^2} \cos(\alpha_n x) \quad (12)$$

L'expression des pertes de charges (7) nous permet de remonter à l'expression de la vitesse axiale moyenne de l'écoulement vapeur.

3.4.2. Écoulement liquide

Le bilan de matière de l'écoulement du liquide au sein de la mèche poreuse peut s'écrire :

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{R_l} \frac{\partial v_l}{\partial \psi} = \frac{2\pi R_i}{S_w} u_{r,l} \Big|_{R_i} = \frac{2\pi}{\rho_l h_{lv} S_w} \phi \Big|_{R_i} \quad (13)$$

avec u_l et v_l , respectivement, vitesses axiale et angulaire du liquide, $u_{r,l} \Big|_{R_i}$ vitesse radiale moyenne du liquide à l'interface, reliée au flux de changement de phase en $r=R_i$. Le rayon \bar{R}_l correspond au rayon moyen du poreux ($= (R_i + R_w)/2$).

En supposant que les pertes de charge liquide suivent la loi de Darcy, et en négligeant la pression dynamique, le bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial P_l}{\partial x} + \frac{1}{R_l} \frac{\partial P_l}{\partial \psi} = -\frac{\mu_l}{k_w} (u_l + v_l) + \rho_l g \sin \gamma \quad (14)$$

Les deux dernières relations nous fournissent l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} + \frac{1}{R_l^2} \frac{\partial^2 P_l}{\partial \psi^2} = -\frac{2\pi \mu_l}{\rho_l h_{lv} S_w k_w} \phi \Big|_{R_i} = -K_l \phi \Big|_{R_i} \quad (15)$$

A partir de la décomposition en série de Fourier, la pression liquide est alors définie à une constante C_0 près :

$$P_l(x, \psi) = C_0 + \rho_l g \sin \gamma x + \frac{K_l}{\pi L} \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}_{0m}|_{R_i}}{m^2 / \bar{R}_l^2} e^{im\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\phi}_{nm}|_{R_i}}{\alpha_n^2 + m^2 / \bar{R}_l^2} \cos(\alpha_n x) e^{im\psi} \right) \quad (16)$$

En supposant que la pression capillaire minimale est nulle (interface plane), la constante C_0 peut être déterminée à partir de la pression de vapeur minimale. Finalement, le bilan (14) permet de remonter aux expressions des vitesses liquide axiale et azimutale.

4. Résolution du modèle avec conditions de flux imposés

Avec des conditions de flux imposés à l'évaporateur et au condenseur, on peut considérer une seule source, notée $q(x, \psi)$, de flux de chaleur (Figure 1). Cette résolution est donc valable pour le cas multi-évaporateurs et/ou multi-condenseurs. En outre, on suppose des pertes thermiques par convection avec l'ambiance sur l'ensemble de la surface externe (h_∞, T_∞).

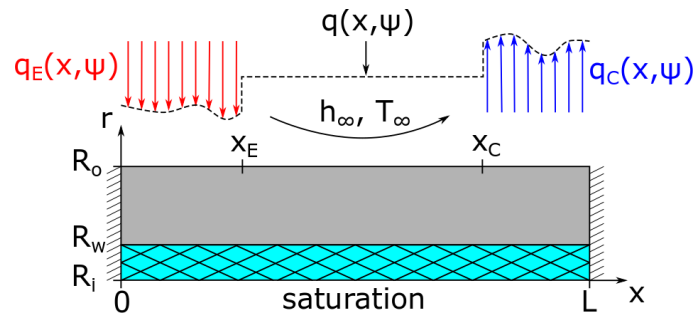


Figure 1 : Schéma du problème avec flux de chaleur imposés à l'évaporateur et au condenseur

4.1. Détermination des températures et flux externes et internes

Dans ce cas, le flux de chaleur externe s'écrit simplement :

$$\phi|_{R_o} = q + R_o h_\infty (\theta|_{R_o} + \bar{T}_{sat} - T_\infty) \quad (17)$$

Les transformations intégrales de cette expression, couplées aux relations fournies en 3.3, permettent d'exprimer l'ensemble des inconnues (en termes de transformées) en $r=R_o$ et $r=R_i$, en fonction de la source q et des pertes avec l'ambiance. Le fondamental fournit l'expression de la température moyenne \bar{T}_{sat} :

$$\bar{T}_{sat} = T_\infty - \frac{\tilde{q}_{00}}{2\pi R_o h_\infty L} \quad (18)$$

On voit que cette température n'est définie uniquement que pour des pertes avec l'ambiance connues. Si celles-ci sont considérées nulles, il est nécessaire de spécifier \bar{T}_{sat} .

La résolution nous donne pour les harmoniques ($n \neq 0$) en températures en $r=R_o$:

$$\tilde{\theta}_{n0}|_{R_o} = \frac{\mathcal{A}_{n0}}{\mathcal{C}_{n0} - R_o h_\infty \mathcal{A}_{n0}} \tilde{q}_{n0} \quad \text{et} \quad \tilde{\theta}_{nm}|_{R_o} = \frac{B_{nm}^{HP}}{D_{nm}^{HP} - R_o h_\infty B_{nm}^{HP}} \tilde{q}_{nm} \quad \text{pour } m \neq 0 \quad (19)$$

Les relations (10) et (11) permettent de remonter aux autres transformées en $r=R_o$ et $r=R_i$.

4.2. Evaluation des champs thermo-hydrauliques

A partir de la résolution précédente, les transformées intégrales de θ et ϕ sont connues en $r=R_i$ et $r=R_o$. Il suffit alors d'utiliser le modèle quadripolaire (5) de la couche considérée pour déterminer celles pour n'importe quelle valeur de r . La transformation inverse (3) permet de remonter à l'ensemble des champs (selon x, ψ et r) en températures et en flux radiaux. Enfin,

les valeurs des transformées de ϕ en $r=R_i$ permettent d'évaluer l'ensemble des champs de pression et de vitesses, vapeur et liquide.

4.3. Validation du modèle et analyse des résultats

Les résultats du modèle tridimensionnel sont comparés, en termes de températures externes, avec les résultats numériques de Kaya et Goldak [2], étude comparative avec le caloduc expérimental de Schmalhofer et Faghri [1] (*cas 1*). Le caloduc cuivre/eau simulé (diamètre externe de 23 mm et longueur de 1 m) transfère un flux de 100 W, entre un évaporateur semi-circonférentiel de longueur 127 mm et un condenseur circonférentiel de longueur 296 mm. Alors que la Figure 2(a) fournit un aperçu du champ analytique, la Figure 2(b) illustre les profils axiaux en $\psi = 0$ (HAUT) et $\psi = \pm\pi$ (BAS), donnés par la littérature et par le modèle en coordonnées cylindriques, ainsi qu'en coordonnées cartésiennes (les coefficients quadripolaires de la relation (5) s'expriment alors à partir de fonctions hyperboliques [7]), en prenant la référence du rayon de courbure R soit le rayon interne R_i , soit le rayon externe R_o .

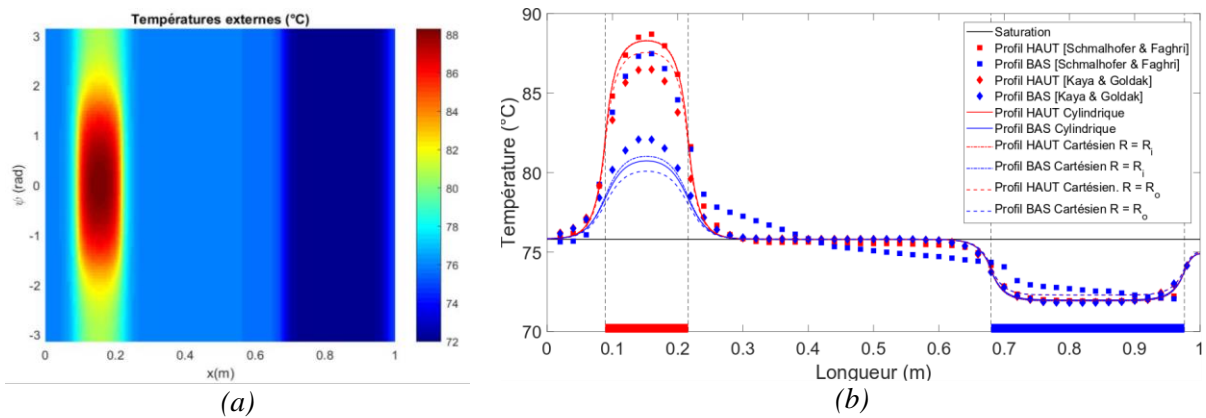


Figure 2 : Cas 1 - Températures externes : (a) Champ 2D, (b) Comparaison des profils axiaux

Alors que les températures au condenseur et dans la zone adiabatique sont bien évaluées par le modèle, les profils à l'évaporateur sont moins bien estimés, avec des températures chaudes surestimés et des températures froides sous-estimées, même si leur variation sont cohérentes. Cette différence est probablement liée à une asymétrie du profil de vitesse radiale vapeur et des effets non-Darcien, qui ne sont pas pris en compte dans le modèle analytique, amenant une meilleure homogénéisation des températures suivant ψ [2]. A noter que les résultats des deux références diffèrent déjà sûrement entre eux à cause de cette asymétrie [2]. On constate que l'hypothèse de résolution cartésienne n'est pas trop éloignée du cas cylindrique, en prenant le rayon interne comme référence de courbure.

5. Résolution du modèle axisymétrique avec conditions externes réalistes

5.1. Démarche de résolution

Dans le cas de conditions externes plus réalistes, la résolution analytique directe n'est pas possible. L'idée est alors de mailler la paroi externe afin de déterminer les valeurs des variables thermiques à cet endroit. Une fois celles-ci déterminées, l'utilisation des relations établies au paragraphe 3 permet d'obtenir l'ensemble des champs voulus.

Afin d'illustrer la démarche, prenons l'exemple du cas axisymétrique avec des conditions classiques de flux imposé à l'évaporateur, convection forcée au condenseur et possibles pertes avec l'ambiance au niveau de la zone adiabatique (Figure 3).

Le flux de chaleur radial externe peut s'écrire ici :

$$\phi|_{R_o}(x) = -\chi_E(x)q_E(x) + \chi_A(x)R_o h_\infty (T|_{R_o}(x) - T_\infty) + \chi_C(x)R_o h_C (T|_{R_o}(x) - T_C) \quad (20)$$

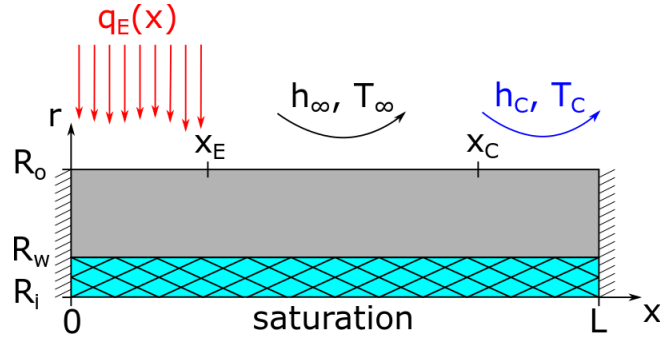


Figure 3 : Schéma du problème axisymétrique avec conditions externes plus réalistes

A partir de l'équation (10), dans le cas axisymétrique, et en développant l'expression des $\theta_{n0} \Big|_{R_o}$ avec la définition de la transformée (2), ce flux peut également s'écrire :

$$\phi \Big|_{R_o}(x) = \frac{1}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_{n0}}{\mathcal{A}_{n0}} \left[\int_0^L T \Big|_{R_o}(x') \cos(\alpha_n x') dx' \right] \cos(\alpha_n x) \quad (21)$$

En introduisant le maillage, l'intégrale précédente peut être évaluée par une méthode standard de Newton-Cotes (coefficients w_j). Dès lors, en écrivant l'égalité entre (20) et (21), on peut établir la relation vérifiée en tout point x_i du maillage :

$$R_o [h_{\infty} \chi_A(x_i) + h_C \chi_C(x_i)] T \Big|_{R_o}(x_i) + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} T \Big|_{R_o}(x_j) = \chi_E(x_i) q_E(x_i) + \chi_A(x_i) R_o h_{\infty} T_{\infty} + \chi_C(x_i) R_o h_C T_C \quad (22)$$

avec $\omega_{ij} = -w_j / (\pi L) \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{n0} / \mathcal{A}_{n0} \cos(\alpha_n x_i) \cos(\alpha_n x_j)$

On aboutit alors un système linéaire de la forme $AX=BU$, avec X l'ensemble des températures $T \Big|_{R_o}(x_i)$ inconnues et U les conditions aux limites ($q_E(x_i)$, T_{∞} et T_C). Dans ce cas

illustratif, la matrice A dépend de la température de référence \bar{T}_{sat} , elle aussi inconnue. La résolution du système doit s'effectuer de manière itérative, dont la relation de fermeture est que \bar{T}_{sat} correspond à la moyenne des températures externes (cf. 3.3, moyenne évaluée par méthode de Newton-Cotes).

5.2. Validation et analyse des résultats

Les résultats du modèle sont comparés aux travaux de Shabgard et Faghri [5] (cas 2). Le caloduc cuivre/eau (diamètre externe de 15,8 mm et longueur de 0,89 m) est ici soumis à un flux uniforme de 455 W à l'évaporateur de longueur 60 cm, un échange convectif ($h_C = 1800$ W/m²K et $T_C = 26^{\circ}$ C) au condenseur de longueur 20 cm, et sans pertes thermiques. Le modèle analytique est résolu en coordonnées cylindriques ou cartésiennes comme précédemment.

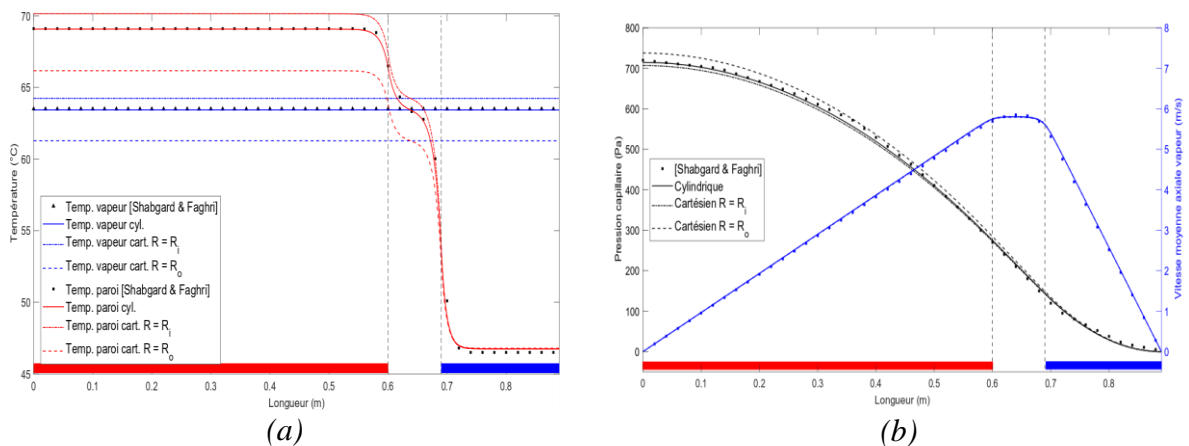


Figure 4 : Cas 2 : (a) Températures axiales, (b) Pression capillaire et vitesse vapeur

Les températures externes et la température de saturation (Figure 4(a)) correspondent parfaitement en coordonnées cylindriques. L'approximation cartésienne en prenant comme référence R_i donne également d'assez bon résultats, la différence se faisant au niveau de l'évaporateur et de la zone adiabatique, du fait d'une légère surestimation de \bar{T}_{sat} . La pression capillaire (différence entre les pressions vapeur et liquide) et la vitesse vapeur (Figure 4(b)) sont également bien simulées, l'hypothèse cartésienne ayant beaucoup moins d'impact sur les résultats. Il est à noter ici que la pression capillaire compense essentiellement les pertes de charge du liquide au sein du poreux.

6. Conclusion

Le modèle analytique 3D proposé permet de simuler les transferts thermo-hydrauliques de façon très satisfaisantes (compte tenu des fortes hypothèses effectuées) au sein d'un caloduc capillaire cylindrique, soumis à des sollicitations non-uniformes à l'évaporateur et au condenseur. Il fournit en outre la température de fonctionnement du caloduc, dans le cas où les pertes thermiques avec l'ambiance sont connues. C'est donc un très bon outil de dimensionnement approfondi. En outre, par le biais d'un maillage de la paroi externe et d'une méthode itérative rapide, des conditions aux limites réalistes peuvent être simulées, contrairement aux modèles de la littérature [6]. La démarche présentée ici dans le cas axisymétrique peut être étendue au cas 3D, par le biais d'un maillage de surface externe.

Les comparaisons avec la littérature présentées dans ce papier ne montrent pas nécessairement la présence de fortes pertes de charge vapeur, et donc d'une certaine variation axiale de la température de saturation. Les résultats illustrés sont donc très proches d'une simulation avec saturation uniforme. Cependant, contrairement aux modèles analytiques précédents [5,6], le modèle décrit permet de prendre en compte cette variation (grâce au couplage thermo-hydraulique effectué) qui peut avoir une certaine importance notamment pour des caloducs cylindriques de petit diamètre interne.

La représentation par quadripôles thermiques introduite permet d'envisager plus facilement la modélisation analytique de caloducs plus complexes (avec plusieurs couches poreuses) ou une résolution en régime transitoire (grâce à une transformation de Laplace supplémentaire). Enfin, elle peut être facilement utilisable dans une démarche d'optimisation, ou de caractérisation par méthodes inverses.

Références

- [1] J. Schmalhofer et A. Faghri, A study of circumferentially-heated and block-heated heat pipes – II. Three-dimensional numerical modeling as a conjugate problem, *Int. J. Heat & Mass Trans.*, 36 n°1 (1993) 213-226.
- [2] T.Kaya et J. Goldak, Three-dimensional numerical analysis of heat and mass transfer in heat pipes, *Heat & Mass Trans.*, 43 (2007), 775-785.
- [3] T.Naemsai *et al.*, Numerical model of heat transfer characteristics for sintered-grooved wick heat pipes under non-uniform heat loads, *App. Therm. Eng.*, 148 (2019), 886-896.
- [4] K.Grissa *et al.*, Performance of a cylindrical wicked heat pipe used in solar collectors: Numerical approach with Lattice Boltzmann method, *Energy Conv. & Man.*, 150 (2017), 623-636.
- [5] H.Shabgard et A.Faghri, Performance characteristics of cylindrical heat pipes with multiple heat sources, *App. Therm. Eng.*, 31 (2011), 3410-3419.
- [6] S.Lips et F.Lefèvre, A general analytical model for the design of conventional heat pipes, *Int. J. Heat & Mass Trans.*, 72 (2014), 288-298.
- [7] D.Maillet *et al*, *Thermal quadrupoles: solving the heat equation through integral transforms*, John Wiley & Sons, Ltd (2000)