

Transfert de chaleur par convection thermoélectrique dans des cavités rectangulaires horizontales

Heat transfer by thermoelectric convection in horizontal rectangular cavities

Elhadj BARRY¹, Changwoo KANG², Harunori YOSHIKAWA³, Innocent MUTABAZI^{1*}

¹Normandie Université, UNIHAVRE, Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, UMR 6294 CNRS, 53 Rue de Prony – 76058 Le Havre cedex, France.

²Department of Mechanical Engineering, Jeonbuk National University, 567 Baekje-daero, Deokjin-gu, Jeonju-si, Jeollabuk-do, 54896, Republic of Korea .

³Intitut de Physique de Nice, UMR 7010 – Université Côte d'Azur, 1361 Route des Lucioles, 06560 Valbonne, France.

*(auteur correspondant : innocent.mutabazi@univ-lehavre.fr)

Résumé - Cette étude concerne la convection naturelle dans un fluide diélectrique dans une cavité rectangulaire soumise à un gradient de température et à un champ électrique alternatif de haute fréquence. Le couplage thermoélectrique induit une force diélectrophorétique qui a des effets similaires à ceux de la poussée d'Archimède dans la génération de la convection thermique. L'analyse de stabilité linéaire a permis de déterminer les modes critiques. Les simulations numériques ont permis de caractériser l'écoulement du fluide au-delà du seuil ainsi que l'efficacité du champ électrique sur le transfert thermique.

Mots-clés : Cavité rectangulaire ; Fluide diélectrique ; Force diélectrophorétique ; Poussée électrique ; Convection thermoélectrique.

Abstract - This study concerns the natural convection in a dielectric fluid confined in a rectangular cavity subjected to a temperature gradient and a high frequency alternating electric field. The thermoelectric coupling induces dielectrophoretic force with effects similar to those of Archimedean buoyancy in generating thermal convection. We conducted a linear stability analysis to find the critical modes. Beyond the threshold, numerical simulation was realized to analyze the flow when increasing the electric voltage and we highlight the heat transfer enhancement by the electric buoyancy.

Keywords: Rectangular cavity; Dielectric fluid; Dielectrophoretic force; Electric buoyancy; Thermo-electric convection.

de stabilité linéaire et les résultats dans la section 3. Ensuite les résultats des simulations numériques seront présentés dans la section 4 et nous terminerons par une conclusion.

2. Formulation du problème

2.1. Force diélectrophorétique

Lorsqu'une couche de fluide diélectrique de masse volumique ρ et de permittivité ϵ est soumise à une différence de température constante ΔT , l'application d'un champ électrique alternatif de haute fréquence \mathbf{E} induit une force volumique appelée force diélectrophorétique (DEP) [11] :

$$\mathbf{f}_{DEP} = -\frac{1}{2}\mathbf{E}^2\nabla\epsilon. \quad (1)$$

En considérant que la masse volumique et la permittivité varient linéairement en fonction de la température selon l'approximation de Boussinesq, la décomposition de la force DEP contient une partie non conservative appelée poussée électrique \mathbf{P}_E avec une gravité électrique effective \mathbf{g}_e :

$$\mathbf{P}_E = -\alpha\rho\theta\mathbf{g}_e \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}_e = \frac{e}{\alpha\rho}\nabla\left(\frac{\epsilon_1\mathbf{E}^2}{2}\right) \quad (2)$$

où α est le coefficient d'expansion thermique, $\theta = T - T_0$ la déviation de la température à la température de référence T_0 , e le coefficient de variation de la permittivité, et ϵ_1 la permittivité du fluide diélectrique prise à la température $T_0 = \frac{T_1+T_2}{2}$. L'expression de la gravité électrique (Eq.2) montre que son intensité est proportionnelle à la densité de l'énergie du champ électrique.

2.2. Configuration géométrique et équations générales

Considérons un fluide diélectrique de viscosité ν et de diffusivité thermique κ placé entre deux plaques horizontales ; ces plaques sont maintenues à des températures différentes et servent d'électrodes pour l'application du champ électrique. Le fluide a une épaisseur de d ; la largeur et la longueur du système sont considérées infinies par rapport à la distance d .

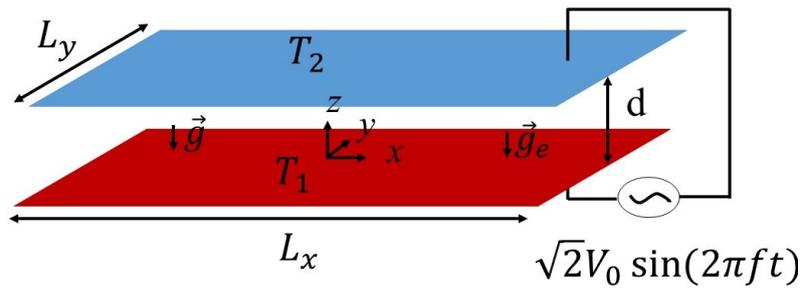


Figure 1 : Couche horizontale de fluide diélectrique soumise à une différence de température et à un champ électrique alternatif de haute fréquence.

La nature diffusive du fluide est décrite par le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$, l'intensité de la différence de température par le nombre de Rayleigh $Ra = \alpha\Delta Tgd^3/\nu\kappa$, et l'intensité du champ électrique appliqué par le nombre de Rayleigh électrique $L = \alpha\Delta T\bar{g}_ed^3/\nu\kappa$. L'écoulement dans la cavité est régi par l'équation de continuité, l'équation de Navier-Stokes, l'équation de l'énergie, et l'équation de Gauss-Maxwell qui sont données, dans l'approximation de Boussinesq, par :

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla \pi + \Delta \mathbf{u} - \alpha \theta (\mathbf{g} + \mathbf{g}_e), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta &= \kappa \Delta \theta, \\ \nabla \cdot [\epsilon(\theta) \nabla \phi] &= 0, \quad \text{avec } \mathbf{E} = -\nabla \phi, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

où $\mathbf{u}(x, y, z) = (u, v, w)$ est le champ de vitesse, ϕ le potentiel électrique, et $\pi = \frac{p}{\rho_0} + gz + \frac{\epsilon \epsilon_1 \theta \mathbf{E}^2}{2\rho_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_T \mathbf{E}^2$ la fonction de Bernoulli qui représente la charge hydraulique généralisée. La vitesse, la température et le potentiel électrique satisfont les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{\grave{a}} \quad z = -d/2, \quad \mathbf{u} &= 0, \quad \theta = \Delta T/2, \quad \phi = \phi_0; \\ \text{\grave{a}} \quad z = d/2, \quad \mathbf{u} &= 0, \quad \theta = -\Delta T/2, \quad \phi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Pour des faibles valeurs de l'écart de température et du potentiel électrique, le système admet un régime permanent de conduction pure ($\mathbf{u} = 0$). La température et le champ électrique du régime de conduction dépendent uniquement de la direction verticale z :

$$\theta_b = -\beta z, \quad E_b = \frac{E_1}{(1 + \gamma_e (\frac{z}{d}))}, \quad \text{avec } \beta = \frac{\Delta T}{d} \quad \text{et} \quad E_1 = -\frac{\phi_0}{d} \frac{\gamma_e}{\log\left(\frac{2-\gamma_e}{2+\gamma_e}\right)}. \quad (5)$$

Le paramètre $\gamma_e = e\Delta T$ représente le coefficient de couplage thermoélectrique. L'expression de la gravité électrique de l'état de base est donnée par [9, 10] :

$$g_{eb} = \bar{g}_e \left[1 + \gamma_e \left(\frac{z}{d} \right) \right]^{-3}, \quad \text{avec } \bar{g}_e = -\frac{\epsilon_1 e \phi_0^2}{\rho_0 \alpha} \left(\frac{\gamma_e}{d} \right)^3 \left[\log\left(\frac{2-\gamma_e}{2+\gamma_e}\right) \right]. \quad (6)$$

La quantité \bar{g}_e correspond à la valeur de la gravité électrique à $z = 0$.

3. Analyse de stabilité linéaire

Les équations (3) sont adimensionnées en utilisant les échelles suivantes : d pour la longueur, le temps visqueux $\tau_\nu = d^2/\nu$ pour le temps, la vitesse visqueuse ν/d pour la vitesse, ΔT pour la température, $\rho(\nu/d)^2$ pour la pression et la quantité ϕ_0/d pour le champ électrique. On ajoute des perturbations infinitésimales de vitesse, de température, de pression et de potentiel électrique ($u', v', w', \theta', \pi', \phi'$) à l'état de base. On linéarise les équations obtenues autour de l'état de base et on développe les perturbations en modes normaux de la forme $e^{st+i(k_x x + k_y y)}$ où $s = \sigma + i\omega$, σ est le taux de croissance temporelle de la perturbation et ω sa fréquence, k_x et k_y sont les nombres d'ondes de la perturbation dans les directions x et y respectivement. Le problème de stabilité linéaire est formulé comme :

$$0 = DW + i(k_x U + k_y V), \quad (7)$$

$$sU = -ik_x \Pi + (D^2 - q^2)U - \frac{L}{Pr} \tilde{\theta}_b G_{ex}, \quad (8)$$

$$sV = -ik_y \Pi + (D^2 - q^2)V - \frac{L}{Pr} \tilde{\theta}_b G_{ey}, \quad (9)$$

$$sW = -D\Pi + (D^2 - q^2)W + \left(\frac{Ra - L\tilde{g}_{eb}}{Pr} \right) \Theta - \frac{L}{Pr} \tilde{\theta}_b G_{ez}, \quad (10)$$

$$s\Theta = W + \frac{1}{Pr} (D^2 - q^2) \Theta, \quad (11)$$

$$0 = [(1 + \gamma_e \tilde{z})(D^2 - q^2) + \gamma_e D] \Phi - \gamma_e (D^2 \tilde{\phi}_b + D\tilde{\phi}_b D) \Theta, \quad (12)$$

où $q = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ le module du nombre d'onde, les opérateurs $D \equiv d/d\tilde{z}$ et $D^2 \equiv d^2/d\tilde{z}^2$; le symbole tilde signifie que les grandeurs sont adimensionnées. L'écoulement du fluide diélectrique est stabilisé par la dissipation visqueuse et la diffusion thermique tandis que la gravité terrestre et la poussée électrique représentent les effets déstabilisants du système. Les paramètres de contrôle du système sont le nombre de Rayleigh thermique Ra et le nombre de Rayleigh électrique L . Pour mettre en évidence les effets de la poussée électrique, le nombre de Rayleigh thermique Ra est choisi tel que sa valeur soit inférieure à la valeur seuil $Ra_c = 1708$ de la convection de Rayleigh-Bénard. Les conditions aux limites pour les perturbations sont données par :

$$U = V = W = \Theta = \Pi = \Phi = 0 \quad \text{à} \quad \tilde{z} = \pm 1/2. \quad (13)$$

Le système d'équations linéarisées est résolu avec un code basé sur une méthode spectrale. Les fonctions inconnues $[U, V, W, \Theta, \Pi, \Phi]$ sont développées en séries de polynômes de Chebyshev et les solutions sont cherchées aux points de collocations de Chebychev-Gauss-Lobatto. Le nombre de polynômes de Chebychev a été fixé à 32 pour assurer la convergence des résultats. Le problème résultant est ainsi résolu par la méthode de décomposition QZ [9].

Pour des valeurs fixes du Pr , nous avons déterminé les courbes marginales de stabilité ($\sigma = 0$) pour différentes valeurs des paramètres de contrôle (Ra, L). Pour cela, le nombre de Rayleigh Ra est fixé et nous faisons varier le nombre de Rayleigh électrique L pour des valeurs du nombre d'onde q dans l'intervalle de $[0; 5]$. Nous présentons quelques résultats des conditions marginales sur la figure 2. Le minimum des courbes marginales de stabilité donnent les valeurs

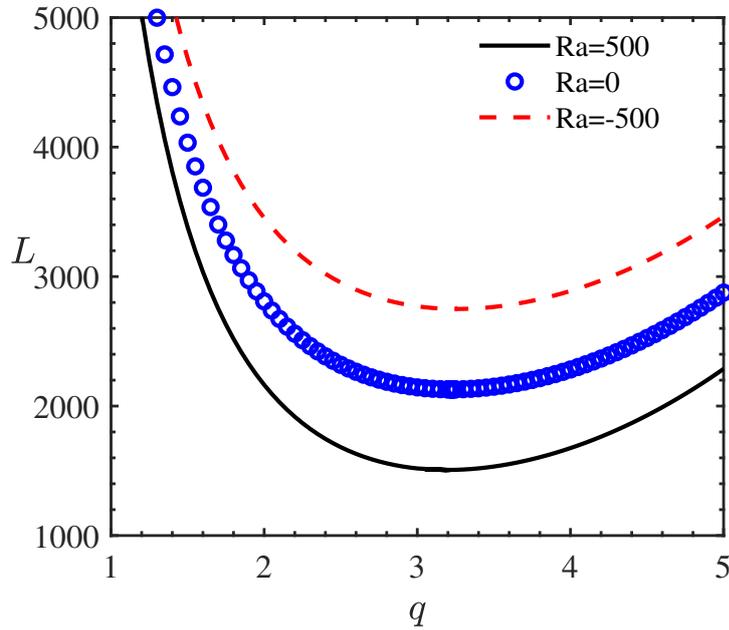


Figure 2 : Courbes de stabilité marginale pour $Pr = 1$ et différentes valeurs de Ra : la courbe noire correspond à $Ra = 500$, les cercles bleus à $Ra = 0$ et les pointillés rouges à $Ra = -500$.

des paramètres critiques (L_c, q_c, ω_c). Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 1. Lorsque le fluide est instable par rapport à la poussée d'Archimède ($Ra > 0$), l'état de base du système est déstabilisé pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh électrique L ; et quand le fluide est stable par rapport aux effets de la gravité terrestre ($Ra < 0$), il faut un champ électrique suffisamment fort pour induire des instabilités. Le seuil des instabilités dépend du

nombre de Rayleigh thermique Ra et les valeurs des paramètres critiques sont indépendantes du nombre de Prandtl (Pr).

Ra	- 1000	- 500	0	500	1000
L_c	3370.07	2749.89	2128.70	1506.57	883.52
q_c	3.29	3.26	3.23	3.19	3.16
ω_c	0	0	0	0	0

Tableau 1 : Paramètres critiques (L_c, q_c, ω_c) pour $Pr = 1$ et différentes valeurs de Ra

Les résultats obtenus ici avec les perturbations tridimensionnelles sont en parfait accord avec les résultats donnés par Roberts [7] et Stiles [8] avec des perturbations bidimensionnelles.

4. Simulation numérique directe

Après avoir déterminé les paramètres critiques par une analyse de stabilité linéaire, nous avons fait une étude non linéaire des instabilités thermoélectriques. Les simulations numériques ont été réalisées à l'aide d'un code basé sur la méthode des volumes finis [12]. Une méthode hybride a été utilisée pour la discrétisation temporelle : le schéma de Crank-Nicolson pour les termes non linéaires et diffusifs tandis que nous avons employé le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour les autres termes. Nous avons utilisé les conditions aux limites de Dirichlet pour la vitesse, la température et le potentiel électrique sur les électrodes ; et les conditions aux limites périodiques dans les directions horizontales x et y : $\psi(x, y, z) = \psi(x \pm l_x/2, y \pm l_y/2, z)$ où $l_x = l_y = 10d$ avec $\psi = \mathbf{u}, \theta, \phi$. Un maillage régulier est adopté pour les directions horizontales avec 256 points suivant x et y tandis que le maillage est plus raffiné près des parois avec $\Delta z = 0.005$ suivant la direction verticale z . La valeur du coefficient de couplage thermoélectrique est fixée à $\gamma_e = 0.01$ et $Pr = 1$ pour les simulations.

Les résultats montrent que près du seuil, les instabilités se manifestent sous forme de rouleaux de convection droits stationnaires d'axe incliné dans le plan (x, y) . La figure 3 montre l'évolution des structures présentes dans l'écoulement pour différentes valeurs de L . Les rouleaux, initialement droits, deviennent modulés avec des défauts stationnaires, ensuite oscillants ($L = 7000; 8000$) avec des défauts de type dislocations, similaires à ceux obtenus dans la convection de Rayleigh-Bénard pour de grandes valeurs du Ra [13]. Les figures 4 et 5 illustrent des cellules de convection de la taille de l'épaisseur du fluide pour certaines valeurs de L dans des conditions de microgravité. Certains de ces motifs ont été observés expérimentalement dans des huiles de silicone lors d'une campagne de vols paraboliques. Les résultats ont été présentés par A. Meyer dans les actes du Groupement De Recherche Micro-pesanteur Fondamentale et Appliquée (GDR-MFA) en 2020 [14].

Pour caractériser le transfert thermique par convection, nous avons calculer le nombre de Nusselt pour toutes les valeurs de L . Par définition, ce nombre sans dimension représente le rapport entre le flux de chaleur total (conduction + convection) et le flux par conduction de l'état de base :

$$Nu = \frac{1}{l_x l_y} \int_{-\frac{l_y}{2}}^{\frac{l_y}{2}} \int_{-\frac{l_x}{2}}^{\frac{l_x}{2}} \left(\mathbf{u} \theta Pr - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx dy. \quad (14)$$

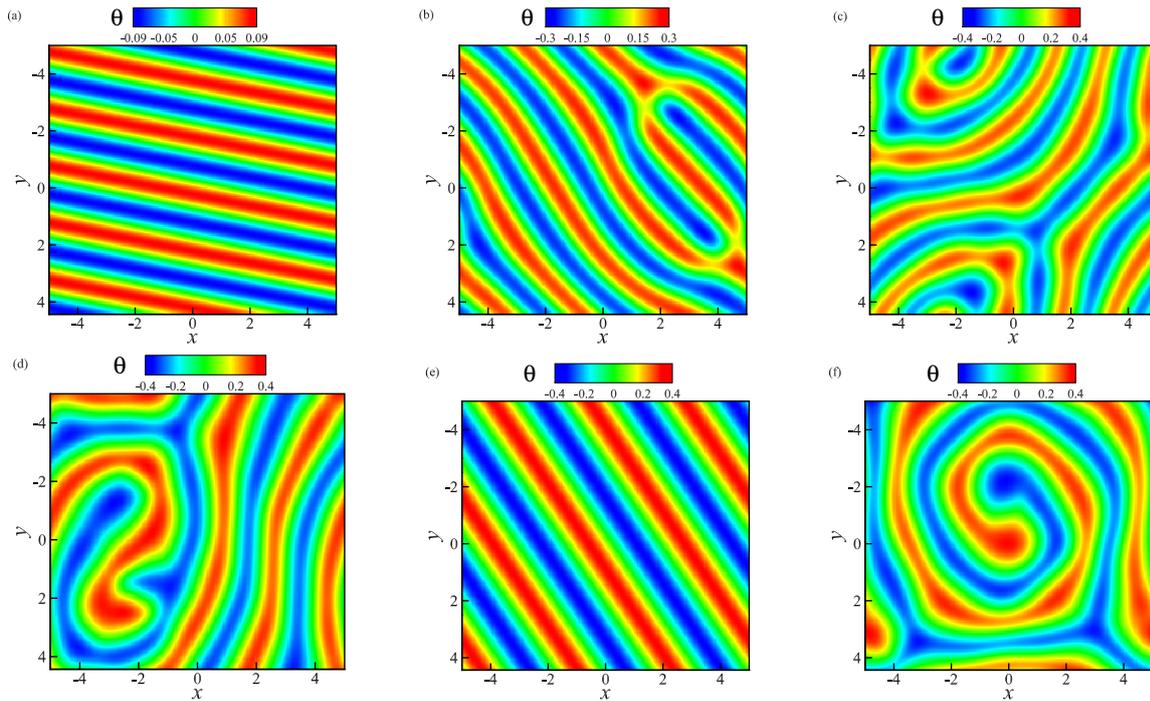


Figure 3 : Champ de température instantané dans le plan $z = 0$ pour $Pr = 1$, $Ra = -500$ et différentes valeurs de L : (a) $L = 2850$, (b) $L = 4000$, (c) $L = 5000$, (d) $L = 7000$ (oscillant), (e) $L = 7500$, et (f) $L = 8000$ (oscillant).

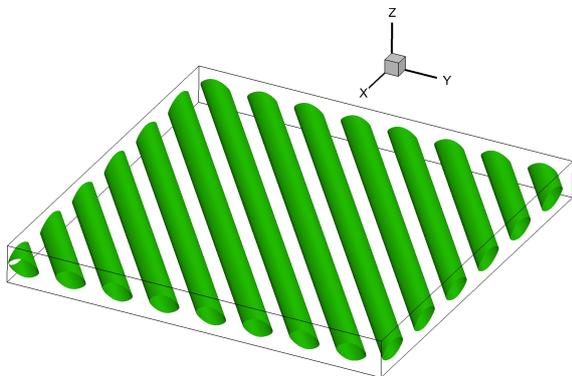


Figure 4 : Structure des iso-surfaces de $Q = 40$ pour $Ra = 0$ et $L = 2400$.

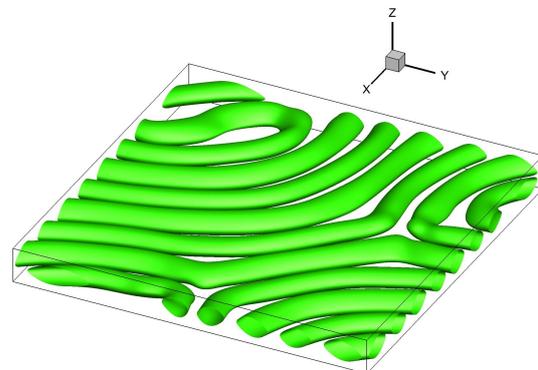


Figure 5 : Structures des iso-surfaces de $Q = 200$ pour $Ra = 0$ et $L = 5000$.

Lorsque le fluide est au repos ($L < L_c$), le transfert de chaleur se fait uniquement par conduction, par conséquent le nombre de Nusselt $Nu = 1$. Pour quantifier l'apport des instabilités thermoélectriques sur le transfert thermique, nous avons tracé sur la figure 6 l'évolution du $Nu - 1$ en fonction du nombre de Rayleigh électrique L pour différentes valeurs du Rayleigh thermique Ra . Quelque soit la valeur du nombre de Rayleigh Ra , on constate un accroissement du nombre de Nusselt Nu en fonction du nombre de Rayleigh électrique lorsque $L > L_c$. Nous remarquons que les courbes du $Nu - 1$ sont plus basses que celle de $Ra = 0$ lorsque Ra est négatif. Cela est dû à l'effet stabilisant de la poussée d'Archimède sur l'écoulement du fluide dans cette configuration.

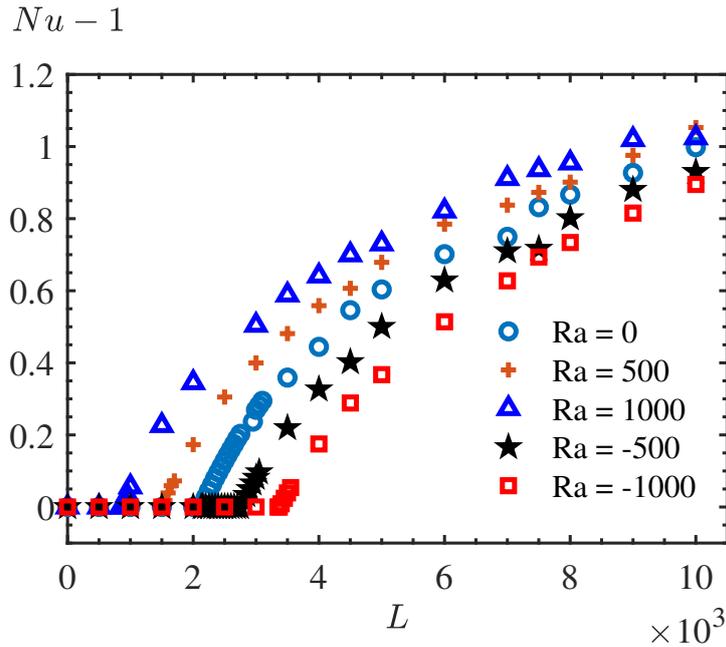


Figure 6 : Variation du nombre de Nusselt Nu en fonction du nombre de Rayleigh électrique L pour $Pr = 1$ et quelques valeurs du nombre de Rayleigh thermique Ra .

5. Conclusion

Nous avons réalisé une étude de la convection thermique induite par la poussée électrique dans une couche horizontale de fluide diélectrique soumise à un gradient vertical de température pour différentes valeurs du champ électrique. L'analyse de stabilité linéaire avec des perturbations 3D a permis de déterminer les valeurs critiques marquant le début de la convection thermoélectrique. Les modes critiques correspondants se manifestent par des rouleaux stationnaires indépendants de la nature du fluide. Les simulations numériques ont montré qu'au-delà du seuil critique, des rouleaux convectifs oscillants de type Rayleigh-Bénard ainsi que des dislocations apparaissent dans l'écoulement. Le développement de la convection s'accompagne d'un accroissement de la valeur du nombre de Nusselt. Cela prouve que la force DEP est un moyen alternatif permettant de créer des mouvements convectifs dans un fluide soumis à l'action du champ gravitationnel ou dans des conditions de microgravité. Cette méthode pourrait être utilisée dans des systèmes miniaturisés où il est possible d'appliquer des champs électriques intenses. L'implémentation de cette technique aux systèmes de refroidissement est d'un grand intérêt pour les industries aéronautique et aérospatiale où la réduction du poids ainsi que la taille des composants, tout en gardant les mêmes fonctionnalités, est un facteur primordial.

Nous réalisons actuellement des simulations numériques de la convection thermoélectrique dans une huile de silicone ($Pr = 65$) qui est utilisée pour nos expériences en laboratoire et en vols paraboliques.

Références

- [1] B. J. Kirby, *Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics*, Cornell University - New York, Cambridge University Press (2010).
- [2] A. Bāiri, E. Zarco-Permia, J.M. Garcia de Maria, A review on natural convection in enclosures for engineering, *Int. J. Fond. Therm.*, 63 (2014) 304-322.

- [3] I.V. Miroschnichenko, M.A. Sheremet, Turbulent natural convection heat transfer in rectangular enclosures using experimental and numerical approaches : A review., *Renew. Sustain. Energy Rev.*, 32 (2018) 40-59.
- [4] M.J. Gross and J.E. Porter, Electrically induced convection in dielectric liquids, *Nature*, 2012 (1966) 1343-1345.
- [5] R.J. Turnbull, Effect of dielectrophoretic forces on the Bénard instability, *Phys. Fluids*, 12 (1969) 1809-1815.
- [6] I. Mutabazi, H. Yoshilawa, M.Tadie Fogaing, V. Travnikov, O. Crumeyrolle, B. Futterer and C. Egbers, Thermo-electro-hydrodynamic convection under microgravity, a review, *Fluid Dyn. Res.*, 48 (2016) 061413.
- [7] P.H. Roberts, Electrohydrodynamic convection, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 22 (1969) 211-220.
- [8] P.J. Stiles, Electro-thermal convection in dielectric liquids, *Chem. Phys. Lett.*, 179 (1991) 311-315.
- [9] H.N. Yoshikawa, M. Tadie Fogaing, O. Crumeyrolle and I. Mutabazi, Dielectrophoretic Rayleigh-Bénard convection under microgravity conditions, *Phys. Rev. E.*, 87 (2013) 043003.
- [10] E. B. Barry, H. N. Yoshikawa, M. Tadie Fogaing, C. Kang and I. Mutabazi, Critical Modes of Thermoelectric Convection Instabilities in a Vertical Slot, *Microgravity Science and Technology*, 33 (2021) 1875-0494.
- [11] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media, Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics*, Burlington-Massachusetts, Elsevier Butterworth-Heinemann (1984).
- [12] C. Kang, I. Mutabazi, Columnar vortices induced by dielectrophoretic force in a stationary cylindrical annulus filled with a dielectric liquid, *J. Fluid Mech.*, 908 (2021) A26.
- [13] P. Manneville, *Dissipative Structures and weak Turbulence*, Academic Press (1990).
- [14] <http://gdr-mfa.fr/index.php/colloques> (site consulté le 23/03/2021).

Remerciements

Ces travaux de thèse sont co-financés par le Centre National d'Études Spatiales (CNES) et la Région de Normandie dans le cadre du projet INTEHLDI.