

# Utilisation de fonctions objectifs locales pour l'optimisation topologique des échanges thermiques d'un canal vertical asymétriquement chauffé

## Application of a local cost function for the topology optimization of a vertical channel asymmetrically heated

David MARTI<sup>\*(1)</sup>, Delphine RAMALINGOM<sup>(1)</sup>, Pierre-Henri COCQUET<sup>(1),(2)</sup>, Alain BASTIDE<sup>(1)</sup>

(1) Laboratoire de Physique et Ingénierie Mathématiques pour l'Énergie, l'Environnement et le Bâtiment (PIMENT), 40 avenue de Soweto - 97410 Saint-Pierre.

(2) Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et au Génie Electrique (SIAME), E2S-UPPA, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 64000 Pau, France.

\*(auteur correspondant : david.marti@univ-reunion.fr)

**Résumé** - Dans le cadre de l'optimisation topologique d'un canal verticalement chauffé et d'un écoulement fluide à convection naturelle dominante, une nouvelle fonction objectif dite locale est étudiée. Celle-ci prend en compte des grandeurs physiques définies en chaque point du domaine de calcul, telles que les angles entre le vecteur vitesse et gradient de température, afin de favoriser les échanges de chaleur. Une étude numérique superposant cette fonctionnelle à des fonctions objectifs globales classiques est présentée. Des géométries de canal qui convectent mieux la chaleur sont obtenues.

**Mots-clés** : Convection naturelle ; Canal vertical ; Optimisation topologique ; Optimisation locale ; Méthode de l'adjoint.

**Abstract** - In the context of the topological optimization of a vertical channel asymmetrically heated in mixed convection, a new local cost function is defined and studied. This local cost function involves some physical quantities in each point of the computational domain, namely the angle between the velocity vector and the gradient of temperature in order to increase the heat transfer in the channel. A numerical experiment is carried out along with the use of some more classical global cost functions. A channel shape with increased heat convection is obtained.

**Keywords**: Natural convection; Vertical channel; Topology optimization; Local optimization; Adjoint sensitivity analysis.

### Nomenclature

$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse	Pr	Nombre de Prandtl
$\theta$	Température	$Ra_b$	Nombre de Rayleigh modifié
$p$	Pression	Nu	Nombre de Nusselt
$\gamma$	Perméabilité inverse	$\partial_n$	$\partial_n = n \cdot \nabla$ , dérivée par rapport à la normale
Re	Nombre de Reynolds	$\ \cdot\ $	$\ x\  = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$ , norme
Ri	Nombre de Richardson		

## 1. Introduction

L'économie d'énergie est un enjeu majeur des bâtiments en milieu tropical où les températures extérieures élevées imposent encore trop souvent d'utiliser des systèmes énergivores permettant

d'assurer le confort des occupants d'un bâtiment. Nos travaux concernent les échangeurs de chaleur passifs fonctionnant à partir des principes du thermosiphon et de la ventilation naturelle tel que le mur Trombe.

La géométrie naturelle du canal par lequel l'air d'un mur Trombe s'écoule est le canal vertical rectangulaire. Il a été montré que des géométries moins instinctives peuvent mener à des échanges de chaleur plus importants entre l'entrée et la sortie du canal et donc à une meilleure performance du mur Trombe [1]. L'optimisation topologique d'écoulement fluide est un outil d'aide à la conception important pour le concepteur. C'est un domaine de recherche très actif, comme le montrent les récentes études de la littérature [2, 3]. Cette communication présente de nouvelles fonctionnelles qualifiées de fonctionnelles locales. Une fonction objectif est l'expression mathématique des quantités physiques que l'on souhaite minimiser ou maximiser afin d'optimiser les performances d'un système. Certaines fonctionnelles sont classiquement utilisées en optimisation topologique : la minimisation des pertes mécaniques par dissipation entre l'entrée et la sortie d'un écoulement ou l'augmentation des échanges de chaleur au sein d'un domaine. La plupart des fonctionnelles proposées à ce jour sont des fonctionnelles globales. Ces fonctionnelles globales sont mathématiquement définies aux frontières du domaine via l'utilisation d'intégrales surfaciques. Il s'agit souvent de différences de quantités entre l'entrée et la sortie d'un domaine. L'originalité de nos travaux consiste à définir et à utiliser des fonctionnelles locales qui prennent en compte des quantités calculées au sein du domaine à l'aide d'intégrales volumiques et qui permettent de minimiser et d'optimiser des quantités basées sur des considérations physiques locales. L'intérêt de ces fonctionnelles est qu'elles peuvent renforcer ou diminuer localement l'influence des fonctionnelles globales sur l'optimisation topologique. Ceci offre par exemple la possibilité au concepteur de définir au sein de son domaine des zones où il souhaite affiner les résultats d'une optimisation topologique classique.

## 2. Équations physiques du problème

Nous étudions ici des écoulements de fluides en convection naturelle dominante (convection légèrement forcée). La technique d'optimisation utilisée est la méthode adjointe continue d'analyse de la sensibilité telle que décrite par [2, 4]. Les équations de Navier-Stokes sont pénalisées par un terme  $-h_\tau(\gamma)\mathbf{u}$ .  $\gamma$  est un champ scalaire qui représente la perméabilité inverse de la matière. Ce terme est nul lorsque nous avons localement du fluide et suffisamment grand lorsque nous avons localement un solide. La vitesse est ainsi proche de zéro dans les zones solides. La fonction  $h_\tau(\gamma)$  est une fonction sigmoïde qui pénalise les valeurs intermédiaires de  $\gamma$ , elle a été proposée par [5].

La Figure 1 représente la géométrie de notre problème. Les équations sans dimension de notre problème physique (1) sont les équations de continuité, de Navier-Stokes en incompressible et de transfert de la chaleur.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= -\nabla p + A\Delta\mathbf{u} - h_\tau(\gamma)\mathbf{u} + B\theta\vec{e}_y && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla\theta &= \nabla \cdot (Ck_\tau(\gamma)\nabla\theta) && \text{in } \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

où les constantes  $A, B, C = \{\text{Re}^{-1}, \text{Ri}, \text{Re}^{-1}\text{Pr}^{-1}\}$  avec  $\text{Re}$  le nombre de Reynolds,  $\text{Ri}$  le nombre de Richardson et  $\text{Pr}$  le nombre de Prandtl.

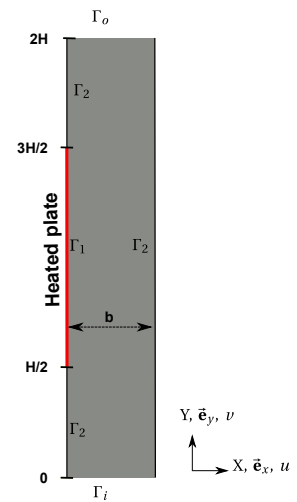


Figure 1: Géométrie du canal chauffé

Les conditions aux limites considérées sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= 0, & \nabla p &= 0, & \partial_n \theta &= -1 & \text{sur } \Gamma_1, \\
\mathbf{u} &= 0, & \nabla p &= 0, & \partial_n \theta &= 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\
\mathbf{u} &= u_i \mathbf{e}_y, & \nabla p &= 0, & \theta &= 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\
\left. \begin{aligned} \partial_n \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y &= 0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x &= 0 \\ \partial_n \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_y &= 0 \end{aligned} \right\}, & p &= 0, & \partial_n \theta &= 0 & \text{sur } \Gamma_o, \text{ si l'écoulement est sortant} \\
& & p &= -0.5 \|\mathbf{u}\|^2, & \theta &= 0 & \text{sur } \Gamma_o, \text{ si l'écoulement est entrant}
\end{aligned} \tag{2}$$

où  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_i,$  et  $\Gamma_o$  sont respectivement la paroi chauffée du canal, la paroi adiabatique, l'entrée et la sortie du domaine. Le champ de vitesse  $u_i$  à l'entrée du canal a un profil parabolique via :  $u_i(x) = 6.1x(1-x)$ .

Les grandeurs physiques ont été adimensionnées de la façon suivante :  $u = \frac{U}{U_{\text{Réf}}}, \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}$

et  $p = \frac{p}{\rho 0.5 U_{\text{Réf}}^2}$  avec  $T_\infty = 298.15 \text{ K}, U_{\text{Réf}} = \frac{Q_v}{S}$  et  $\Delta T = \frac{q\lambda}{b}$ .  $Q_v$  est le débit volumique imposé à l'entrée,  $S$  la surface de l'entrée  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $b$  la largeur du canal.  $\lambda$  et  $q$  sont la conductivité thermique du fluide et le flux de chaleur de la paroi chauffante.

### 3. Formulation du problème d'optimisation

Le présent problème d'optimisation consiste à minimiser une fonctionnelle  $\mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta)$  avec  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  respectant l'équation (1). Nous utilisons les fonctionnelles globales suivantes étudiées par [1] :

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{u}, p) = -\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p_t \, dS \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS - \frac{1}{|\Gamma_o|} \int_{\Gamma_o} p_t \, dS \int_{\Gamma_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS, \tag{3}$$

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{u}, \theta) = \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \theta \, dS \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS + \frac{1}{|\Gamma_o|} \int_{\Gamma_o} \theta \, dS \int_{\Gamma_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS. \tag{4}$$

Ci-dessus  $p_t = p + 1/2 \|\mathbf{u}\|^2$  est la pression totale,  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_o$  sont respectivement l'entrée et la sortie du domaine. La fonctionnelle globale (3) minimise les pertes d'énergie mécanique du fluide entre l'entrée et la sortie du domaine tandis que la fonctionnelle globale (4) maximise la puissance thermique entre l'entrée et la sortie du domaine. Nous proposons de définir et d'ajouter une fonctionnelle locale à ces deux fonctionnelles.

#### 3.1. Définition de la fonctionnelle locale

L'idée est ici de maximiser ou minimiser localement les transferts de chaleur. Dans le cas d'une plaque plane semi-infinie parallèle à un écoulement, la chaleur est parfaitement convectée et le gradient de température est orthogonal au champ de vitesse. Nous pouvons ainsi en déduire que, pour mieux convecter la chaleur dans le canal, le gradient de température doit être orthogonal au champ de vitesse au niveau de l'interface fluide/solide (voir Figure 2).

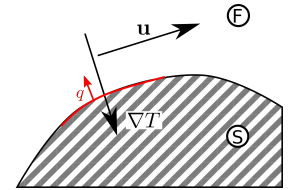


Figure 2: Orientation des grandeurs physiques afin de favoriser la convection de la chaleur

Physiquement, faire en sorte que deux vecteurs soient orthogonaux revient à avoir un cosinus nul. Le cosinus  $\cos(\mathbf{u}, \nabla\theta)$  est donné par

$$\cos(\mathbf{u}, \nabla\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla\theta}{\|\mathbf{u}\| \|\nabla\theta\|}.$$

Ce dernier est compris entre  $-1$  et  $+1$ . Étant donné qu'il est plus pratique numériquement d'optimiser une quantité de signe constant, nous proposons de minimiser son carré. Enfin, comme l'application  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mapsto \|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}$  n'est pas différentiable en  $\mathbf{x} = 0$ , nous allons perturber le dénominateur pour retrouver une fonctionnelle objectif locale différentiable ce qui nous permettra d'utiliser des algorithmes à base de gradient pour la résolution numérique du problème d'optimisation. La fonction coût considérée est enfin :

$$\mathcal{J}_3(\mathbf{u}, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^2}{(\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s} d\Omega, \quad s = 10^{-6}. \quad (5)$$

Cette fonctionnelle est locale dans le sens où la quantité  $\frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^2}{(\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s}$  en chaque point du domaine de calcul entre en jeu dans le processus d'optimisation. Minimiser cette quantité revient à faire tendre les vecteurs  $\mathbf{u}$  et/ou  $\nabla \theta$  vers  $\mathbf{0}$  ou bien à faire en sorte qu'ils soient orthogonaux.

### 3.2. Poids des fonctionnelles

Puisque que ces trois fonctionnelles peuvent chacune favoriser un objectif contradictoire, nous leur attribuons à chacune un poids différent sous la forme d'un scalaire  $c_1, c_2, c_3$

$$\min \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta) = c_1 \hat{\mathcal{J}}_1(\mathbf{u}, p, \theta) - c_2 \hat{\mathcal{J}}_2(\mathbf{u}, p, \theta) + c_3 \hat{\mathcal{J}}_3(\mathbf{u}, p, \theta), \quad (6)$$

où  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  vérifient (1), (2),

Les fonctionnelles sont normalisées par rapport à leurs valeurs maximales et minimales qu'elles peuvent prendre, via la formulation (7). Les valeurs  $f_{max}$  ( respectivement  $f_{min}$ ) de  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  sont obtenues en les maximisant (respectivement minimisant) indépendamment d'autres fonctionnelles. La fonctionnelle locale  $\mathcal{J}_3$  est comprise entre 0 et 1 par construction.

$$\hat{f} = \frac{f - f_{min}}{f_{max} - f_{min}} \quad (7)$$

Pour notre expérience numérique nous aurons pour la suite :  $f_{1max} = 0, f_{1min} = -30, f_{2max} = 0.2, f_{2min} = 0, f_{3max} = 1, f_{3min} = 0$  et  $c_1 = c_2 = c_3 = 0.5$

Le signe négatif devant  $\hat{\mathcal{J}}_2$  vient du fait que l'on cherche à maximiser  $\mathcal{J}_2$  donc à minimiser son opposé.

## 4. Méthode d'optimisation topologique

### 4.1. Fonction d'interpolation

La perméabilité inverse est interpolée par la fonction sigmoïde suivante, telle qu'utilisée dans [1]. Cette fonction pénalise continûment les valeurs intermédiaires de  $\gamma$  afin de les faire tendre vers une valeur  $\gamma$  nulle (fluide) ou très grande (solide). Après l'application de cette fonction, les valeurs intermédiaires sont minoritaires, voire inexistantes. La fonction d'interpolation de la diffusivité (9) est construite sur le même principe. Nous utiliserons par la suite  $\tau = 0.6$ .

$$h_{\tau}(\gamma) = \gamma_{max} \left( \frac{1}{1 + e^{-\tau(\gamma - \gamma_0)}} - \frac{1}{1 + e^{\tau\gamma_0}} \right), \quad (8)$$

$$k_{\tau}(\gamma) = \left( \frac{k_s}{k_f} - 1 \right) \left( \frac{1}{1 + e^{-\tau(\gamma - \gamma_0)}} - \frac{1}{1 + e^{\tau\gamma_0}} \right) + 1. \quad (9)$$

## 4.2. Problème adjoint

La méthode des multiplicateurs de Lagrange décrite dans [1, 4, 5]) est utilisée pour résoudre notre problème d'optimisation. Le lagrangien  $\mathcal{L}$  est défini par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{u}^*, p^*, \theta^*, \gamma) = \mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta) + \int_{\Omega} \mathcal{R}(\mathbf{u}, p, \theta) \cdot (\mathbf{u}^*, p^*, \theta^*) d\Omega, \quad (10)$$

où  $(\mathbf{u}^*, p^*, \theta^*)$  sont les variables adjointes.  $\mathcal{R}(\mathbf{u}, p, \theta) = 0$  sont les contraintes de notre problème d'optimisation données par les équations physiques (1). Les fonctions coûts peuvent se décomposer en fonctionnelles définies sur la frontière du domaine ou bien son volume. Afin d'obtenir une formulation générale du problème d'optimisation, nous considérons

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, p, \theta) = c_1 \mathcal{J}_1 + c_2 \mathcal{J}_2 + c_3 \mathcal{J}_3 = \int_{\Omega} \mathcal{J}_{\Omega}(\mathbf{u}, p, \theta) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathcal{J}_{\Gamma}(\mathbf{u}, p, \theta) d\Gamma.$$

La dérivée fonctionnelle (au sens de Fréchet) de  $\mathcal{J}_3$  est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u} [\delta u] &= \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)}{(\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s} (\nabla \theta \cdot \delta u) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^2 \left( \frac{\|\nabla \theta\|^2 u \cdot \delta u}{((\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s)^2} \right) d\Omega, \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} [\delta \theta] &= \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)}{(\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s} (\nabla \delta \theta \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^2 \left( \frac{\|\mathbf{u}\|^2 \nabla \theta \cdot \nabla \delta \theta}{((\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s)^2} \right) d\Omega, \\ &= \int_{\partial \Gamma} \delta \theta \Phi \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} \delta \theta \operatorname{div} \Phi d\Omega, \end{aligned}$$

avec

$$\Phi = \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)}{(\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s} \mathbf{u} - \left( \frac{\|\mathbf{u}\|^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^2}{((\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s)^2} \right) \nabla \theta.$$

Les dérivées de la somme des différentes fonctionnelles sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial u} &= \int_{\Omega} c_3 \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)}{(\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s} (\nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} c_3 (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta)^2 \left( \frac{\|\nabla \theta\|^2 u}{((\|\mathbf{u}\| \|\nabla \theta\|)^2 + s)^2} \right) d\Omega, \\ \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial \theta} &= - \int_{\Omega} c_3 \operatorname{div} \Phi d\Omega, \\ \frac{\partial \mathcal{J}_{\Omega}}{\partial p} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Et prenant les conditions limites de notre problème qui annulent certaines intégrales surfaciques, les dérivées fonctionnelles de  $\mathcal{J}_{\Gamma}$  sont :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial p} \right|_{\Gamma_i} &= -c_1 \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ \left. \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \theta} \right|_{\Gamma_o} &= c_2 \frac{1}{|\Gamma_o|} \int_{\Gamma_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + c_3 \int_{\Gamma_o} \Phi \cdot \mathbf{n} dS \\ \left. \frac{\partial \mathcal{J}_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\Gamma_o} &= -c_1 \frac{1}{|\Gamma_o|} \mathbf{n} \int_{\Gamma_o} p_t dS - c_1 \mathbf{u} \cdot \int_{\Gamma_o} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ &+ c_2 \frac{1}{|\Gamma_o|} \mathbf{n} \int_{\Gamma_o} \theta dS, \end{aligned} \quad (12)$$

Les points qui annulent  $\mathcal{L}$  par rapport aux variables primales permettent d'obtenir les équations du problème adjoint (13) qui est donné par [1, Eq. (15-16)].

$$\begin{aligned}\nabla p^* - h_\tau(\gamma)\mathbf{u}^* + \theta \nabla \theta^* + A \Delta \mathbf{u}^* + \nabla \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial \mathbf{u}} \text{ sur } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^* &= \frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial p} \text{ sur } \Omega, \\ B \mathbf{u}^* \cdot \vec{e}_y + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta^* + \nabla \cdot (C k_\tau(\gamma) \nabla \theta^*) &= \frac{\partial \mathcal{J}_\Omega}{\partial \theta} \text{ sur } \Omega,\end{aligned}\tag{13}$$

et leurs conditions limites associées :

$$\begin{aligned}\text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 : \quad \mathbf{u}^* &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \theta} = \text{Re}^{-1} \text{Pr}^{-1} k_\tau(\alpha) \nabla \theta^* \cdot \mathbf{n}, \quad \partial_n p^* = 0, \\ \text{sur } \Gamma_i : \quad u_i^* &= 0, \quad \theta^* = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial p} = -u_n^*, \quad \partial_n p^* = 0, \\ \text{sur } \Gamma_{o1} : \quad u_t^* &= 0, \\ &-\theta^* u_n - \text{Re}^{-1} \text{Pr}^{-1} k_\tau(\gamma) \partial_n \theta^* = \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \theta}, \\ &-p^* - \theta^* \theta - \text{Re}^{-1} \partial_n \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} - u_n^* u_n - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* = \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \\ \text{sur } \Gamma_{o2} : \quad u^* &= 0, \quad \theta^* = 0, \\ &-p^* - \text{Re}^{-1} \partial_n \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathcal{J}_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}\end{aligned}\tag{14}$$

où  $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  et  $u_t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$  sont la composante normale et tangentielle de  $\mathbf{u}$  et où  $\Gamma_{o1}$  et  $\Gamma_{o2}$  représentent la frontière de sortie du domaine lorsque le fluide est sortant ( $\Gamma_{o1}$ ) ou bien rentrant  $\Gamma_{o2}$ .

### 4.3. Implémentation

Le gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres de conception  $\gamma$  est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \gamma}(\gamma) &= \frac{\partial h_\tau}{\partial \gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* - C \frac{\partial k_\tau}{\partial \gamma} \nabla \theta \cdot \nabla \theta^* \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \gamma}(\gamma) &= -C \frac{\partial k_\tau}{\partial \gamma} \theta^* \text{ avec } \partial_n \theta = -1 \quad \text{sur } \Gamma_1.\end{aligned}\tag{15}$$

Une méthode du gradient conjugué permet d'itérer vers la configuration qui minimise les fonctions coûts (voir [5, p. 5, Figure 2]).

## 5. Expérience numérique

L'implémentation d'un solveur adjoint a été réalisée en interne grâce à la librairie OpenFOAM. Le cas physique considéré est celui du canal présenté précédemment. Les composantes de chaque fonctionnelle ainsi que la puissance thermique développée par le canal sont calculées pour les différents cas. La puissance thermique est donnée par l'équation (16).

$$P_{th} = \int_{\Gamma_o} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Gamma_i} \theta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.\tag{16}$$

Nous calculons aussi la fraction  $Q_t$  de solide ajoutée au domaine  $\Omega$

$$Q_t = \frac{1}{\gamma_{max} V_{tot}} \int_{\Omega} h_\tau(\gamma) d\Omega,\tag{17}$$

où  $V_{tot} = 2Hb$  est le volume total d' $\Omega$ .

Trois cas sont étudiés. Le cas 1 est celui du canal non optimisé, le second correspond à l'utilisation des fonctionnelles globales (3) et (4), comme cela a été fait dans [1]. Le troisième cas consiste à ajouter l'usage de la fonctionnelle locale (5) au cas 2. Tous les cas sont simulés avec  $Ri = 200$  et  $Re = 400$ .

Les Figures 3-(a), 3-(b) et 3-(c) concernent le cas 2 et représentent respectivement le champ de densité solide ( $h(\gamma)$ ), le champ de vitesse  $u$  et le champ de température  $\theta$ . Les Figures 3-(d), 3-(e), 3-(f) concernent le cas 3 et représentent les mêmes champs. Le Tableau 1 donne les différentes grandeurs post-traitées pour les différents cas.

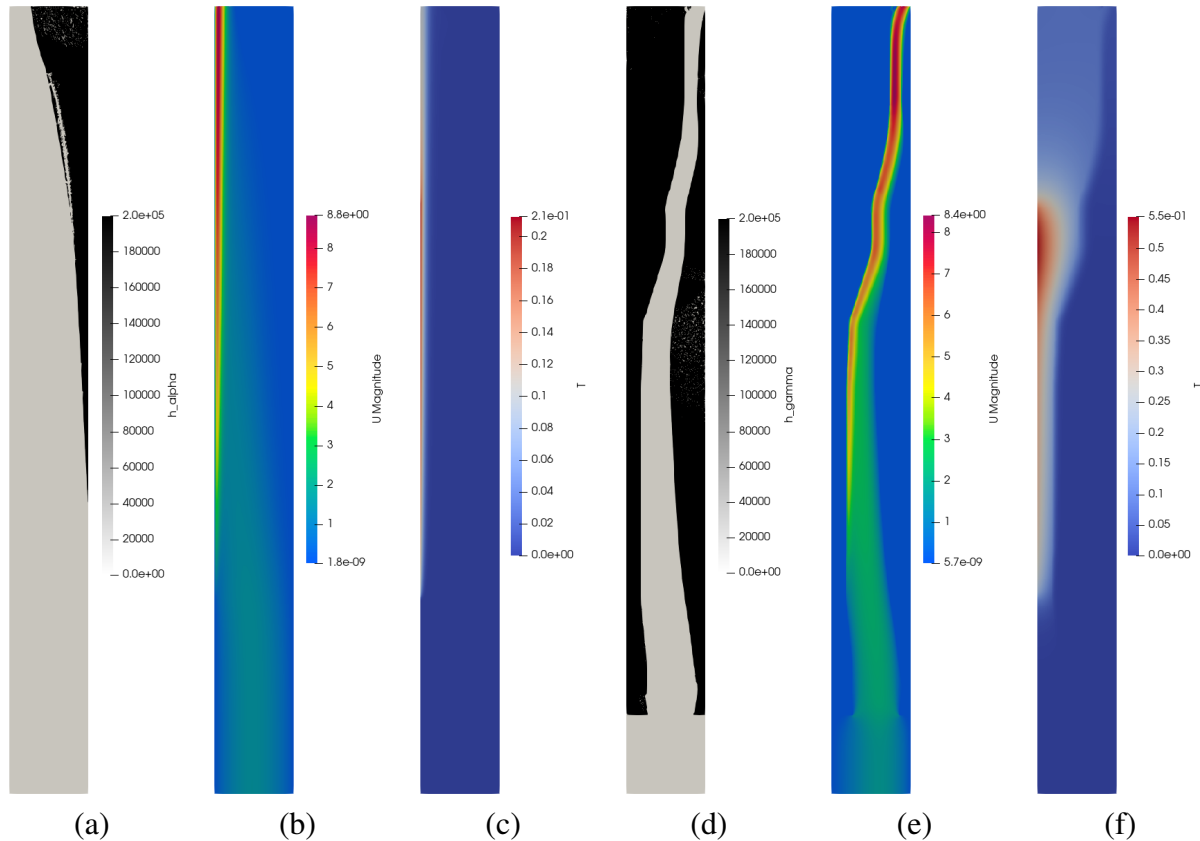


Figure 3: **Cas 2** : Canal optimisé avec utilisation des deux fonctionnelles globales. (a) : perméabilité inverse — (b) : Champ de vitesse — (c) : Champ de température  
**Cas 3** : Canal optimisé avec l'ajout de la fonctionnelle locale aux deux fonctionnelles globales. (d) : perméabilité inverse — (e) : Champ de vitesse — (f) : Champ de température

## 6. Discussions et conclusions

La Figure 4 représente la fonction coût au fil des itérations. Celle-ci décroît et tend vers une valeur asymptotique. L'ajout de la fonctionnelle locale aux fonctionnelles globales donne des profils de canal très différents, comme le montre la comparaison entre les Figures 3-(a) et 3-(d). La fonctionnelle locale a donc un effet non négligeable sur les canaux optimisés, la quantité de matière ajoutée passant de 14.3% à 55.0%. Comme le montre le tableau 1, la puissance thermique  $P_{th}$  est sensiblement la même entre le cas 2 et le cas 3. Pour autant, la fonctionnelle locale vient renforcer le poids de la fonctionnelle thermique  $\mathcal{J}_2$  qui augmente de près de 2 fois

entre les cas 2 et 3. Le canal obtenu dans le cas 3 transfère mieux la chaleur en faisant face à près de 72% de pertes de charge en moins au fil de l'écoulement.

Il serait intéressant d'étudier le comportement de cette fonctionnelle locale de façon isolée. Les tests que nous avons menés à ce jour avec diverses fonctionnelles locales font ressortir des difficultés considérables de convergence des calculs. L'algorithme de descente actuel doit être amélioré pour traiter les fonctionnelles objectifs locaux. Des travaux de recherches sont encore à mener pour nous éclairer sur le potentiel de ce type de fonctionnelle dans un contexte industriel.

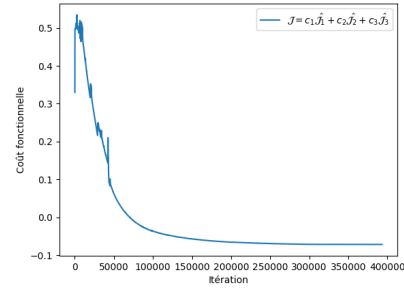


Figure 4: Coût de la fonctionnelle en fonction des itérations du calcul.

Tableau 1: Quantités avec et sans optimisation avec  $Re= 400$ ,  $Ri= 200$  et  $\omega = 0.5$  et pour le *Cas 1* (sans optimisation), le *Cas 2* (avec optimisation  $\mathcal{J}_1$ ,  $\mathcal{J}_2$ ) et le *Cas 3* (avec optimisation  $\mathcal{J}_1$ ,  $\mathcal{J}_2$ ,  $\mathcal{J}_3$ )

	$P_{th}$	$\mathcal{J}_1$	$\mathcal{J}_2$	$\mathcal{J}_3$	$\mathcal{J}$	$Q_t$
cas 1	0.017	-9.176	0.022	0.016	0.106	0
cas 2	0.053	-24.928	0.062	0.019	0.270	14.5
cas 3	0.051	-16.424	0.125	0.027	-0.024	55.8

**Acknowledgements :** Alain Bastide, Delphine Ramalingom et Pierre-Henri Cocquet sont financés par le projet ANR O-TO-TT-FU (ANR-19-CE40-0011).

## Références

- [1] D. Ramalingom, A multi-objective optimization problem in mixed and natural convection for a vertical channel asymmetrically heated. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 60(5) (2019), 2001–2020
- [2] J. Alexandersen, A review of topology optimisation for fluid-based problems. *Fluids* 5(1) (2020), 29
- [3] Dbouk, Talib. A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization. *Applied Thermal Engineering* 112 (2017), 841–854
- [4] C. Othmer, A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 58(8) (2008), 861–877
- [5] D. Ramalingom, A new interpolation technique to deal with fluid-porous media interfaces for topology optimization of heat transfer. *Computers & Fluids* 168 (2018), 144–158