Optimisation de la caractérisation thermique de l'argent fritté par la méthode flash

Optimization of the thermal characterization of sintered silver by the flash method

Anas Sghuri, Yann Billaud*, Loïc Signor, Pascal Gadaud, Didier Saury, Xavier Milhet

Institut Pprime UPR CNRS 3346 - CNRS / ENSMA / Univ. Poitiers
1 avenue Clément Ader, B.P. 40109, F-86961, Futuroscope Chasseneuil CEDEX, FRANCE

*(auteur correspondant : yann.billaud@ensma.fr)**

Résumé :

Ce travail présente une optimisation de la caractérisation thermique par la méthode flash de l'argent fritté, utilisé notamment pour le report de composants électroniques. L'étude s'appuie sur une évaluation comparative de la durée et du niveau d'intensité d'excitation du laser, par rapport à la face de mesure, et de leurs effets sur la précision de l'estimation des diffusivités thermiques du matériau. La méthode d'estimation des diffusivités repose sur la résolution d'un problème inverse en minimisant l'écart quadratique entre la réponse d'un modèle semi-analytique 3D et les mesures issues d'une unique expérience de type méthode flash. Pour cette étude préliminaire, des données synthétiques représentatives seront utilisées. L'estimateur retenu, connu sous le nom de ENH (Estimation par Normalisation des Harmoniques), consiste à diviser les mesures par une harmonique de référence de manière à transformer le problème inverse non-linéaire en un problème inverse linéaire par rapport aux paramètres à estimer. Cette méthode permet l'estimation simultanée des composantes de la diffusivité dans le plan de l'excitation (α_x et α_y) ainsi que les paramètres associés à l'excitation non uniforme. La précision de la méthode est évaluée à partir de données synthétiques, et les résultats de l'identification correspondants aux configurations étudiées, en termes de face de mesure et d'excitation, sont présentés et commentés.

Mots clés : Matériau fortement diffusif, conception d'expérience, méthode flash, problème inverse.

Nomenclature

Symboles latins

a_x, a_y, a_z	Diffusivités thermiques	$m^2.s^{-1}$	r	Rayon du spot laser	m
C	Capacité thermique	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	T	Température relative	m
h	Coefficient d'échange thermique	$W.m^{-2}.K^{-1}$	$u(t)$	Fonction temporelle du faisceau laser	K
$C_{m,n}$	rapport des harmoniques de l'excitation		u_k	Solutions de l'équation transcendante	

https://doi.org/10.25855/SFT2021-044

$E_{m,n}$	Valeur limite adiabatique d'une harmonique		Y^*	Vecteur des observables	s^{-1}
l_x, l_y, l_z	Dimensions de l'échantillon	m	$Y(\beta)$	Vecteur des sorties du modèle	
p	Variable de Laplace		$Z_k(z)$	Base de fonction suivant z et indicées sur k	
Q	Énergie déposée sur le matériau	J			
			Symboles grecs		
β	Vecteur de paramètres à estimer		$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$	Conductivités thermiques	$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\hat{\beta}$	Vecteur de paramètres optimaux		ρ	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
Δt_{laser}	Durée du pulse laser	s	σ	Écart-type	$°C$
$\theta_{m,n}(p)$	Harmoniques dans le domaine de Laplace	$K.m^2.s$			
			Indices exposants		
x, y, z	Coordonnées cartésiennes		m, n	Modes spatiaux	

1. Introduction

L'augmentation de la densité de puissance des composants électroniques a incité les constructeurs à envisager de nouvelles techniques de report de composants. En effet, l'utilisation d'assemblages électroniques dits classiques (e.g. brasures) dans des environnements où les variations thermiques sont importantes peut poser des problèmes techniques majeurs comme, par exemple, la fonte des alliages de brasure pouvant entrainer la défaillance des assemblages [1]. Dans ce contexte, les composants électroniques peuvent être reportés par frittage d'argent dans certains systèmes comme ceux utilisés en aéronautique, réputés pour fonctionner dans des conditions sévères. En effet, cette technologie d'assemblage permet de remplacer les brasures usuelles par un matériau ayant à la fois une diffusivité thermique importante, permettant de limiter au maximum la surchauffe des composants par effet Joule, et un point de fusion relativement élevé. À ce titre l'argent, avec sa conductivité thermique de l'ordre de $400\ W.m^{-1}.K^{-1}$ et sa température de fusion de 962°C, est un très bon candidat pour assurer le report de tels composants [2]. Cependant, le procédé de frittage conduit à des matériaux poreux qui diminuent sensiblement à la fois les propriétés mécaniques et thermiques [3] [4]. Par conséquent, le présent article a pour objectif d'une part, l'étude de faisabilité, et d'autre part l'optimisation, de la caractérisation thermique de l'argent fritté par la méthode flash [5]. L'étude présentée ici concerne l'identification simultanée des composantes parallèles à l'excitation de la diffusivité thermique d'échantillons d'argent pur. L'identification proposée repose sur une méthode d'estimation directe qui minimise l'écart quadratique entre les mesures issues d'une unique expérience de type 'flash' [5] réalisées par camera IR et les sorties d'un modèle direct semi-analytique basé sur les « quadripôles thermiques 3D » [6]. Les paramètres recherchés sont identifiés en appliquant l'estimateur ENH [7] (Estimation par Normalisation des Harmoniques) qui consiste à diviser les mesures par une harmonique de référence de manière à transformer le problème inverse non-linéaire en un problème inverse linéaire par rapport aux paramètres à estimer. Cette méthode permet à la fois l'estimation simultanée des composantes de la diffusivité dans le plan de l'excitation (a_x et a_y), mais aussi l'estimation des paramètres associés à l'excitation non uniforme qui dépend du tir laser.

Dans un premier temps le modèle direct et la méthode d'estimation sont présentés. L'estimation elle-même est ensuite menée sur un matériau modèle composé d'argent pur (i.e. porosité nulle), ce qui constitue le cas le plus difficile en termes d'identification. Une étude de faisabilité et de robustesse, basée sur les données simulées et bruitées et sur une matrice d'expérience, est présentée. La précision de la méthode est évaluée à partir des résultats d'identification des différentes configurations étudiées, en termes d'énergie d'excitation, de durée de pulse laser et de face de mesure et d'excitation.

2. Modélisation et méthode d'estimation

L'estimation de la diffusivité thermique constitue une classe de problème inverse de transfert de chaleur qui consiste à minimiser l'écart quadratique entre la sortie d'un modèle semi-analytique et la mesure expérimentale correspondante. Le modèle actuel, inspiré du formalisme des quadripôles, permet d'exprimer analytiquement l'évolution d'observables d'une expérience impliquant des conditions complexes. Dans cette étude, le code de calcul par éléments finis FlexPDE [8] est utilisé pour générer des données relatives à l'expérience. À l'instar du modèle semi-analytique, le modèle implémenté dans FlexPDE décrit de manière transitoire le transfert de chaleur au sein d'un matériau homogène et opaque suite à une excitation thermique non uniforme en espace et de durée variable Δt_{laser}.

2.1. Modèle mathématique

A $t = 0$, le matériau est supposé être en équilibre thermique avec l'environnement $T_0 = T_\infty$. Dans le travail présenté ici, la température est remplacée par la variation de température sans introduire de nouvelle variable pour ne pas alourdir la notation i.e. $T(x, y, z, t = 0) = 0$. Les pertes par convection et par rayonnement au niveau des faces avant et arrière sont représentées par un unique coefficient d'échange thermique linéarisé égal à $h = 10\ W.m^{-2}K^{-1}$. Au sein de l'échantillon, la température évolue selon l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_x \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_y \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_z \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \text{à } z \in [0, l_z] \qquad (1)$$

Au niveau des frontières de l'échantillon, la température évolue selon les conditions aux limites :

$$-\lambda_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = -h \cdot T + \phi(x, y, t) \qquad \text{à } z = 0 \qquad (2)$$

$$-\lambda_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = -h \cdot T \qquad \text{à } z = l_z \qquad (3)$$

$$-\lambda_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \text{à } x = 0\ et\ x = l_x \qquad (4)$$

$$-\lambda_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \text{à } y = 0\ et\ y = l_y \qquad (5)$$

Les faces latérales sont ainsi considérées comme étant thermiquement isolées.

2.2. Résolution semi analytique

Concernant le modèle semi-analytique utilisé par l'estimateur, la résolution du système d'équations présenté ci-dessus est réalisée en projetant le champ de température sur une autre base de fonctions, dans l'espace cosinus de Fourier pour chacune des directions x et y. Ces projections, basées sur des intégrales, donnent naissance à des harmoniques avec des modes spatiaux normalisés pour être homogènes à des températures. Les indices m et n correspondant respectivement aux directions x et y.

$$\theta_{m,n}(z,p) = \frac{1}{l_x \cdot l_y} \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} T(x,y,z,t)\, cos\left(m \cdot \pi \cdot \frac{x}{l_x}\right) cos\left(n \cdot \pi \cdot \frac{y}{l_y}\right) \cdot dx \cdot dy \qquad (6)$$

Cette expression permet, en exprimant $T(x,y,z,t)$ à partir de transformées intégrales, de supprimer les dérivées partielles et ainsi transformer le système en simples équations algébriques. On obtient ainsi l'expression suivante :

$$\theta_{m,n}(z,t) = E_{m,n} \cdot \left[2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k \cdot Z_k(z)}{u_k^2 + H^2 + 2 \cdot H} \cdot e^{-\tau_z \cdot u_k^2 \cdot t}\right] \cdot e^{-\left(\tau_x \cdot (m \cdot \pi)^2 + \tau_y \cdot (n \cdot \pi)^2\right) \cdot t} \quad (7)$$

avec u_k les solutions positives de l'équation transcendante, $\tau_x = a_x / l_x^2$, $\tau_y = a_y / l_y^2$ et H le nombre de Biot [9]. En exploitant toutes les harmoniques et en utilisant comme référence l'harmonique $\theta_{2,2}(t)$ on obtient :

$$Y_{m,n}(t) = \ln\left(\frac{|E_{m,n}|}{|E_{2,2}|}\right) - \left(\tau_x \cdot (m^2 - 2^2) + \tau_y \cdot (n^2 - 2^2)\right) \cdot \pi^2 \cdot t \qquad (8)$$

On introduit les paramètres $C_{m,n} = \ln\left(\frac{E_{m,n}}{E_{2,2}}\right)$ qui correspondent au rapport des harmoniques de l'excitation. Ces paramètres sont inconnus et doivent être estimés en même temps que τ_x et τ_y. On remarquera que pour une harmonique fixée, les observables dépendent linéairement du temps. On cherche ainsi le jeu de paramètres $\beta = \left[\tau_x, \tau_y, C_{0,0}, C_{2,0}, \dots C_{m,n} \dots C_{6,6}\right]$ qui minimise l'écart entre les sorties du modèle Y et les données simulées Y^*. Cette partie est détaillée dans le chapitre Résolution du problème inverse.

2.3. Résolution numérique

Afin de simuler les données expérimentales, le système d'équations décrit ci-dessus est résolu par un code de calcul basé sur les éléments finis FlexPDE. Ainsi, on simule un système excité de manière localisée, sur la face avant, par un flux radiatif de durée Δt_{laser}, d'énergie Q, centrée et de distribution spatiale Gaussienne avec un écart type de $\sigma_x = l_x/6$ et $\sigma_y = l_y/6$. Pour prévenir tout problème lié aux discontinuités, la densité de flux est distribuée de manière Gaussienne durant l'excitation avec un écart type $\sigma_t = \Delta t_{laser}/2$.

La durée physique des simulations correspond à 15s. Le nombre de mailles varie au cours des simulations (maillage adaptatif en fonction de l'intensité des flux de chaleur). Celui-ci atteint 5768 nœuds pour la configuration $l_z = 10\,mm$, $Q = 1\,J$ et $\Delta t_{laser} = 1\,s$ alors que la configuration $l_z = 1\,mm$, $Q = 100\,J$ et $\Delta t_{laser} = 0{,}01\,s$ nécessite 23360 nœuds pour converger. Les temps de calculs occasionnés sont compris entre environ 1min et 4min selon la configuration. Dans cette étude, le pas de temps utilisé est de $0{,}02s$ ce qui correspond à la fréquence d'acquisition d'une caméra thermique standard actuelle, soit $50Hz$. Les données de sorties, qui correspondent à l'évolution des champs de température en face avant et en face arrière, sont traitées en appliquant des transformées de Fourier par l'estimateur ENH.

2.4. Résolution du problème inverse

L'estimation par normalisation des harmoniques (ENH) permet d'estimer les paramètres associés à l'excitation, simultanément avec l'inverse des temps caractéristiques de diffusion selon les directions x et y. Dans le cadre de cette étude le vecteur paramètres à estimer est $\beta = [\tau_x, \tau_y, C_{0,0}, C_{2,0}, \dots C_{m,n} \dots C_{6,6}]$, les diffusivités étant ensuite calculées via la définition $a_x = \tau_x \cdot l_x^2$ et $a_y = \tau_y \cdot l_y^2$. Les paramètres $C_{m,n}$ correspondent au rapport des harmoniques de l'excitation. Ils sont inconnus et doivent être estimés parallèlement à a_x et a_y. On notera que le nombre de paramètres à estimer dépend du nombre de modes choisi (déterminé par essai/erreur successifs), ici m et $n \in [0,2,4,6]$, ainsi la taille du vecteur β vaut 18 moins l'harmonique de référence, soit 17. La linéarisation du problème inverse réalisée via la méthode ENH aboutit à un problème de minimisation dont la résolution est explicite. On introduit la matrice de sensibilité X en écrivant $Y = X \cdot \beta$. Ainsi, la solution $\hat{\beta}$ s'exprime comme $\hat{\beta} = [X^T W X]^{-1} X^T W Y^*$. Le problème inverse étant linéaire on peut considérer celui-ci comme bien-posé. On s'assura tout de même que $\det(X^T W X) \neq 0$.

3. Résultats et discussion

Un échantillon fictif fortement diffusif (i.e. l'argent) nécessite de disposer d'une fréquence d'acquisition très importante afin de capturer la dynamique des transferts thermiques et ainsi estimer les paramètres recherchés. L'échantillon considéré a une dimension $l_x = l_y = 30\ mm$ et une épaisseur l_z variable. La capacité thermique de l'échantillon est de $C = 236\ J.kg^{-1}.K^{-1}$, sa masse volumique vaut $\rho = 10500\ kg.m^{-3}$ et sa diffusivité thermique est fixée à $\alpha = 173 \cdot 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$. Le modèle développé étant destiné à reproduire une expérience de type flash, il convient de paramétriser la forme de l'excitation. Une distribution du flux imposé de forme gaussienne est considérée pour simuler l'excitation correspondant à un laser CO_2.

L'énergie déposée sur la face avant de l'échantillon par le laser Q est considérée égal à 1, 10 et 100 *J*. La durée du pulse laser Δt_{laser} est considérée respectivement égale à 10^{-2}, 10^{-1} et 1 s. Finalement 3 épaisseurs d'échantillons l_z sont considérées : 1, 5 et 10 mm. L'ensemble des combinaisons de ces paramètres, étudiées pour une estimation par mesure en face avant et en face arrière, conduit à une matrice d'expériences de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$ simulations. La valeur absolue de l'écart relatif entre les valeurs originales (i.e. utilisées pour effectuer la simulation directe) et les valeurs estimées, $|\Delta a|/a$, sont présentés en pourcentage dans le *Tableau 1* pour les deux configurations (i.e. face avant et arrière), sans bruit. Pour évaluer la faisabilité de chacune des expériences, les températures maximales au niveau des faces avant et arrière sont également indiquées.

Tout d'abord on peut remarquer que la méthode d'estimation capture le caractère isotrope du matériau. En effet, quelle que soit la configuration, les diffusivités thermiques estimées sont relativement proches. Comme on pouvait s'y attendre, les identifications effectuées en face arrière donnent de meilleurs résultats. Également, on peut remarquer que pour une énergie et une durée d'excitation données, la précision augmente avec l'épaisseur. Par exemple pour $Q = 1\,J$ et $\Delta t_{laser} = 0{,}1s$ on obtient une erreur relative de 12,2%, 6,7% et 5,1% pour respectivement $l_z = 1, 5$ et $10mm$. Finalement, pour une épaisseur et une énergie données, les meilleurs résultats sont obtenus pour la durée d'excitation la plus faible étudiée (i.e. 0.01s). Les configurations présentant les meilleurs résultats ($|\Delta a_x|/a_x < 10\%$) sont colorées en vert, à l'exception de celles dont la température en face avant et/ou arrière excède 100°C. En effet une amplitude de mesure trop importante compromet l'estimation expérimentale en raison des limitations de mesures de la caméra thermique.

Paramètres				Erreur relative (%)				Température maximale	
				Face avant		Face arrière			
Épaisseur (mm)	$Q(J)$	Δt_{laser} (s)	Puissance (W)	$\lvert\Delta a_x\rvert/a_x$	$\lvert\Delta a_y\rvert/a_y$	$\lvert\Delta a_x\rvert/a_x$	$\lvert\Delta a_y\rvert/a_y$	Face avant	Face arrière
1	1	0,01	100	0,4	0,6	0,1	0,5	230	230
1	1	0,1	10	6,4	9,4	12,2	12,0	40	39
1	1	1	1	73,7	72,3	75,5	78,8	25	25
1	10	0,01	1000	0,2	0,1	0,4	0,00	2075	2080
1	10	0,1	100	10,5	8,9	7,6	7,8	173	167
1	10	1	10	75,3	76,7	74,8	75,6	30	29
1	100	0,01	10000	0,9	0,2	0,6	0,0	20515	20564
1	100	0,1	1000	12,1	13,0	11,1	10,5	1507	1446
1	100	1	100	76,1	76,6	74,4	74,2	70	69
5	1	0,01	100	0,3	0,4	0,2	0,8	98	50
5	1	0,1	10	26,0	15,1	6,7	11,4	31	27
5	1	1	1	75, 6	81,8	72,8	72,9	25	25
5	10	0,01	1000	0,3	1,1	0,3	0,3	757	280
5	10	0,1	100	14,6	21,1	6,2	8,1	82	46
5	10	1	10	81,9	85,4	69,5	77,6	26	26
5	100	0,01	10000	0,0	0,3	0,4	0,2	7355	2576
5	100	0,1	1000	18,2	27,6	11,3	4,4	590	233
5	100	1	100	82,4	83,5	69,5	72,5	37	33
10	1	0,01	100	0,9	0,1	0,3	0,1	98	30
10	1	0,1	10	38,9	28,2	5,1	3,7	31	26
10	1	1	1	90,0	83,6	66,9	68,0	25	25
10	10	0,01	1000	1,3	0,0	0,2	0,3	756	78
10	10	0,1	100	39,3	38,6	3,5	3,4	81	30
10	10	1	10	86,7	89,4	69,5	66,1	26	25
10	100	0,01	10000	0,1	0,1	0,5	0,4	7328	557
10	100	0,1	1000	37,6	39,9	4,1	5,0	586	76
10	100	1	100	86,5	85,9	68,5	65,9	35	28

Tableau 1 : Résultats des estimations obtenues en fonction de la face d'excitation/mesures (face avant et face arrière).

Afin d'évaluer la robustesse de la méthode vis-à-vis du bruit de mesure, un bruit de distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart type $\sigma = [10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}]$ est ajouté à l'ensemble des champs de températures simulant différents niveaux de précision de la caméra thermique. Les résultats pour la configuration $l_z = 5mm$, $Q = 1\,J$ et $\Delta t_{laser} = 0{,}1s$ sont présentés *Tableau 2*.

	Face arrière			
σ [°C]	a_x	a_y	$\lvert\Delta a_x\rvert/a_x$	$\lvert\Delta a_y\rvert/a_y$
10^{-3}	161.5	158.3	6.7	8.5
10^{-2}	159.7	159.8	7.7	7.7
10^{-1}	152.7	150.9	11.8	12.8

Tableau 2 : Influence du niveau de bruit de la caméra sur les estimations obtenues en face arrière pour la configuration $l_z = 5mm$, $Q = 1\,J$ et $\Delta t_{laser} = 0{,}1s$.

On peut voir que l'ajout de bruit diminue légèrement la précision de l'identification. Les caméras actuelles ont des précisions telles que l'écart type est compris entre 10^{-2} et 10^{-1}°C [10], ce qui correspond à une erreur proche de 10%.

4. Conclusion

L'objectif de ce travail était de concevoir de manière optimale une expérience destinée à l'estimation de paramètres thermophysiques d'échantillons d'argent. Pour cela, une méthode d'identification des diffusivités thermiques perpendiculaires au plan d'excitation de type « flash » est présentée et appliquée de manière théorique sur un échantillon d'argent fortement diffusif. Cette méthode, nommée ENH, est basée sur la normalisation des harmoniques, qui, en appliquant une opération numérique aux mesures, permet de transformer le problème inverse non-linéaire en un problème inverse linéaire par rapport aux paramètres τ_x, τ_y et $C_{m,n}$. Le nombre de paramètres relatifs la forme spatiale de l'excitation thermique $C_{m,n}$, à déterminer parallèlement à τ_x et τ_y, est ici de 15 compte tenu des harmoniques exploitées. Il a été montré que l'observable à privilégier était l'évolution de la température en face arrière de l'échantillon. Également, parmi les paramètres ajustables de l'expérience, le niveau d'énergie et la durée de dépôt de celle-ci doivent être les plus faibles possible car les résultats obtenus sont plus précis. Cependant, un compromis entre ces paramètres est à trouver de manière à éviter d'atteindre des niveaux de température qui rendent difficile la mesure par caméra thermique. Le modèle semi analytique étant basé sur l'hypothèse d'une excitation impulsionnelle, il n'est pas surprenant d'observer que les estimations se dégradent au fur et à mesure que l'on augmente la durée de l'excitation. Par ailleurs, les écarts entre les données estimées et réelles ne sont pas forcément générés par l'estimateur lui-même mais peuvent provenir d'erreurs numériques qui apparaissent lors de la génération des données synthétiques via FlexPDE (schéma numérique utilisé, interpolation lors de l'exportation, …). Les différentes estimations réalisées ont permis d'identifier les configurations les plus adaptées et ainsi établir le protocole expérimental, notamment en ce qui concerne les dimensions des échantillons et de l'excitation thermique. De tels échantillons, par nature fortement réfléchissants, devront être traités de manière à maximiser, d'une part, l'énergie absorbée lors de l'excitation, et d'autre part, l'énergie émise par émission, celle-là même qui est mesurée par la caméra thermique pour permettre l'indentification.

5. Bibliographie

[1] T. Geoffroy, «Assemblages électroniques par frittage d'argent pour équipements aéronautiques fonctionnant en environnements sévères», Université Paris sciences et lettres, 2017.

[2] X. Milhet, A. Nait-Ali, D. Tandiang, Y.-J. Liu, D. Van Campen, V. Caccuri et M. Legros, «Evolution of the nanoporous microstructure of sintered Ag at high temperature using in-situ X-ray nanotomography,» *Acta Materialia,* pp. 310-317, 2018.

[3] P. Gadaud, V. Caccuri, D. Bertheau, J. Carr et X. Milhet, *«Ageing sintered silver: Relationship between tensile behavior, mechanical properties and the nanoporous structure evolution»,* Materials Science and Engineering: A, 379-386, 2016.

[4] L. Signor, P. Kumar, B. Tressou, C. Nadot-Martin, J. Miranda-Ordonez, J. Carr, K. Joulain et X. Milhet, *«Evolution of the Thermal Conductivity of Sintered Silver Joints with their Porosity Predicted by the Finite Element Analysis of Real 3D Microstructures»,* Journal of Electronic Materials, 4170-4176, 2018.

[5] W. J. Parker, R. J. Jenkins, C. P. Butler et G. L. Abbott, «Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity,» *J. Appl. Phys,* pp. 1679-1684, 1961.

[6] D. Maillet, S. André, J. C. Batsale, A. Degiovanni et C. Moyne, «Thermal quadrupoles: solving the heat equation thr integral transforms», Wiley, 2000.

[7] J. Krapez, L. Spagnolo, M. Friess, H.-P. Maier et G. Neuer, «Measurement of in-plane diffusivity in non-homogeneous slabs by applying flash thermography,» *Int. J. of Thermal Sciences,* vol. 43, pp. 967-977, 2004.

[8] FlexPDE, «PDE Solutions Inc,» 2020. [En ligne]. Available: https://www.pdesolutions.com/.

[9] E. R. Elissa, Y. Billaud et S. Didier, ««Unconventional flash technique for the identification of multilayer thermal diffusivity tensors»,» *International Journal of Thermal Sciences,* vol. 155, 2020.

[10] F. S. Inc, «Précision des caméras infrarouges et approximations de langage,» FLIR, 2016. [En ligne]. Available: https://www.flir.fr/discover/rd-science/infrared-camera-accuracy-and-uncertainty-in-plain-language/. [Accès le 2021].