

Modélisation numérique et caractérisation des transferts thermo-hydrauliques lors de la cuisson de gâteaux

Patrick EL HELOU^{1*}, Pascal LE BIDEAU¹, Adrien FUENTES¹, Patrick GLOUANNEC¹

¹Univ. Bretagne Sud, UMR CNRS 6027, IRDL, F-56100 Lorient, France

* (Auteur correspondant : patrick.el-helou@univ-ubs.fr)

Résumé. Cette communication concerne le développement d'un modèle numérique multiphysique représentatif des phénomènes de transfert de chaleur et de masse ainsi que le gonflement lors de la cuisson d'un gâteau contenu dans un moule. L'objectif de cette étude est de fournir un outil numérique efficace, validé expérimentalement, pour une meilleure compréhension des mécanismes conduisant au produit final désiré. Différentes conditions de fonctionnement sont testées pour vérifier la robustesse des prédictions.

Nomenclature

c_p	capacité thermique massique à pression constante, $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	α_m	coefficient de transfert de masse, m.s^{-1}
D_T	coefficient de transport lié aux gradients de température, $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{K}^{-1}$	σ	tenseur de contrainte, Pa
D_W	coefficient de transport lié aux gradients de teneur en eau, $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	σ_{SB}	constante de Stefan-Boltzmann, $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$
D_{P_g}	coefficient de transport lié aux gradients de pression de gaz, $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$	ε	émissivité, -
h	enthalpie massique, J.kg^{-1}	λ	conductivité thermique, $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
M	masse molaire, kg.mol^{-1}	ρ	masse volumique, kg.m^{-3}
n	flux de masse, $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$	<i>Indices et exposants</i>	
R	constante des gaz parfaits, $\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$	m	moule
RH	humidité relative, -	o	ouvert
a_W	activité de l'eau, -	f	fermé
c_p	capacité thermique massique à pression constante, $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	par	paroi
v_s	vitesse de déformation de la phase solide, m.s^{-1}	sat	saturé
I_v	taux de changement de phase liquide-vapeur, $\text{kg.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$	s	solide
<i>Symboles grecs</i>		l	liquide
α_c	coefficient de transfert de chaleur, $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$	g	gaz
		v	vapeur d'eau
		a	air
		c	dioxyde de carbone
		eff	effective
		$surf$	surface

1. Introduction

Le contexte de cette étude se focalise sur les mécanismes présents lors de la cuisson de produits céréaliers. Pour ce faire, le recours à des outils numériques est très important afin de comprendre ce qui se passe au niveau du produit. La cuisson des gâteaux est un processus complexe qui induit un transfert de chaleur et de masse, des réactions chimiques (gélatinisation de l'amidon, dénaturation des protéines, réaction de Maillard...) et des contraintes mécaniques induites par la pression des gaz. De plus, la plupart de ces phénomènes physiques se produisent simultanément, ce qui rend difficile l'interprétation des contributions de chaque phénomène lors de la cuisson et l'impact sur la qualité du produit (déformation de la pâte [1], formation de la mie et de la croûte ([2] - [4]), coloration [5]...). De nombreuses études numériques basées sur des approches mathématiques ont été réalisées pour prédire le transfert de chaleur et de masse et le comportement mécanique des produits céréaliers ([6] - [13]). Dans ce contexte, un modèle numérique multiphysique est développé pour décrire la cuisson d'un gâteau contenu dans un moule. Des tests expérimentaux sont réalisés sous différentes conditions de cuisson. Après une brève description du modèle numérique, les premiers résultats numériques sont représentés et analysés.

2. Descriptif expérimental

Les tests de cuisson sont effectués à deux températures différentes du four: 185°C et 205°C. 38g de pâte sont versés dans un moule à gâteau en acier inoxydable ayant une cavité cylindrique de diamètre 75 mm. L'ensemble est ensuite introduit dans un four (similaire à celui de Ploteau et al. [14]) une fois que la température de cuisson est atteinte en régime permanent. Dans cette configuration, la surface du produit est chauffée par convection naturelle et rayonnement thermique. Les faces inférieures et latérales sont directement en contact avec le moule qui est également chauffé par convection naturelle, rayonnement thermique et conduction. La chaleur à l'intérieur du produit est transportée par conduction et advection (gonflement). Le temps de cuisson est de 18 minutes. L'instrumentation du moule (Figure 1) permet de suivre les températures du produit ainsi que celles du moule lors de la cuisson.

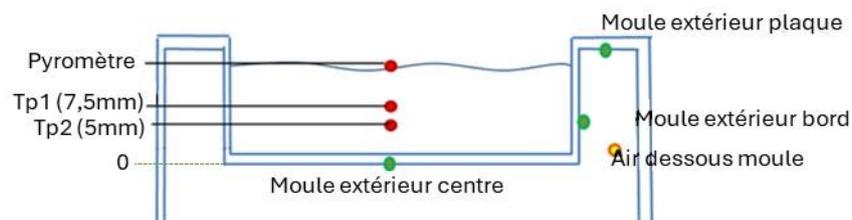


Figure 1. Instrumentation du moule.

La perte de masse est suivie par une balance placée au-dessous du four. De plus, la déformation du produit est capturée par un appareil photo placé devant la porte en verre du four. Des photographies sont réalisées chaque minute (Figure 2) et sont analysées par la suite à l'aide d'un logiciel de traitement d'image. Tous les essais ont été réalisés au moins 3 fois pour assurer la répétabilité.

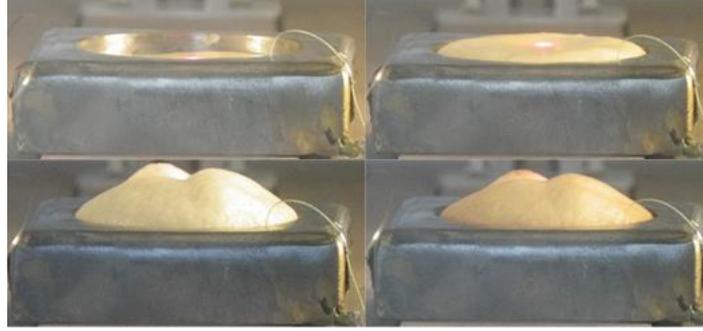


Figure 2. Déformation de la pâte lors de la cuisson.

3. Modèle multiphysique

Un modèle multiphysique est mis en œuvre pour simuler les cinétiques de cuisson du gâteau. Les températures du moule sont calculées. Dans cette approche, on suppose un milieu poreux déformable contenant trois phases : solide (pâte), liquide (eau) et gazeuse. La phase gazeuse comprend deux espèces, l'eau et le dioxyde de carbone (libéré par les agents levants). En se basant sur des équations régissant le transport de chaleur et de masse et sous certaines hypothèses (milieu homogène, équilibre thermodynamique local, mélange de gaz parfaits...), le problème consiste à résoudre un ensemble de cinq équations aux dérivées partielles fortement couplées. Les variables d'état sont la température, la teneur en eau, la pression totale des gaz, la porosité et le déplacement. Le gonflement de la pâte causé par l'augmentation de la pression totale de gaz est prédit par un modèle viscoélastique [15].

3.1 Equation de conservation

3.1.1 Conservation de la masse

Les équations régissant le transport multiphasique dans un milieu poreux sont développées en se basant sur la conservation de la masse de chaque espèce, comme suit:

Conservation de la masse solide:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_s \bar{\rho}_s) = 0 \quad (1)$$

Conservation de la masse liquide:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_l}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_s \bar{\rho}_l) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{n}_l - I_v \quad (2)$$

Conservation de la vapeur d'eau:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_v}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_s \bar{\rho}_v) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{n}_v + I_v \quad (3)$$

Conservation du dioxyde de carbone:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_c}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_s \bar{\rho}_c) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{n}_c \quad (4)$$

Ces quatre équations sont reformulées en fonction de quatre variables d'état : la teneur en eau (W), la température (T), la pression des gaz (P_g) et la porosité (ϕ). La teneur en eau et la porosité étant définies comme:

$$W = \frac{\bar{\rho}_l + \bar{\rho}_v}{\bar{\rho}_s} \quad (5)$$

$$\phi = \frac{V_l + V_v}{V_t} \quad (6)$$

Le transport de liquide induit par le gradient d'eau liquide est exprimé en fonction de T , W et ϕ :

$$\vec{n}_l = D_T^l \vec{\nabla} T + D_W^l \vec{\nabla} W + D_\phi^l \vec{\nabla} \phi \quad (7)$$

Les transports de vapeur et d'air sont supposés être causés par des gradients d'espèces et des gradients de pression de gaz lorsque les bulles de gaz sont ouvertes et deviennent interconnectées pour former une colonne de gaz. Les transports de gaz (vapeur ou air) sont décrits en fonction des gradients thermiques, des gradients d'humidité et des gradients de pression:

$$\vec{n}_{l,o} = D_{T,o}^i \vec{\nabla} T + D_{W,o}^i \vec{\nabla} W + D_{P_g,o}^i \vec{\nabla} P_g \quad (8)$$

Avec $i = v$ (vapeur), a (air)

Au contraire, tant que les bulles sont fermées, il n'y a pas de transport d'air à l'intérieur du milieu ($\vec{n}_{a,f} = 0$) car l'air ne peut pas traverser la pâte environnante. En supposant un état stable, la vapeur se diffuse à l'intérieur des bulles en raison des gradients de concentration de vapeur. La fraction de masse de la vapeur est décrite comme une fonction de la température, de la teneur en humidité et de la pression. Ainsi, son équation est de la forme:

$$\vec{n}_{v,f} = D_{T,f}^v \vec{\nabla} T + D_{W,f}^v \vec{\nabla} W + D_{P_g,f}^v \vec{\nabla} P_g \quad (9)$$

Au début de la cuisson, le produit est un milieu à porosité essentiellement fermée (les bulles de gaz ne sont pas interconnectées), le transport d'air est nul et le transport de vapeur est limité (équation 9). Le transfert de masse se produit dans la phase liquide (équation 7). Lorsque la température et la pression augmentent, le volume des pores devient important et des interconnexions apparaissent. Pour simuler l'ouverture des bulles de gaz, une fonction ζ est introduite comme indiqué dans Ploteau et al. [16]. Cette fonction est une sigmoïde qui varie de 0 à 1 dont le point d'inflexion est fixé à une température T_o ayant une plage de transition de ΔT_o . Par conséquent, les transports de vapeur et d'air sont exprimés en fonction du transport des espèces ($\vec{n}_{l,o}$, $\vec{n}_{l,f}$) et la fonction sigmoïde (ζ).

$$\vec{n}_l = \zeta \vec{n}_{l,o} + (1 - \zeta) \vec{n}_{l,f} \quad (10)$$

3.1.2 Conservation de l'énergie.

L'équation de conservation de l'énergie de la pâte est développée en considérant l'équilibre thermodynamique local [17]:

$$\frac{\partial \overline{\rho h}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_s \overline{\rho h}) = -\vec{\nabla} \cdot (-\lambda_{\text{eff}} \vec{\nabla} T + \vec{n}_l h_l + \vec{n}_v h_v + \vec{n}_a h_a) \quad (11)$$

En ce qui concerne le moule, le transport de la chaleur est représenté par l'équation suivante:

$$\rho_m c_{p,m} \frac{\partial T_m}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (-\lambda_m \vec{\nabla} T_m) \quad (12)$$

3.1.3 Conservation de la quantité de mouvement.

Une approche viscoélastique basée sur le modèle Kelvin-Voigt est utilisée [18]. Elle permet de déterminer la déformation de la phase solide sous l'effet de la pression des gaz:

$$\vec{\nabla} \cdot \overline{\sigma_{eff}} = \vec{\nabla} P_g \quad (13)$$

3.2 Conditions aux limites

3.2.1 Interface air/produit.

Le taux de transfert de masse est égal à la somme des flux de liquide et de vapeur. Il est proportionnel à la différence de masse volumique de la vapeur entre la surface du produit et son ambiance:

$$n_v + n_l = \alpha_m (\rho_{v,surf} - \rho_{v,a}) = \frac{\alpha_m M_v}{R} \left(\frac{a_w P_{v,sat}(T)}{T} - RH_a \frac{P_{sat}(T_a)}{T_a} \right) \quad (14)$$

La pression du gaz est supposée être égale à la pression atmosphérique. La chaleur est échangée avec le milieu environnant par évaporation, convection et rayonnement:

$$\begin{aligned} -\lambda_{eff} \nabla T + n_l h_l + n_v h_v \\ = -\alpha_m (\rho_{v,surf} - \rho_{v,a}) h_v + \alpha_c (T_a - T) + \varepsilon \sigma_{SB} (T_{par}^4 - T^4) \end{aligned} \quad (15)$$

Pour le problème mécanique, un déplacement libre est imposé.

3.2.2 Interface produit/moule.

À cette interface, il n'y a pas de transfert de masse (imperméable). Un contact parfait est considéré ($T = T_m$). Le déplacement normal est fixé à zéro.

3.2.3 Interface moule/air.

Des échanges convecto-radiatif sont considérés à cette interface.

3.3 Modèle numérique

Un modèle 2D axisymétrique est développé à l'aide de Comsol Multiphysics. Toutes les équations, à l'exception de l'équation mécanique, sont implémentées avec des équations aux dérivées partielles (EDP) sous une forme générale dépendante du temps. Un modèle viscoélastique est utilisé pour calculer les contraintes au sein du produit. Une formulation arbitraire lagrangienne-eulérienne (ALE) est adoptée pour modéliser la déformation du produit.

Certaines des propriétés physiques requises par le modèle ont été mesurées à l'aide d'équipements de laboratoire appropriés. La conductivité thermique et la diffusivité de la pâte ont été mesurées par la méthode du Hot Disk. Les mesures effectuées à plusieurs niveaux de teneur en eau ont montré une diminution de la conductivité thermique avec la baisse de l'humidité. Le modèle Maxwell-Eucken [19] est utilisé pour représenter les variations de la conductivité thermique en fonction des fractions de liquide et de gaz à l'intérieur de la pâte. Les capacités thermiques de la pâte non cuite et de la pâte cuite ont été mesurées par calorimétrie différentielle à balayage. De plus, l'activité de l'eau de la pâte a été mesurée par un équipement de sorption dynamique de la vapeur à 25°C, 40°C et 70°C. Le modèle de Fontan [20] a été utilisé pour ajuster la relation entre l'activité de l'eau et la teneur en eau. La fraction de gaz initiale de la pâte est déterminée à l'aide d'un pycnomètre à hélium. Enfin, l'émissivité de la pâte et du produit final est mesurée à l'aide d'un spectromètre infrarouge à transformée de Fourier.

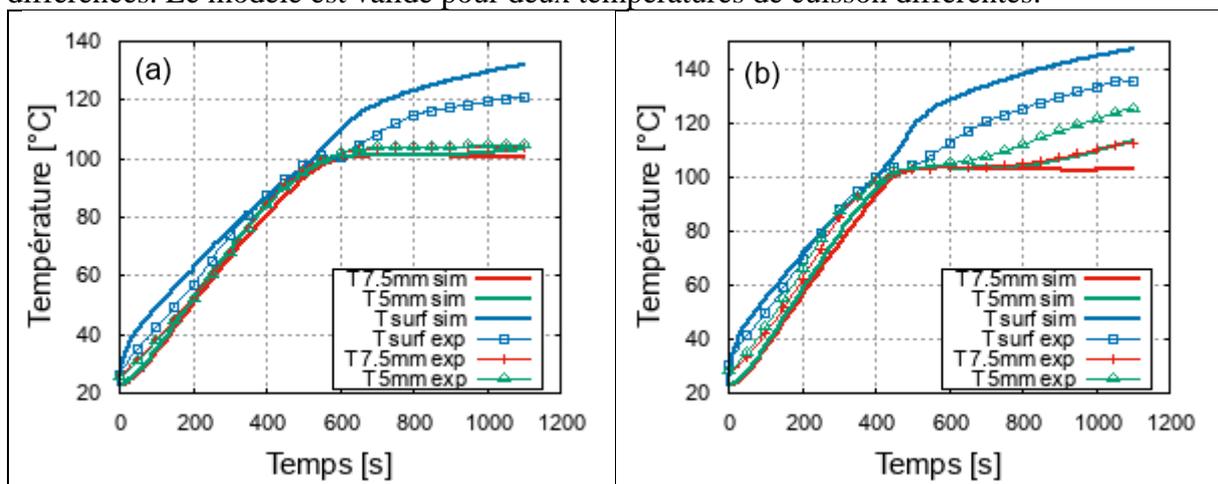
4. Résultats et discussion

Les figures 3.a et 3.b montrent la comparaison des températures expérimentales et simulées de la pâte pour les tests effectués à 185°C et 205°C respectivement. La variation des températures du produit est globalement bien représentée que ce soit à la surface ou à l'intérieur du produit. Dans le détail, les températures augmentent de manière homogène jusqu'à atteindre 100°C après 500s pour une température de cuisson de 185°C. Cette phase est plus rapide (400s) à 205°C. Ensuite, les températures à cœur stagnent autour de 103°C tandis que la température de surface continue à augmenter plus lentement que précédemment jusqu'à atteindre 120°C

(140°C) pour une température de cuisson de 185°C (205°C). Ceci est dû au fait que la surface du produit est sèche et que la chaleur est utilisée pour augmenter la température du produit à la surface. Au centre du produit, on observe une stagnation de la température parce que la teneur en eau est relativement élevée et que la chaleur fournie sert uniquement à évaporer l'eau dans cette région. Dès que la quantité d'eau devient insuffisante pour maintenir l'activité de l'eau à un niveau proche de 1, on observe une augmentation de la température. Ce phénomène est plus souvent observé à des températures plus élevées, comme à 205°C, car le séchage est plus rapide à des températures plus élevées. Comme prévu, la perte de masse est également plus importante à haute température. Le produit perd 10% de sa masse initiale à 185°C (Figure 3.c) contre 13% à 205°C (Figure 3.d). Quant à la déformation, elle peut être divisée en deux parties. La première correspond au gonflement de la pâte jusqu'à atteindre 250% de sa hauteur initiale à 600s pour une température de cuisson de 185°C (Figure 3.e) contre 500s à 205°C (Figure 3.f). La déformation est plus rapide à 205°C car le taux d'évaporation est plus rapide qu'à 185°C. La vapeur générée et piégée dans les pores du produit crée une surpression qui entraîne la déformation du produit. La deuxième partie est le dégonflement du gâteau. Ce phénomène est lié d'une part à l'ouverture des pores qui induit la libération des gaz et d'autre part aux changements structuraux (gélatinisation de l'amidon [21] et coagulation des protéines [22]). A noter que les valeurs maximales et finales de la déformation sont approximativement les mêmes pour les deux températures de cuisson.

Le modèle prédit également la teneur en eau locale difficile à obtenir expérimentalement (Figure 3.g - Figure 3.h). La teneur en eau moyenne finale du produit est plus élevée à 185°C (0.15 kg/kg) qu'à 205°C (0.12 kg/kg). Cela confirme le fait que la perte de masse est plus importante à des températures de cuisson plus élevées. La teneur en eau en surface chute brusquement, un peu plus rapidement à 205°C, ce qui peut expliquer la différence de température finale en surface entre les 2 essais de cuisson. De plus, la teneur en eau au sein du produit commence à chuter plus tôt à 205°C (400s) qu'à 185°C (500s) et atteint un niveau légèrement inférieur.

Les résultats numériques sont conformes aux résultats expérimentaux avec de légères différences. Le modèle est validé pour deux températures de cuisson différentes.



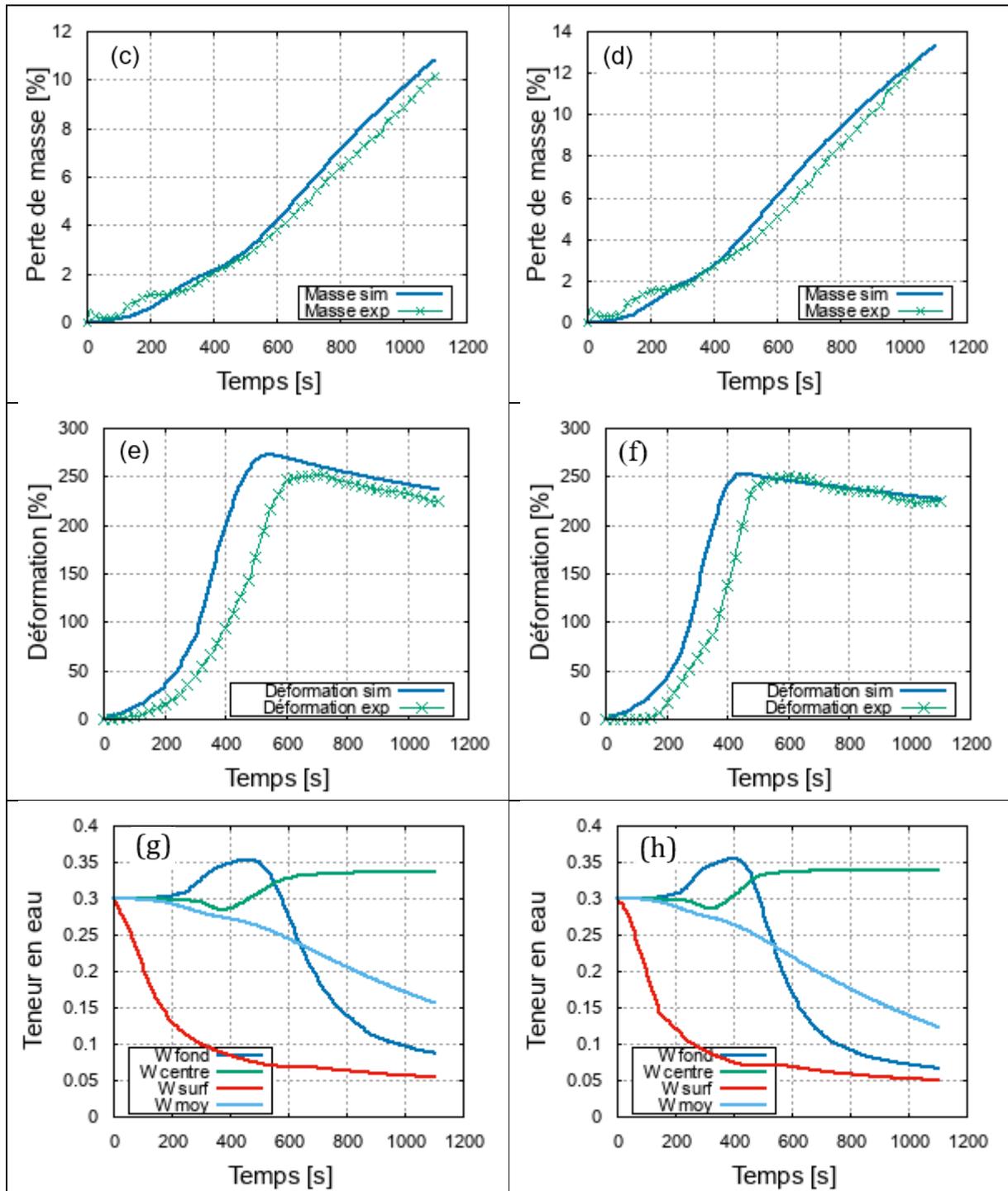


Figure 3. Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux.

5. Conclusion

Cette communication est focalisée sur la modélisation du processus de cuisson d'un gâteau dans un moule. Une approche multiphysique basée sur la conservation de l'énergie et de la masse est utilisée pour prédire les cinétiques de cuisson à l'échelle macroscopique. Une géométrie 2D axisymétrique est considérée. La déformation du produit est également prise en compte. Une attention particulière a été portée aux conditions aux limites du modèle afin de prendre en compte les échanges thermiques et massiques mis en jeu. Les confrontations simulation/expérience ont permis de valider la pertinence de la démarche et le modèle numérique. Ce modèle pourrait être utilisé pour d'autres produits céréaliers ou dans d'autres configurations géométriques.

Références

- [1] D. Grenier, D. Le Ray, T. Lucas, Combining local pressure and temperature measurements during bread baking: insights into crust properties and alveolar structure of crumb, *J. Cereal Sci.*, 52, (2010), 1-8
- [2] F. M. Vanin, T. Lucas, G. Trystram, Crust formation and its role during bread baking, *Trends Food Sci. Technol.*, 20, (2009), 333-343
- [3] F. M. Vanin, C. Michon, G. Trystram, T. Lucas, Simulating the formation of bread crust in a DMTA rheometer, *J. Cereal Sci.*, 51, (2010), 277-283
- [4] S. Guibert-Martin, V. Jury, B. Bouchet, G. Roellens, P. Lioret, A. Le-Bail, Impact of the baking protocol on the structure of French crêpes, *J. Food Eng.*, 196, (2017), 183-192
- [5] E. Purlis, V.O. Salvadori, Bread browning kinetics during baking, *J. Food Eng.*, 80, (2007), 1107-1115
- [6] A. Mondal, A. K. Datta, Bread baking – A review, *J. Food Eng.*, 86, (2008), 465-474
- [7] J. Zhang, A. K. Datta, Mathematical modeling of bread baking process, *J. Food Eng.*, 75, (2006), 78-89
- [8] S. S. Sablani, M. Marcotte, O.D. Baik, F. Castaigne, Modeling of Simultaneous Heat and Water Transport in the Baking Process, *LWT - Food Sci. Technol.*, 31, (1998), 201-209
- [9] B. Zanoni, C. Peri, S. Pierucci, A study of the bread-baking process — I. A phenomenological model, *J. Food Eng.*, 19, (1993), 389-398
- [10] B. Zanoni, S. Pierucci, C. Peri, Study of the bread baking process — II. Mathematical modelling, *J. Food Eng.*, 23, (1994), 321-336
- [11] M. Lostie, R. Peczalski, J. Andrieu, M. Laurent, Study of sponge cake batter baking process. Part I: Experimental data, *J. Food Eng.*, 51, (2002), 131-137
- [12] M. M. Ureta, D. F. Olivera, V.O. Salvadori, Baking of Sponge Cake: Experimental Characterization and Mathematical Modelling, *Food Bioprocess Technol.*, 9, (2016), 664-674
- [13] P. Jayapragasam, P. Le Bideau, T. Loulou, Approximation of heat and mass transport properties for one sided cake baking, *J. Food Eng.*, 290, (2021), 110-211
- [14] P. Jayapragasam, P. Le Bideau, T. Loulou, Selection of better mathematical model describing cake baking for inverse analysis, *Food Bioprod. Process.*, 126, (2021), 265-281
- [15] K. Seranthian, A. Datta, Dynamics of cupcake baking: Coupled multiphase heat and mass transport in a deformable porous material, *Chemical Engineering Science*, 277, (2023), 118802.
- [16] J. P. Ploteau, V. Nicolas, P. Glouannec, Numerical and experimental characterization of a batch bread baking oven, *Appl. Therm. Eng.*, 48, (2012), 289-295
- [17] V. Nicolas, P. Salagnac, P. Glouannec, J. P. Ploteau, V. Jury, L. Boillereaux, Modelling heat and mass transfer in deformable porous media: Application to bread baking, *J. Food Eng.*, 130, (2014), 23-35
- [18] R. Lewandowski, B. Chorążyczewski, Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers, *J. Food Eng.*, 88, (2010), 1-17
- [19] J. K. Carson, S. J. Lovatt, D. J. Tanner, A. C. Cleland, Thermal conductivity bounds for isotropic, porous materials, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 48, (2005), 2150-2158
- [20] C. F. Fontan, J. Chirife, E. Sancho, H. A. Iglesias, Analysis of a Model for Water Sorption Phenomena in Foods, *J. Food Eng.*, 47, (1982), 1590-1594
- [21] N. Chhanwal, A. Anishaparvin, D. Indrani, K. S. M. S. Raghavarao, C. Anandharamakrishnan, Computational fluid dynamics (CFD) modeling of an electrical heating oven for bread-baking process, *J. Food Eng.*, 100(3), (2010), 452-460
- [22] E. Chiotellis, G. M. Campbell, Proving of Bread Dough I : Modelling The Evolution of the Bubble Size Distribution, *Food and Bioprocess Processing*, 81(3), (2003), 194-206