

# Modélisation analytique des transferts thermiques en régime permanent dans les parois ventilées à double peau grâce à la méthode des quadripôles.

Safaa LAHAYRECH<sup>1,2\*</sup>, Anas EL MAAKOUL<sup>1</sup>, Alain DEGIOVANNI<sup>1,3</sup>, Ismail KHAY<sup>1</sup>, Monica SIROUX<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université Internationale de Rabat, Collège Ingénierie et Architecture, Lab. LERMA, Parc Technopolis, Rocade de Rabat-Salé 11100 Sala Al Jadida, Morocco

<sup>2</sup>INSA Strasbourg ICUBE, Université de Strasbourg, France

<sup>3</sup>Université de Lorraine, CNRS, LEMTA, F-54500 Vandœuvre-lès-Nancy, France

\*(auteur correspondant : safaa.lahayrech@uir.ac.ma)

**Résumé** - Bien que la méthode des quadripôles ait été utilisée dans la littérature pour modéliser les transferts de chaleur dans les bâtiments, son application aux enveloppes de bâtiments avancées telles que les façades ventilées à double peau reste inexplorée. La méthode proposée consiste à obtenir une fonction de transfert capable de prédire la température de l'air à la sortie de la lame d'air ventilée et d'y déduire la capacité d'économie d'énergie des parois à double peau dans des climats différents. Le modèle mathématique développé est efficace sur le plan informatique avec des temps de calculs très brefs (3s) et sans faire d'approximations temporelles.

## Nomenclature

$c_p$	capacité thermique spécifique, J/kg.K	$T$	température, K
$\mathcal{L}$	transformée de Laplace	<i>Symboles grecs</i>	
$p$	variable complexe de Laplace, $s^{-1}$	$\lambda$	conductivité thermique, W/m.K
$f$	facteur de ventilation	$\mu$	viscosité dynamique, Pa.s
$e_a$	épaisseur du canal d'air, m	<i>Indices et exposants</i>	
$l$	largeur, m	$m$	valeur moyenne
$L$	longueur du mur suivant y, m	$w$	par rapport au mur

## 1. Introduction

Le secteur du bâtiment, y compris les structures résidentielles et tertiaires, continue d'être l'un des secteurs les plus énergivores au monde malgré les efforts déployés par de nombreux pays pour mettre en œuvre des mesures et des réglementations en matière d'économie d'énergie. Selon le Rapport sur la situation mondiale des bâtiments et de la construction 2021 du Programme des Nations Unies pour l'environnement (PNUE), le secteur du bâtiment représentait 36 % de la demande mondiale d'énergie finale en 2020 [1], avec les deux tiers de cette énergie (des 36%) consommés pour le chauffage des locaux, la ventilation et la climatisation [2]. En conséquence, l'amélioration de l'efficacité énergétique est devenue une priorité absolue dans la conception des bâtiments, en mettant l'accent sur la réduction des pertes d'énergie résultant de systèmes de chauffage et de ventilation inefficaces ou obsolètes, de problèmes d'isolation, de ponts thermiques et de méthodes de construction obsolètes [3]. L'une des nombreuses conceptions architecturales innovantes visant à améliorer l'efficacité du bâtiment en améliorant les performances thermiques de son enveloppe sont les façades ventilées à double peau. Ces parois sont constituées de deux murs opaques ou transparents, séparés par une lame d'air qui sert à collecter ou à évacuer le rayonnement solaire absorbé par la façade [4]. Plusieurs méthodes mathématiques sont disponibles dans la littérature pour la modélisation des parois ventilées à double peau. Le modèle utilisé par

Panao et al. [5] est dit « lumpé », Il s'agit d'une méthode analytique unidimensionnelle dans laquelle une température constante est supposée le long des surfaces des parois de la façade et de la lame d'air [5]. L'analyse non dimensionnelle est une autre méthodologie proposée dans la littérature par Balocco [6]. Elle applique le théorème de Buckingham pour créer des corrélations à l'aide de nombres non dimensionnels. Pour une façade à double peau où la ventilation est naturelle, 14 nombres non dimensionnels ont été proposés pour trouver une corrélation basée sur des données expérimentales afin de déterminer le flux de chaleur transmis à l'espace intérieur à travers la paroi intérieure de la façade. Dans l'approche « zonale », la lame d'air de la façade ventilée est divisée en plusieurs volumes de contrôle où les principes de conservation de masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement doivent être respectés. Pour chaque volume de contrôle, le bilan thermique est formulé et une discrétisation unidimensionnelle est effectuée [7]. En ce qui concerne la méthode des quadripôles, elle est généralement utilisée pour la résolution du transfert de chaleur transitoire monodirectionnels dans des géométries simples, telles que des murs, des cylindres et des sphères en tant que structures indépendantes. Elle a cependant été adaptée à la simulation de bâtiments, indépendamment de la présence ou de l'absence de sources internes [8,9]. L'adaptation de la méthode à des parois complexes comme les parois ventilées à double peau demeure néanmoins inexplorée.

## 2. Présentation du problème

Nous modélisons le transfert de chaleur en régime transitoire au sein d'une façade ventilée d'un bâtiment à double peau. La façade est composée de deux parois opaques séparées d'une cavité ou lame d'air ventilée. La ventilation est effectuée par apport d'air extérieur via un évent d'entrée situé en bas de la paroi extérieure de la façade. L'air est ensuite préchauffé ou refroidi au niveau de la cavité grâce aux effets combinés de la conduction, de la convection et du rayonnement. Enfin, l'air est redirigé vers l'espace intérieur du bâtiment grâce à un système de ventilation relié à une ouverture de sortie située en haut de la paroi intérieure de la façade (Figure 1).

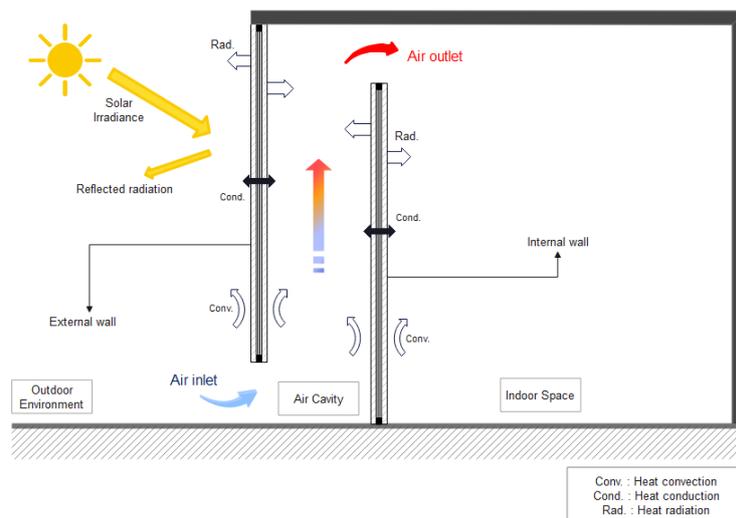


Figure 1 : Façade ventilée étudiée (ventilateur non représenté)

## 2.1. Formulation du problème thermique

Le transfert thermique au sein de la paroi ventilée étudiée est bidimensionnel (Figure 2) et est résolu différemment suivant l'axe  $x$  et  $y$  :

- i. Le transfert de chaleur suivant l'axe des abscisses a été modélisé grâce à la méthode des quadripôles, sur la base des hypothèses suivantes :
  - Le transfert de chaleur est unidimensionnel et transitoire à travers les parois solides de la façade ventilée. Dans la lame d'air, le rayonnement et la conduction thermique sont pris en compte (cas limite d'un fluide au repos).
  - La température de l'espace intérieur (indoor space) est supposée uniforme. El Maakoul et al. ont démontré que cette hypothèse est équivalente au calcul de la température moyenne de l'air dans l'espace intérieur [38].
- ii. Suivant l'axe des ordonnées, le transfert de chaleur par convection à travers l'air est unidirectionnel et en régime permanent.

Il est démontrable que même si ces approximations peuvent paraître significatives, elles permettent d'obtenir des résultats compatibles à des résultats de calculs numériques 2D n'intégrant pas ces approximations. En effet, même en attribuant une température uniforme qui varie en fonction du temps à la paroi nous pouvons déterminer avec une précision exceptionnelle la température de sortie de l'air et le flux de chaleur pour toutes les surfaces de la géométrie étudiée.

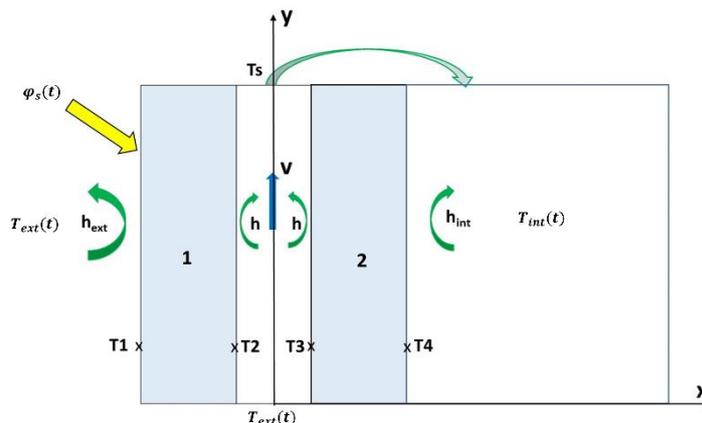


Figure 2 : Transfert de chaleur bidimensionnel au sein de la paroi ventilée

## 2.2. Résolution par la méthode des quadripôles

En appliquant la méthode des quadripôles au transfert de chaleur à travers les parois de la façade ventilée (suivant l'axe  $x$ ), les murs extérieur et intérieur peuvent être représentés grâce à deux quadripôles (Figure 3) définis par deux matrices linéaires ayant respectivement les paramètres  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  et  $(A_2, B_2, C_2, D_2)$ .

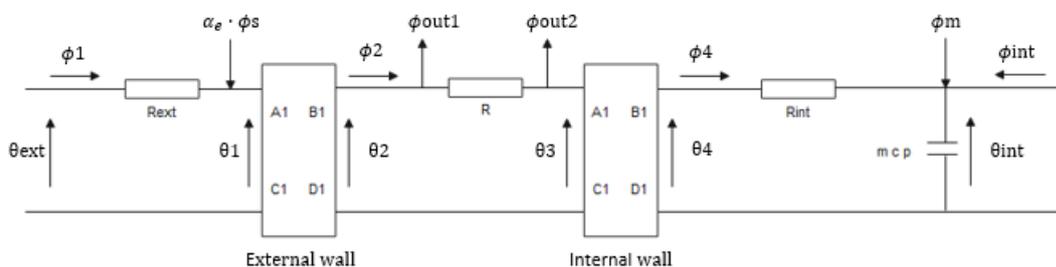


Figure 3 : Représentation quadripolaire de la paroi ventilée

Cette représentation quadripolaire est composée de 3 zones thermiques , l'environnement extérieur en amont du premier quadripôle, la lame d'air ventilée entre les deux quadripôles et le milieu intérieur du bâtiment en aval du second quadripôle. Les équations régissant chacune de ces zones sont ensuite déterminées. L'environnement extérieur est représenté dans le formalisme quadripolaire par  $\theta_{ext}$  , qui est la transformée de Laplace de  $T_{ext}$  la température de l'air extérieur,  $R_{ext}$  la résistance thermique de l'air extérieur et enfin  $\phi_1$  le flux de chaleur extérieur:

$$\theta_{ext} - \theta_1 = R_{ext} \cdot \phi_1 \quad (1)$$

Le mur extérieur est représenté par les équations du premier quadripôles :

$$\theta_1 = A_1 \cdot \theta_2 + B_1 \cdot \phi_2 \quad (2)$$

$$\phi_1 + \alpha_e \cdot \phi_s = C_1 \cdot \theta_2 + D_1 \cdot \phi_2 \quad (3)$$

Où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont respectivement les transformées de Laplace de  $T_1$  la température à la surface externe du mur extérieur, et de  $T_2$  la température à sa surface interne.  $\alpha_e \cdot \phi_s$  est l'irradiation solaire absorbée par le mur extérieur et  $\alpha_e$  est son coefficient d'absorption.

La lame d'air ventilée séparant les deux murs est représentée par l'équation suivante :

$$\theta_2 - \theta_3 = R(\phi_2 - \phi_{out_1}) \quad (4)$$

Où  $\theta_3$  est la transformée de Laplace de  $T_3$ , la température à la surface externe de la paroi intérieure, et  $R$  est la résistance thermique globale de l'air qui prend en compte le transfert de chaleur conductif et radiatif au sein de la lame d'air.  $\phi_{out_1}$  est la transformée de Laplace du flux de chaleur échangé par convection au niveau du mur 1 (Figure 2).

Le mur intérieur est également représenté par les équations du deuxième quadripôle:

$$\theta_3 = A_2 \cdot \theta_4 + B_2 \cdot \phi_4 \quad (5)$$

$$\phi_2 - \phi_{out_1} - \phi_{out_2} = C_2 \cdot \theta_4 + D_2 \cdot \phi_4 \quad (6)$$

Où  $\theta_4$  est la transformée de Laplace de  $T_4$ , la température à la surface interne de la paroi intérieure, et  $\phi_{out_2}$  est la transformée de Laplace du flux de chaleur échangé par convection au niveau de la paroi 2 (Figure2).

Enfin, le milieu intérieur est représenté dans le formalisme quadripolaire par  $\theta_{int}$  la transformée de Laplace de la température intérieure  $T_{int}$ , et  $R_{int}$  la résistance thermique de l'air intérieur comme suit :

$$\theta_4 - \theta_{int} = R_{int} \cdot \phi_4 \quad (7)$$

Comme mentionné précédemment, l'hypothèse d'un milieu isotherme est retenue pour la troisième zone représentant l'espace intérieur. Le bilan thermique s'exprime ainsi comme suit:

$$\phi_4 + \dot{m} \cdot c_{air}(\theta_s - \theta_{int}) + \phi_{int} = mc \cdot p \cdot \theta_{int} \quad (8)$$

Où  $\theta_s$  est la transformée de Laplace de  $T_s$  la température de sortie du flux d'air (air sortant de la cavité avant d'intégrer le milieu intérieur, et  $\phi_{int}$  est la transformée de Laplace des puissances internes à la zone.

Il reste à évaluer  $\phi_{out_1}$ ,  $\phi_{out_2}$  et  $\theta_s$ . Pour ce faire nous allons résoudre le problème de l'écoulement selon l'axe y (Figure 4).

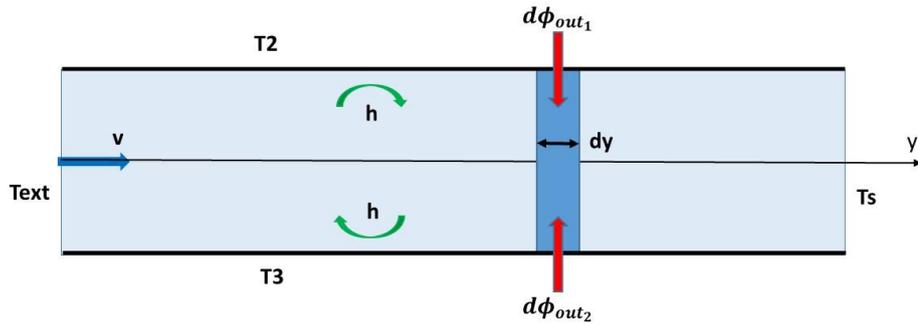


Figure 4 : Transfert de chaleur en régime permanent entre deux plaques parallèles

$$\frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} + \frac{d\phi_{out_1}}{\lambda V} + \frac{d\phi_{out_2}}{\lambda V} - \frac{v}{\alpha} \frac{\partial T_y}{\partial y} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_y}{\partial t} \quad (9)$$

Avec  $V = e_a \cdot l \cdot dy$  le volume de la tranche élémentaire,  $v$  la vitesse et  $\alpha$  la diffusivité thermique de l'air. On peut montrer que pour un temps supérieur à  $L/v$ , on atteint le régime stationnaire, ce qui, pour un mur de 2m et une vitesse de 0.1 m/s, donne un temps de 20s. On peut donc considérer des conditions stationnaires. De plus, le transfert de chaleur convectif est bien supérieur au transfert conductif, d'où l'approximation :

$$d\phi_{out_1} + d\phi_{out_2} = \rho c_p e_a l v dy \frac{\partial T_y}{\partial y} \quad (10)$$

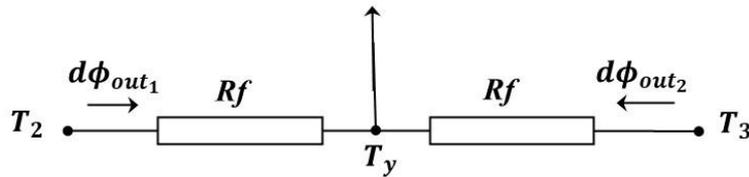


Figure 5 : Calcul des flux entrants

A partir de la figure 5, on peut écrire :

$$d\phi_{out_1} = \frac{T_2 - T_y}{R_f} = (T_2 - T_y)hl dy \quad (11) \quad d\phi_{out_2} = \frac{T_3 - T_y}{R_f} = (T_3 - T_y)hl dy \quad (12)$$

En utilisant les deux équations précédentes on obtient :

$$(T_2 - T_y) + (T_3 - T_y) = \frac{\rho c e_a v}{h} \frac{\partial T_y}{\partial y} \quad (13)$$

Dont la solution est :

$$T_y = \left( \frac{T_2 + T_3}{2} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2h}{\rho c_p e_a v} y \right) \right] + T_{ext} \exp \left( -\frac{2h}{\rho c_p e_a v} y \right) \quad (14)$$

Ainsi, après avoir effectué la transformée de Laplace à l'équation (14),  $\theta_s$  (température de sortie transformée en  $y=L$ ) est donnée par :

$$\theta_s = \left( \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2h}{\rho c_p e_a v} L \right) \right] + \theta_{ext} \exp \left( -\frac{2h}{\rho c_p e_a v} L \right) \quad (15)$$

Enfin pour calculer  $\phi_{out_1}$  et  $\phi_{out_2}$ , on intègre l'équation (12) de 0 à L et de prendre la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} \phi_{out_1} &= h l L \left[ \frac{\theta_2 - \theta_3}{2} - K \left( \theta_{ext} - \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \right) \right] \\ \phi_{out_2} &= -h l L \left[ \frac{\theta_2 - \theta_3}{2} + K \left( \theta_{ext} - \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Où:

$$K = \frac{\rho c_p v e_a}{2hL} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2hL}{\rho c_p v e_a} \right) \right] \quad (17)$$

Un système linéaire de 11 équations et de 14 inconnues a été obtenu. Tous les paramètres du système sont présentés dans le Tableau1, Annexe 1. Les 2 grandeurs externes  $\theta_{ext}$  et  $\phi_s$ , et une grandeur interne,  $\theta_{int}$  ou  $\phi_{int}$  doivent être fixées. Afin de valider nos approximations, nous avons fixé  $\theta_{ext}$ ,  $\phi_{int}$  et  $\theta_{int}$ , et calculé la température de sortie  $\theta_s$ . En résolvant le système d'équations ci-dessus, nous obtenons une relation entre  $\theta_{ext}$ ,  $\phi_s$ ,  $\theta_{int}$  et  $\theta_s$  composée de 3 fonctions de transfert :

$$\theta_s = \theta_{ext} F_1(p) + \theta_{int} F_2(p) + \phi_s F_3(p) \quad (18)$$

Dans le cas où les transformées de Laplace de  $T_{ext}$ ,  $\phi_s$  et  $T_{int}$  existent,  $T_s$  est calculée à l'aide de la transformée de Laplace inverse numérique en utilisant l'algorithme "DenISeger" implémenté dans MATLAB :

$$T_s - T_i = \mathcal{L}^{-1}(\theta_s(p)) \quad (19)$$

Dans le cas où les grandeurs sont données point par point (ce qui est souvent le cas), les transformées inverses des fonctions de transfert sont calculées, et des produits de convolution sont effectués :

$$T_s - T_i = (T_{ext} - T_i) \otimes \mathcal{L}^{-1}(F_1) + (T_{int} - T_i) \otimes \mathcal{L}^{-1}(F_2) + \varphi_s \otimes \mathcal{L}^{-1}(F_3) \quad (20)$$

### 3. Adaptation du modèle à d'autres configurations

Il est intéressant de noter que la méthode analytique que nous proposons peut également être adaptée à des façades à double peau vitrées (Figure 23.), ou à des parois avec un support transparentes (e.g. fenêtres). Le modèle peut facilement prendre en compte de tels cas en séparant le flux solaire absorbé à l'aide des coefficients d'absorption/transmission.

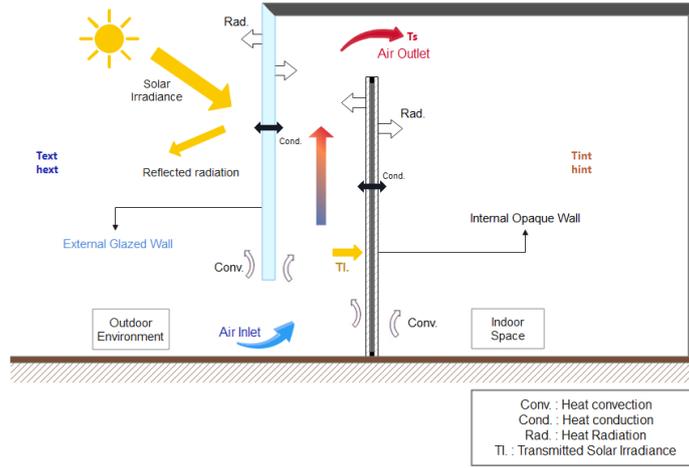


Figure 6 : Façade ventilée double peau avec mur extérieur vitré

Dans le cas d'une façade ventilée avec paroi extérieure vitrée, la représentation analytique utilisant la méthode quadripolaire devient :

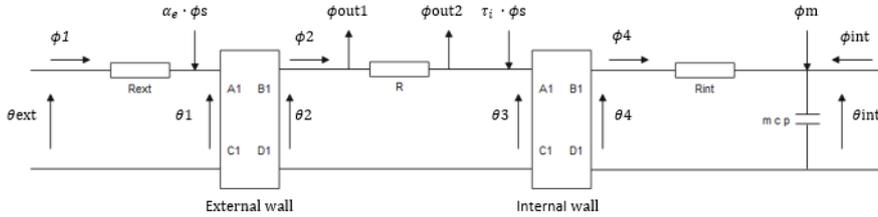


Figure 7 : Représentation analytique d'une paroi ventilée vitrée

Avec  $\tau_i \cdot \phi_s$  l'irradiance solaire transmise à la paroi interne de la façade ventilée et  $\tau_i$  son facteur de transmission. Les équations régissant ce système ressemblent à celles d'une façade ventilée aux parois opaques à l'exception de l'équation (6) qui devient :

$$\phi_2 - \phi_{out_1} - \phi_{out_2} + \tau_i \cdot \phi_s = C_2 \cdot \theta_4 + D_2 \cdot \phi_4 \quad (21)$$

### 4. Conclusion

Un modèle analytique basé sur la méthode des quadripôles a été proposé pour modéliser les transferts thermiques transitoires dans des parois ventilées à double peau. La méthode proposée résout le problème considéré dans l'espace de Laplace et prend pleinement en compte les variations temporelles sans approximations, contrairement à la majorité des méthodes analytiques disponibles dans la littérature, les seules approximations adoptées sont

dans l'espace. Le modèle mathématique développé est efficace en terme de calculs, il donne des résultats précis avec des temps de calculs très brefs (3s) et est également adaptable à des configurations complexes de murs à double paroi (avec des parois transparentes/vitrées

#### **Références (par ordre d'apparition dans le texte, 11 pts)**

- [1] UNEP, Global status report for buildings and construction 2021. <https://globalabc.org/resources/publications/2021-global-status-report-buildings-and-construction>.
- [2] IEA, Perspectives for the clean energy transition 2019. <https://www.iea.org/reports/the-critical-role-of-buildings>
- [3] Aslani, A. Bakhtiar, M. Akbarzadeh, Energy-Efficiency Technologies in the Building Envelope: Life Cycle and Adaptation Assessment, *J. Build. Eng.* 21 (2019) 55–63. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2018.09.014>.
- [4] D. Faggembauu, M. Costa, M. Soria, A. Oliva, Numerical analysis of the thermal behavior of ventilated glazed facades in Mediterranean climates. Part I: development and validation of a numerical model, *Sol. Energy.* 75 (2003) 217–228. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2003.07.013>.
- [5] M. Pano, C. Santos, N. Mateus, G. Graça, Validation of a lumped RC model for thermal simulation of a double skin natural and mechanical ventilated test cell, *Energy Build.* 121 (2016) 92–103. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2016.03.054>.
- [6] C. Balocco, A non-dimensional analysis of a ventilated double façade energy performance, *Energy Build.* 36 (2004) 35–40. [https://doi.org/10.1016/S0378-7788\(03\)00086-0](https://doi.org/10.1016/S0378-7788(03)00086-0).
- [7] T.E. Jiru, F. Haghghat, Modeling ventilated double skin façade—A zonal approach, *Energy Build.* 40 (2008) 1567–1576. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2008.02.017>.
- [8] A.E. Maakoul, A. Degiovanni, Z. Bouhssine, Transient linear analytical heat transfer model for a building, validation with a non-linear coupled finite volume code, *Thermal Sci. Eng. Progress* 100756 (2020), <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100756>.
- [9] S. Berrabah, Z. Bouhssine, A. El Maakoul, A., Degiovanni, M. Bakhouya, (2021). Towards a quadrupole-based method for buildings simulation: Validation with ASHRAE 140 standard. *Thermal Science and Engineering Progress* (2021), 101069. doi:10.1016/j.tsep.2021.101069

## Annexe 1

Tableau 1. Les grandeurs définissant le système d'équations.

$R_{ext}$	$R_{ext} = \frac{1}{h_{ext} l L}$
$R$	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_r} \quad R_c = \frac{e_a}{\lambda_a l L} \quad R_r = \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right) \frac{1}{4 \sigma l L \bar{T}^3}$
$R_{int}$	$R_{int} = \frac{1}{h_{int} l L}$
$mc$	$mc = \sum m_i \cdot c_{p_i} \text{ (Capacité thermique totale de la zone)}$
$A_1$	$A_1 = \cosh(k_1 e_1) \quad k_1 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}$
$B_1$	$B_1 = \frac{1}{\lambda_1 k_1 l_1 L} \sinh(k_1 e_1) \quad k_1 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}$
$C_1$	$C_1 = \lambda_1 k_1 l_1 L \sinh(k_1 e_1) \quad k_1 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}$
$D_1$	$\cosh(k_1 e_1) \quad k_1 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}$
$A_2$	$\cosh(k_2 e_2) \quad k_2 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}$
$B_2$	$B_2 = \frac{1}{\lambda_2 k_2 l L} \sinh(k_2 e_2) \quad k_2 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}$
$C_2$	$C_2 = \lambda_2 k_2 l L \sinh(k_2 e_2) \quad k_2 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}$
$D_2$	$\cosh(k_2 e_2) \quad k_2 = \sqrt{\frac{p}{\alpha_2}}$
$R_f$	$R_f = \frac{1}{h l dy}$