

Convection de double diffusion couplée au rayonnement, dans une cavité poreuse saturée par un fluide semi-transparent

Adel TALEB¹, Mohammed BOUSSAID¹, Fethi DEMIM^{2*}

¹ Laboratoire de Dynamique des Moteurs et Vibro-acoustique, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université de M'hamed Bougara Boumerdes, Algérie

² Laboratory of Guidance and Navigation, Ecole Militaire Polytechnique, Bordj El Bahri, Algiers, Algeria, (auteur correspondant : demifethi@gmail.com)

Résumé - Nous avons effectué une analyse numérique de la convection à double diffusion couplée au rayonnement dans une cavité poreuse carrée. Cette cavité était chauffée de manière différentielle et saturée par un fluide semi-transparent. La résolution des équations d'énergie et de masse repose sur la méthode de discrétisation par différences finies, avec l'utilisation de la méthode implicite des directions alternées (ADI). L'équation de transfert radiatif a été résolue à l'aide de la méthode des ordonnées discrètes. Nous avons examiné les effets des paramètres de contrôle pertinents sur les transferts thermiques et de masse. Les résultats obtenus mettent en évidence que le rayonnement thermique renforce le transfert de chaleur global, affaiblit le transfert convectif, tout en ayant pratiquement aucune influence sur le transfert de masse.

Nomenclature

C'	Concentration, Kg m^{-3}	T'	Température, K
D	Diffusivité solutale, $\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$	T	Température adimensionnelle
Da	Nombre de Darcy, $Da = K/L^2$	V	Volume, m^3
H'	Hauteur du système, m	g	Accélération de la pesanteur, m s^{-2}
K	Perméabilité du milieu poreux, m^2	h	Constante de Planck, $6.626.10^{-34}\text{J.s}$
L'	Luminance	κ	Conductivité thermique, $\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$
Le	Nombre de Lewis	q	Flux de chaleur, W.m^{-2}
N	Rapport forces de flottabilité volumique	q_R	Flux radiatif, W.m^{-2}
$Nu_{x,y}$	Nombre de Nusselt local	q_C	Flux convectif, W.m^{-2}
P'	Pression thermodynamique, $[\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}]$	\vec{s}	Vecteur position, m
Ra	Nombre de Rayleigh-Darcy thermique	t	Temps, s
Re	Nombre de Reynolds	u	Composante axiale de la vitesse, m.s^{-1}
S	Surface, m^2	v	Composante radiale de la vitesse, m.s^{-1}
Sh	Nombre de Sherwood	w_m	Poids de la quadrature
S_N	Quadratures d'ordre N	α	Diffusivité thermique du fluide
S_R	Terme source radiatif, W.m^{-3}	β	Coefficient d'extinction, m^{-1}

1. Introduction

Les gradients de température et de concentration engendrent une distribution non uniforme de la densité du mélange, entraînant la formation d'un mouvement convectif sous l'influence des forces d'Archimède. Ces deux gradients peuvent interagir, se renforcer mutuellement ou agir en opposition, générant ainsi des comportements dynamiques complexes. Ce phénomène est connu sous le nom de convection naturelle de double diffusion ou thermo-solutale. Dans de nombreuses situations, l'espace confiné où se produit ce phénomène est un milieu poreux. En outre, le phénomène de convection de double diffusion dans des milieux poreux saturés a suscité une attention considérable, surtout avec l'émergence de nouveaux développements technologiques sur les matériaux poreux dans de nombreuses applications, tels que les puits de chaleur, les réacteurs catalytiques, les échangeurs de chaleur, l'isolation des bâtiments et des

installations de stockage à froid. La résolution d'un tels problème, implique la prédiction des champs de température, de concentration et de vitesse, ainsi que l'évaluation des transferts thermique et de masse en fonction des paramètres du problème. Pour modéliser ce phénomène, le modèle de Darcy et les approximations de Boussinesq et de l'équilibre thermodynamique local sont couramment utilisés.

Le rayonnement thermique a vu son intérêt s'accroître dans les milieux poreux, notamment avec l'élaboration de nouveaux matériaux tels que les fibres, céramiques et les frittés, les isolants poreux semi-transparents utilisés aussi bien aux températures cryogéniques qu'à celles des fours industriels, ainsi que l'élargissement des plages des températures d'utilisation de ces matériaux.

Problématique physique

Le problème abordé concerne l'étude des transferts de chaleur et de masse au sein d'une cavité poreuse carrée de hauteur H' , saturée par un fluide newtonien et incompressible. Le milieu se trouve en équilibre thermodynamique local, absorbant, émettant, et n'étant pas diffusant en termes de rayonnement thermique. Les parois verticales de la cavité sont chauffées de manière différentielle et soumises à une variation de concentration, tandis que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. En outre, les parois sont considérés comme étant noires.

2. Formulation mathématique

Les équations fondamentales qui gouvernent le problème de convection de double diffusion sont dérivées des principes fondamentaux de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (selon la loi de Darcy), de l'énergie et de la concentration.

Pour un écoulement incompressible, l'équation de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (1)$$

2.1 Équation de conservation de la quantité de mouvement

De nombreuses études ont porté sur le transfert de chaleur dans un milieu poreux utilisant la formulation classique de Darcy [1]. Pour un milieu isotrope, la vitesse de filtration, avec l'approximation de Boussinesq, est donnée par l'équation suivante :

$$\vec{V}' = -\frac{K}{\mu} \left[\nabla P' + \rho_{ref} \left(\beta_T (T' - T'_{ref}) + \beta_C (C' - C'_{ref}) \right) \vec{g}' \right] \quad (2)$$

2.2 Équation d'énergie

Si le volume élémentaire représentatif (VER), siège des transferts conductifs et convectifs, est de surcroît traversé par un rayonnement thermique, l'équation de l'énergie devient, dans les conditions et les approximations considérés [2] :

$$\sigma \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{(\rho C)_f} S'_R \quad (3)$$

dans l'équation (3) σ est le rapport de capacité thermique du fluide pour un milieu poreux.

Le terme source (S'_R), est donné par l'équation :

$$S'_R = -\nabla \cdot (\vec{q}_r') = \kappa \left[\int_{4\pi} L'(\vec{s}) d\Omega - 4\pi L^0(T_s) \right] \quad (4)$$

où $\vec{q}'_r = q'_{r,x} + q'_{r,y}$ représente la densité totale de flux de rayonnement. Pour calculer le terme source radiatif, il est indispensable de connaître la densité de flux \vec{q}'_r . A son tour, la connaissance de cette grandeur passe par la détermination de la fonction $L'_\Omega(\vec{s}, \vec{\Omega})$ décrivant le champ de luminance.

2.3 Equation de conservation de la fraction massique

Elle détermine la distribution de la concentration dans le fluide et le transport des constituants du fluide dans le milieu poreux. Cette équation, dite aussi de l'espèce, s'écrit [1] :

$$\phi \frac{\partial C'}{\partial t'} + (\vec{V}' \cdot \nabla) C' = D_p \nabla^2 C' \quad (5)$$

où ϕ est la porosité du milieu poreux, $D_p = \phi \cdot D$ est la diffusivité massique moyenne de la masse dans la matrice poreuse saturée et D est la diffusivité solutale.

- Formulation adimensionnelle du problème :

Les variables sans dimensions suivantes sont introduites :

$$\begin{cases} (x, y) = \left(\frac{x'}{H^*}, \frac{y'}{H^*} \right), (u, v) = \left(\frac{u'}{U^*}, \frac{v'}{U^*} \right), t = \frac{t'}{t^*}, P = \frac{P'}{P^*} \\ C = \frac{(C' - C'_{ref})}{\Delta C'}, T = \frac{(T' - T'_{ref})}{\Delta T'} \end{cases} \quad (6)$$

L'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Par une formulation utilisant la fonction de courant ψ définie, en forme adimensionnelle, par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

L'équation de la quantité de mouvement peut s'écrire :

$$\nabla^2 \psi = -Ra \times \frac{\partial (T + NC)}{\partial y} \quad (9)$$

$$\left\{ Ra = \frac{g \beta_T K H' \Delta T'}{\alpha \nu}, N = \frac{\beta_C \Delta C'}{\beta_T \Delta T'} \right. \quad (10)$$

Les équations gouvernantes adimensionnelles suivantes, décrivent respectivement la conservation de l'énergie et de l'espèce :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \times \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T + \frac{T_{ref}}{Pl} \times S_R \quad (11)$$

$$\phi \times \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \times \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{Le} \times \nabla^2 C \quad (12)$$

qui fait apparaître les nombres adimensionnels suivants :

$$Pl = \frac{\lambda_p / l}{4\sigma T'_{ref}{}^3}; T_{ref} = \frac{T'_{ref}}{\Delta T'}; \phi = \frac{\phi}{\sigma}; Le = \frac{\alpha}{D} \quad (13)$$

Les grandeurs radiatives suivantes : la luminance, le flux radiatif, le rayonnement incident et le terme source radiatif, sont adimensionnés comme suit :

$$L = \frac{L'}{4\sigma T'_{ref}{}^4}; q_R = \frac{q'_r}{4\sigma T'_{ref}{}^4}; S_R = \tau \left[\left(1 + \frac{T}{T_{ref}} \right)^4 - G \right]; G = \frac{G'}{4\sigma T'_{ref}{}^4} \quad (14)$$

Le nombre sans dimension τ est désigné par l'épaisseur optique du milieu semi transparent.

Les conditions aux limites thermiques et massiques du problème sont de deux types :

- Des conditions aux limites de type Dirichlet en température et concentration sont imposées sur les parois verticales,
- Les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables au flux de masse (condition de type Neumann).

2.4 Transferts de chaleur et de masse

Les transferts de chaleur et de masse dans la cavité sont caractérisés par les nombres de Nusselt (convectif, radiatif et total) et de Sherwood. Les valeurs locales de ces nombres adimensionnels sur les parois actives verticales (chaude : $x=0$ et froide : $x=1$) sont données par les relations suivantes :

2.4.1 Nombre de Nusselt convectif local

Par définition le nombre de Nusselt convectif est donnée par :

$$Nu_{c,y} = - \frac{\partial \frac{T'}{(T'_C - T'_F)}}{\partial \frac{y'}{H'}} \Bigg|_{x'=0,H'} = - \frac{\partial T}{\partial Y} \Bigg|_{x=0,1} \quad (15)$$

2.4.2 Nombre de Nusselt radiatif local

$$Nu_{R,y} = \frac{T_{ref}}{Pl} \times \left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T_P}{T_{ref}} \right)^4 - q_{inc} \right) \Bigg|_{x=0,1} \quad (16)$$

2.4.3 Nombre de Nusselt total local

Le nombre de Nusselt total local sur les parois verticales est donné par :

$$Nu_{T,y} = - \frac{\partial T}{\partial Y} \Bigg|_{x=0,1} + \frac{T_{ref}}{Pl} \times \left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{T_P}{T_{ref}} \right)^4 - q_{inc} \right) \Bigg|_{x=0,1} \quad (17)$$

2.4.4 Nombre de Sherwood local

Le nombre de Sherwood local sur les parois verticales est donné par [3] comme suit :

$$Sh|_{x'=0,H'} = - \frac{H'}{(C'_{max} - C'_{min})} \frac{\partial C'}{\partial y'} \Bigg|_{x'=0,H'} = - \frac{\partial C}{\partial Y} \Bigg|_{x=0,1} \quad (18)$$

4 Résultats de la convection de double diffusion couplée au rayonnement

4.1 Effets du nombre de Rayleigh-Darcy thermique

Les Figures 2 *a* et *b* montrent les variations, au niveau de la paroi active, des valeurs moyennes des nombres de Nusselt convectif sans rayonnement $Nu_{C,R}$ ($Nu_{C,R}$ sur la figure 2a), Nusselt convectif avec rayonnement Nu_C , radiatif Nu_R (Nu_r sur la figure 2a), et total Nu_T en fonction des valeurs du Ra allant de 100 à 1000.

On constate sur la Figure 2a, que le taux de transfert de chaleur par convection augmente quasi-linéairement en fonction du nombre de Rayleigh. En présence de transfert radiatif, ces taux sont nettement plus élevés qu'en convection pure. La diminution du Nu_C est due essentiellement au fait que la présence du rayonnement thermique rend le gradient de température au niveau de la paroi active plus faible.

Le taux de transfert radiatif en termes de Nusselt radiatif Nu_R , voir Figure 2b, augmente aussi quasi-linéairement en fonction du Ra , ce qui explique l'augmentation du taux de transfert global

observé sur la même Figure, et ce en dépit de la diminution du taux de transfert convectif en présence de transfert radiatif, observé sur la Figure 2a., ces taux sont nettement plus élevés qu'en convection pure. La diminution du Nu_C est due essentiellement au fait que la présence du rayonnement thermique rend le gradient de température au niveau de la paroi active plus faible

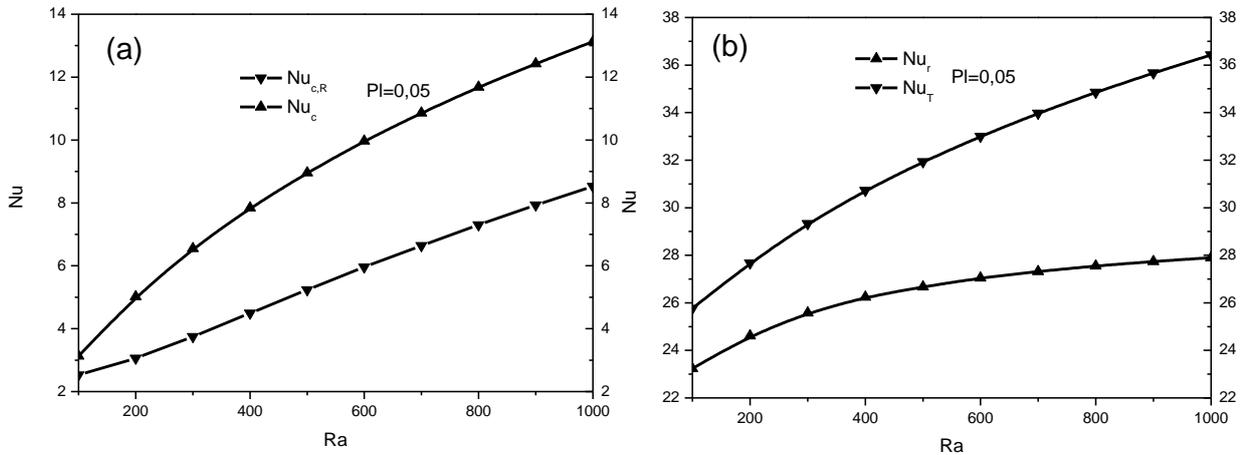


Figure 2 :Evolution des taux de transfert a) convectif et b) radiatif, en fonction de Ra.

4.2 Effets de l'épaisseur optique

En vue de comprendre l'effet de l'épaisseur optique sur les échanges thermique et massique, on a réalisé une expérience qui nous a permis de tracer sur les Figures 3 a et b, décrivant les variations des taux de transfert de chaleur global et de masse en termes des nombres de Nusselt total et de nombre de Sherwood (Sh), sur la parois active chaude en fonction du nombre de Rayleigh, et pour $Pl=0,125$, $Le=1$ et $\tau = 0.01; 0.1; 1$ et 5 et pour $N=1$.

Sur la Figure 3a, on constate que le Nu_T augmente en fonction du nombre de Rayleigh. En fait, les valeurs élevées de Ra sont synonymes d'une augmentation des forces de flottabilité qui favorisent les transferts thermiques et de masse. Sur la même Figure on remarque que le taux de transfert thermique global diminue avec l'épaisseur optique, toutefois son amplitude reste toujours supérieure à celle de la convection de double diffusion sans rayonnement. Le nombre de Sherwood augmente lui aussi avec le nombre de Rayleigh, cependant, les variations de l'épaisseur optique n'affectent quasiment pas le transfert de masse.

Tandis que l'effet du nombre de Rayleigh sur le transfert de masse est prépondérant, l'effet du rayonnement thermique quant à lui reste très faible, comme décrit sur la Figure 3b. Le transfert thermique globale, même en présence du transfert de masse, est toujours amplifié par le rayonnement thermique et se comporte de la même manière avec l'épaisseur optique.

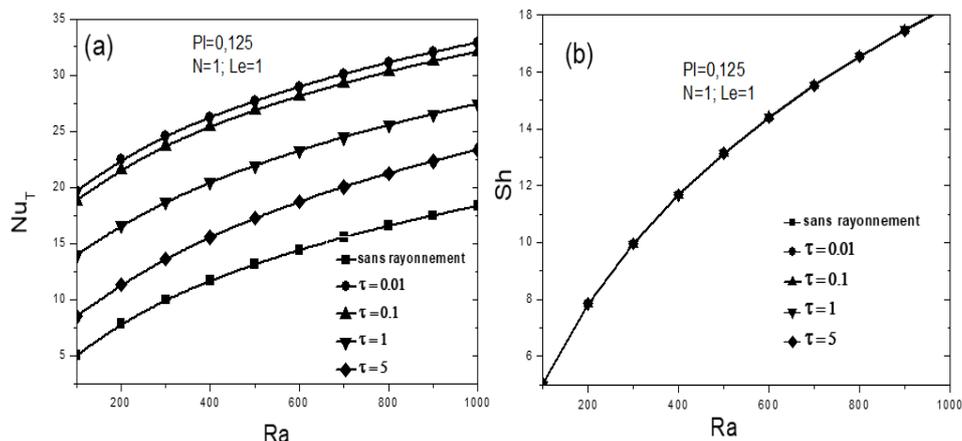


Figure 3 :Evolutions du Nu_T (a), et du Sh (b), en fonction de Ra

4.3 Effets du rapport de forces de flottabilité N

Ecoulement aidant $N > 0$

Les Figures 4 a et b, montrent les variations du nombre de Nusselt total et du nombre de Sherwood en fonction de l'épaisseur optique τ pour différentes valeurs positives du rapport de forces de flottabilité. Les données de cette expérience, sont : $N = \{0, 1, 10\}$, $Ra=100$, $Le=10$ et $Pl=0.5$.

Selon la Figure 4a, le Nu_T sur la paroi active chaude diminue avec τ , particulièrement à faible valeur de l'épaisseur optique indépendamment des valeurs de N . Le Nu_T pour une épaisseur optique donnée, augmente avec les valeurs croissantes de N .

Sur la Figure 4b, on remarque que le transfert de masse, en termes de Sh , est quasiment insensible à la variation de l'épaisseur optique, ce qui montre que l'effet du rayonnement thermique sur le transfert de masse est très faible. Par ailleurs, le Sh s'amplifie lorsque N augmente. En fait, pour les écoulements coopérants et en présence du rayonnement thermique, le gradient de température devient faible le long de la paroi chaude, favorisant ainsi la prédominance des forces de masse.

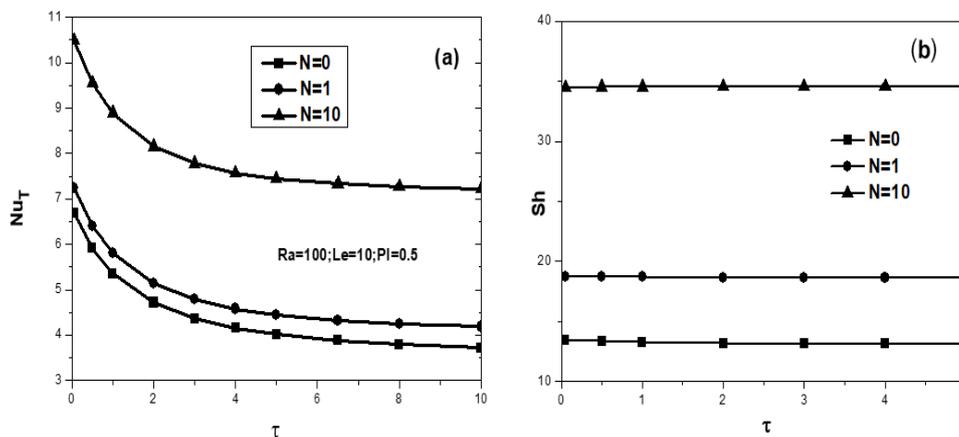


Figure 4 : Variation de : (a) Nusselt total et (b) Sherwood versus, τ et $N \geq 0$.

- **Ecoulement opposant ($N < 0$)** : L'effet de l'écoulement opposant sur les taux de transfert thermique et massique, est investigué dans les Figures 5 a et b. À cet effet, nous avons testé trois valeurs du rapport de forces de flottabilité soit $N = \{-1, -5, -10\}$. Les résultats sont présentés en termes de Nu_T et de Sh sur la paroi active chaude, en fonction de l'épaisseur optique τ .

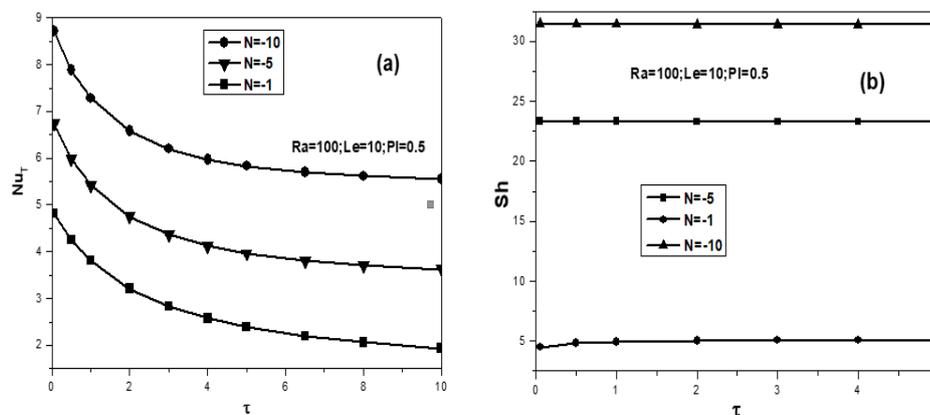


Figure 5 : Variation de : (a) Nusselt total et (b) Sherwood versus τ et N

À cet effet, l'influence du rayonnement thermique sur le transfert de masse, que ce soit en écoulement opposant ou en écoulement aidant, est négligeable. Les résultats présentés dans la Figure 5a démontrent que le Nu_T diminue progressivement à mesure que τ augmente pour un rapport N donné. Lorsque $\tau > 10$, le Nu_T converge vers une valeur limite constante, dépendant également de la valeur de N et d'autres paramètres. D'autre part, pour une valeur fixe de τ , le transfert de chaleur augmente avec des valeurs élevées en termes absolus de N .

La Figure 5b révèle que le nombre de Sherwood (Sh) augmente significativement avec le rapport des forces de flottabilité N , tout en restant pratiquement insensible à la variation de l'épaisseur optique. Une exception est observée pour $N = -1$, où le Sh varie légèrement à de faibles valeurs de l'épaisseur optique ($\tau < 1$).

4.4 Effet du nombre de Lewis

Les courbes présentées dans la Figure 6 illustrent la variation moyenne du nombre de Nusselt total (Nu_T) sur la paroi chaude en fonction de l'inverse du paramètre de rayonnement ($1/Pl$). Dans cette expérience, nous fixons Ra à 100, Pl à 0.5 et N à 1. Deux valeurs du nombre de Lewis (Le) sont testées : $Le = 1$ et $Le = 10$. Comme le montre la Figure 6a, on observe une augmentation du Nu_T avec l'inverse du nombre de Planck. Pour un nombre de Planck donné, le taux de transfert thermique global diminue lorsque le nombre de Lewis augmente de 1 à 10. En effet, l'augmentation du nombre de Lewis est associée à une diffusivité thermique plus élevée, facilitant ainsi une propagation plus rapide de la chaleur à l'intérieur du milieu poreux. Par conséquent, le transfert par conduction augmente dans la cavité, entraînant une diminution du transfert thermique à la paroi chaude.

On constate aussi que, sur la même Figure, le transfert de masse en termes de Sh , augmente considérablement avec le nombre de Lewis, cependant, il reste presque inchangé avec le nombre de Planck. Ce qui montre, une fois de plus, que l'effet du rayonnement thermique sur le transfert de masse est négligeable.

Sur la Figure 6b, on trace l'évolution de la fonction de courant maximale (Φ_{max}) pour $Le=1$ et 10. Le mouvement convectif, en termes de Φ_{max} , est important pour $Le=1$, alors qu'il diminue pour $Le=10$, ce qui peut expliquer l'augmentation du transfert de chaleur à faibles valeurs du nombre de Lewis, observé sur la Figure 6a.

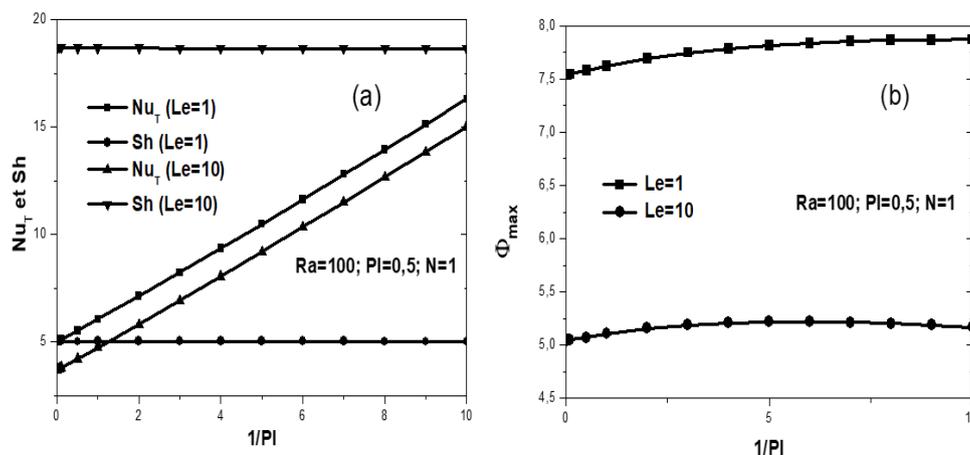


Figure 6: Nu_T , Sh (a) et Φ_{max} (b) en fonction de $1/Pl$ et Le .

5 Conclusion

Nous avons présenté une étude des transferts de chaleur et de masse par convection naturelle en milieux poreux en présence du rayonnement thermique. Le modèle numérique proposé repose sur l'utilisation de la méthode des différences finies et la méthode implicite des directions alternées a été choisie pour résoudre les équations d'énergie et de masse, tandis que la méthode de sur-relaxation successive a été utilisée pour résoudre l'équation de la quantité de mouvement. L'équation de transfert radiatif a été résolue par la méthode des ordonnées discrètes. Sur la base de ces approches, la sensibilité des transferts thermiques et de masse aux divers paramètres de contrôle tels que le nombre de Rayleigh, le nombre de Planck, l'épaisseur optique, le nombre de Lewis, et le rapport des forces de flottabilité, ont été calculés et analysés. Les principaux résultats obtenus indiquent que :

- La convection naturelle tend à atténuer l'influence du rayonnement lorsque le nombre de Rayleigh-Darcy augmente.
- Le transfert de masse est légèrement affecté par la variation de l'épaisseur optique et du nombre de Planck.
- Le transfert thermique s'amplifie avec des valeurs élevées de N , et le transfert de masse augmente davantage avec N .
- Dans les deux cas d'écoulement, l'augmentation de N diminue l'effet du rayonnement.
- Que ce soit en écoulement opposant ou aidant, le rayonnement thermique n'affecte pratiquement pas le transfert de masse.
- L'augmentation du nombre de Lewis favorise le transfert de masse et entraîne la diminution du transfert thermique global.

Par ailleurs, la nécessité de comprendre convenablement la convection naturelle de double diffusion dans un milieu poreux en présence du rayonnement thermique telle que rencontrée dans la pratique, ouvre cette étude sur une série de possibilités et voies prometteuses. Tenir compte de la variation des propriétés physiques du milieu poreux par le changement du modèle de Darcy, par l'un des modèles proposés par la littérature, et ce, afin de prendre en considération les efforts inertiel et visqueux, peut être une première voie. Tenir compte des effets tridimensionnels ou déterminer les transferts couplés lorsque les écoulements sont turbulents est aussi souhaitable. D'autres voies prometteuses consisteraient à tenir compte de l'anisotropie du milieu poreux, ou de l'influence des nombres de Soret et de Dufour. Par ailleurs, on peut utiliser un des modèles de MST plus précis, à l'instar des modèles statistiques. Le modèle radiatif peut aussi comprendre l'effet de la diffusion radiative.

Références

- [1]. D. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, ed. 3rd. New York: Springer Verlag, (2006).
- [2]. MF. Modest, *Radiative Heat Transfer*, second Ed. New York: Academic Press; (2003).
- [3]. Thèse de doctorat par LAOUAR Meftah Siham, *Modélisation de la convection naturelle de double diffusion dans un mélange de gaz absorbant et émettant le rayonnement*, Thèse de doctorat, Université M'Hamed Bougara-Boumerdes, Algérie, (2010).
- [4]. F. Moufekkik, M.A. Moussaoui, A. Mezrhab, M. Bouzidi and D. Lemonnier, *Combined double-diffusive convection and radiation in a square enclosure filled with semitransparent fluid*. *Journal of Computers & Fluids*, 69 172–178, (2012).