

Analyse mathématique et numérique des échangeurs convectifs parallèles

Julien Bouyssier^a, *Jérôme Fehrenbach*^c, *Frédéric de Gournay*^c,
Charles Pierre^b, *Franck Plouraboué*^a

^a Université de Toulouse; INPT; UPS; IMFT (CNRS UMR 5502),

^b Université de Pau et des Pays de l'Adour,

^c Institut de Mathématiques de Toulouse

Introduction

- Exemples d'applications
 - Echangeurs thermiques à tubes



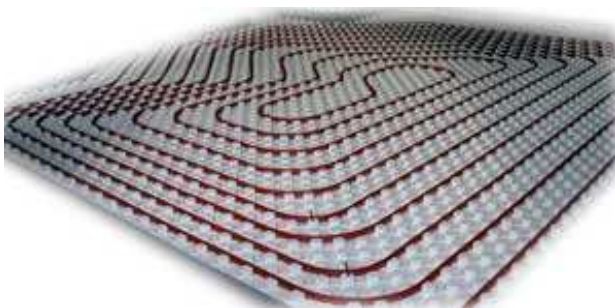
Introduction

- Exemples d'applications
 - Echangeurs thermiques à tubes
 - Micro-échangeurs convectifs (photo CRTBT, UPR 50001 Grenoble)



Introduction

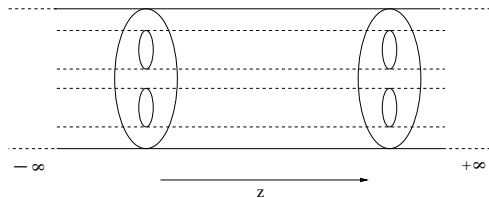
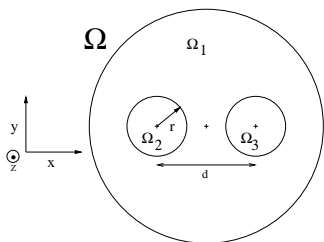
- Exemples d'applications
 - Echangeurs thermiques à tubes
 - Micro-échangeurs convectifs
 - Habitat : planchers chauffant rayonnants



Configuration du problème : Problème de Graetz généralisé

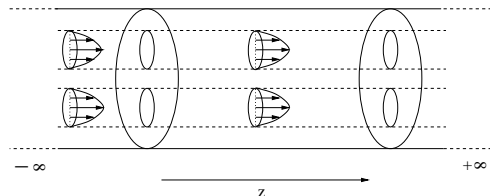
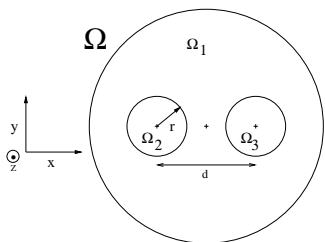
Configuration du problème : Problème de Graetz généralisé

- 3 domaines : Ω_1 solide, $\Omega_{2,3}$ fluide



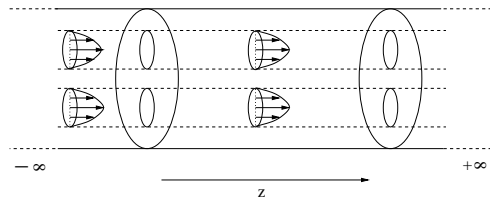
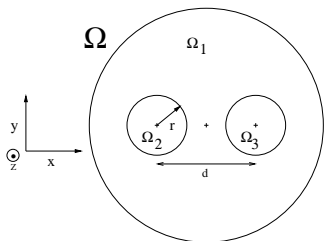
Configuration du problème : Problème de Graetz généralisé

- 3 domaines : Ω_1 solide, $\Omega_{2,3}$ fluide
- Écoulement laminaire établi : $\mathbf{v} = v(x, y)\mathbf{e}_z$



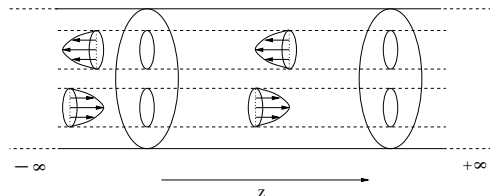
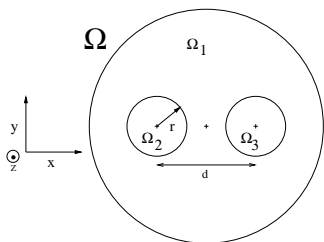
Configuration du problème : Problème de Graetz généralisé

- 3 domaines : Ω_1 solide, $\Omega_{2,3}$ fluide
- Écoulement laminaire établi : $\mathbf{v} = v(x, y)\mathbf{e}_z$
- $v|_{\Omega_i} = v_i$ avec $v_1 = 0$ et $v_{2,3} > 0$ ou < 0



Configuration du problème : Problème de Graetz généralisé

- 3 domaines : Ω_1 solide, $\Omega_{2,3}$ fluide
- Écoulement laminaire établi : $\mathbf{v} = v(x, y)\mathbf{e}_z$
- $v|_{\Omega_i} = v_i$ avec $v_1 = 0$ et $v_{2,3} > 0$ ou < 0

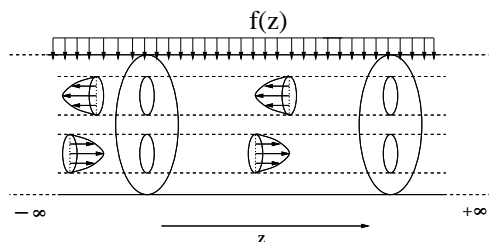
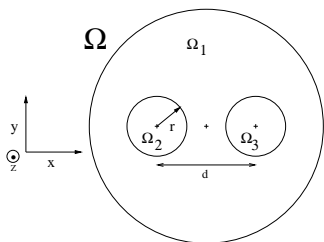


Configuration du problème : Problème de Graetz généralisé

- 3 domaines : Ω_1 solide, $\Omega_{2,3}$ fluide
- Écoulement laminaire établi : $\mathbf{v} = v(x, y)\mathbf{e}_z$
- $v|_{\Omega_i} = v_i$ avec $v_1 = 0$ et $v_{2,3} > 0$ ou < 0
- Conditions limites :

$$\text{Dirichlet : } T(x, z) = f(z) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

$$\text{Neumann : } k\nabla T(x, z) \cdot \mathbf{n} = f(z) \quad \forall x \in \partial\Omega$$



Equation de l'énergie

- Sur une section Ω :

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Pe \, v \frac{\partial T}{\partial z}$$

avec $k = k(x, y)$ et $k|_{\Omega_i} = k_i$

Equation de l'énergie

- Sur une section Ω :

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Pe \, v \frac{\partial T}{\partial z}$$

avec $k = k(x, y)$ et $k|_{\Omega_i} = k_i$

- + couplage aux interfaces :

$$T_i = T_j \text{ et } k_i \nabla T_i \cdot \mathbf{n}_{i,j} = k_j \nabla T_j \cdot \mathbf{n}_{i,j} \text{ sur } \Gamma_{i,j}$$

avec $\Gamma_{i,j}$ interface entre Ω_i et Ω_j et $\mathbf{n}_{i,j}$ normale à $\Gamma_{i,j}$

Equation de l'énergie

- Sur une section Ω :

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Pe \, v \frac{\partial T}{\partial z}$$

avec $k = k(x, y)$ et $k|_{\Omega_i} = k_i$

- + conditions limites Dirichlet sur $\partial\Omega$ avec un saut en $z = 0$:

$$\begin{cases} f(z) = w(z) = 1 \text{ pour } z < 0 \\ f(z) = w(z) = 0 \text{ pour } z > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(z) \rightarrow 1 \text{ pour } z \rightarrow -\infty \\ f(z) \rightarrow 0 \text{ pour } z \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Equation de l'énergie

- Sur une section Ω :

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Pe \, v \frac{\partial T}{\partial z}$$

avec $k = k(x, y)$ et $k|_{\Omega_i} = k_i$

- Solution : modes de Graetz [1] :

$$T(x, y, z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda T_\lambda(x, y) e^{\lambda z}$$

[1] Papoutsakis et al, 1980

Reformulation du problème

- Système 2 équations différentielles du 1er ordre :

$$\partial_z T = Pe v k^{-1} T - k^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{p})$$

$$\partial_z \mathbf{p} = k \nabla T$$

Reformulation du problème

- Système 2 équations différentielles du 1er ordre :

$$\begin{aligned}\partial_z T &= Pe v k^{-1} T - k^{-1} \nabla \cdot (\mathbf{p}) \\ \partial_z \mathbf{p} &= k \nabla T\end{aligned}$$

- Que l'on écrit [2] :

$$\frac{d}{dz} \Phi(z) = A \Phi(z) \quad \text{avec} \quad \Phi(z) = \begin{pmatrix} T(z) \\ \mathbf{p}(z) \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} Pe v k^{-1} & -k^{-1} \nabla \cdot \\ k \nabla & 0 \end{pmatrix}$$

[2] Pierre and Plouraboué, 2009

Formulation de T élémentaire

- N-ième fonction propre $\psi_n = (T_n, \mathbf{p}_n)$ vérifie $\frac{d}{dz}\psi_n = A\psi_n = \lambda_n\psi_n$

Formulation de T élémentaire

- N-ième fonction propre $\psi_n = (T_n, \mathbf{p}_n)$ vérifie $\frac{d}{dz}\psi_n = A\psi_n = \lambda_n\psi_n$
- $T(x, y, z) = e^{\lambda_n z} T_n(x, y) \implies T$ solution de l'équation de l'énergie

Formulation de T élémentaire

- N-ième fonction propre $\psi_n = (T_n, \mathbf{p}_n)$ vérifie $\frac{d}{dz}\psi_n = A\psi_n = \lambda_n\psi_n$
- $T(x, y, z) = e^{\lambda_n z} T_n(x, y) \implies T$ solution de l'équation de l'énergie
- On définit alors la solution dite élémentaire :

$$T_{\text{élémentaire}} = T = \begin{cases} w(z) - \sum_{n<0} \alpha_n^- e^{\lambda_n^- z} T_n^-(x, y) \\ + (1 - w(z)) \sum_{n>0} \alpha_n^+ e^{\lambda_n^+ z} T_n^+(x, y) \end{cases}$$

Formulation de T élémentaire

- N-ième fonction propre $\psi_n = (T_n, \mathbf{p}_n)$ vérifie $\frac{d}{dz}\psi_n = A\psi_n = \lambda_n\psi_n$
- $T(x, y, z) = e^{\lambda_n z} T_n(x, y) \implies T$ solution de l'équation de l'énergie
- Qui se simplifie en :

$$T_{\text{elementaire}} = T = \begin{cases} 1 - \sum_{n < 0} \alpha_n^- e^{\lambda_n^- z} T_n^- & z \leq 0 \\ \sum_{n > 0} \alpha_n^+ e^{\lambda_n^+ z} T_n^+ & z \geq 0 \end{cases}$$

- Avec les coefficients : $\alpha_n = \frac{-1}{\lambda_n^2} \int_{\partial\Omega} k \nabla T_n \cdot \mathbf{n} ds$

Formulation générale de T

- Pour $f(z) \neq w(z)$ quelconque on a :

$$T(x, y, z) = f(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n(x, y)$$

avec les coefficients :

$$c_n(z) = \begin{cases} \int_z^{+\infty} f'(\zeta) e^{\lambda_n(z-\zeta)} d\zeta & n < 0 \\ -\int_{-\infty}^z f'(\zeta) e^{\lambda_n(z-\zeta)} d\zeta & n > 0 \end{cases}$$

Formulation générale de T

- Pour $f(z) \neq w(z)$ quelconque on a :

$$T(x, y, z) = f(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n c_n(z) T_n(x, y)$$

avec les coefficients :

$$c_n(z) = \begin{cases} \int_z^{+\infty} f'(\zeta) e^{\lambda_n(z-\zeta)} d\zeta & n < 0 \\ -\int_{-\infty}^z f'(\zeta) e^{\lambda_n(z-\zeta)} d\zeta & n > 0 \end{cases}$$

- Solution T quelconque : convolution entre T_e et $f'(z)$ [3]

[3] Bouyssier et al, 2012

Eléments finis

- Solveur aux éléments finis *FreeFem* + + [4]

Eléments finis

- Solveur aux éléments finis *FreeFem* + + [4]
- Objectifs : déterminer champ température T et flux de chaleur

Eléments finis

- Solveur aux éléments finis *FreeFem* + + [4]
- Objectifs : déterminer champ température T et flux de chaleur
- Calcule nombre fini N valeurs propres/vecteurs propres λ_n/T_n

Eléments finis

- Solveur aux éléments finis *FreeFem* + + [4]
- Objectifs : déterminer champ température T et flux de chaleur
- Calcule nombre fini N valeurs propres/vecteurs propres λ_n/T_n
- Reconstruction solution T et détermination du flux

[4] Hecht, Le Hyaric, and Pironneau

Cas axisymétrique

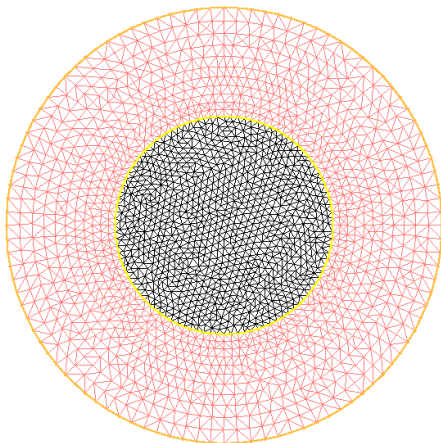


FIGURE: Exemple de maillage obtenu avec *FreeFem++*.

Cas axisymétrique

- Un tube interne plongé dans un tube externe de mêmes centres

Cas axisymétrique

- Un tube interne plongé dans un tube externe de mêmes centres
- Tubes de longueur infinie

Cas axisymétrique

- Un tube interne plongé dans un tube externe de mêmes centres
- Tubes de longueur infinie
- Condition limite type Neumann sur $\partial\Omega$ avec saut en $z=0$:

$$\forall x \in \partial\Omega, k \nabla T(x, z) \cdot \mathbf{n} = f(z) = w(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z > 0 \\ 1 & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

Cas axisymétrique

- Un tube interne plongé dans un tube externe de mêmes centres
- Tubes de longueur infinie
- Condition limite type Neumann sur $\partial\Omega$ avec saut en $z=0$:

$$\forall x \in \partial\Omega, k \nabla T(x, z) \cdot \mathbf{n} = f(z) = w(z) = \begin{cases} 0 & \text{pour } z > 0 \\ 1 & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

- Comparaison λ_n, α_n avec valeurs obtenues par méthode analytique

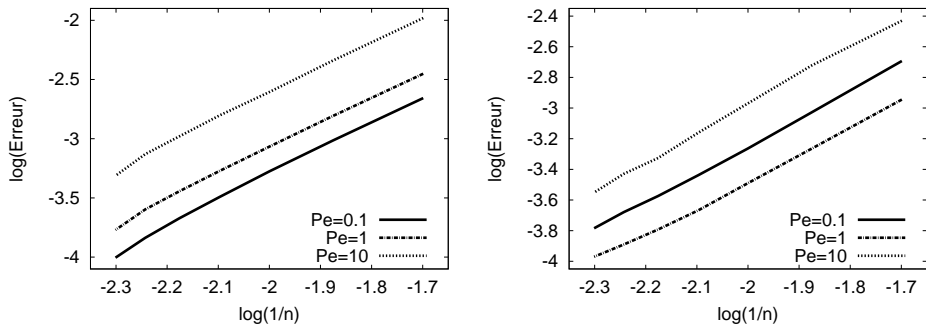
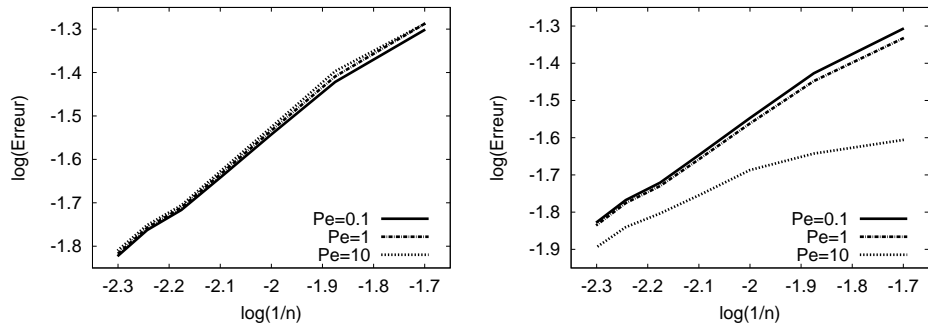
Cas axisymétrique : convergence λ_1/λ_{-1} 

FIGURE: Convergence de λ_1 à gauche et λ_{-1} à droite.

Cas axisymétrique : convergence α_1/α_{-1} FIGURE: Convergence de α_1 à gauche et α_{-1} à droite.

Flux fluide/solide : tubes infinis et semi-infinis

- $Flux_{fluide/solide} = Flux_{F/S} := \int_0^{+\infty} \int_{\partial O} k \nabla T \cdot \mathbf{n} \, dldz$

Flux fluide/solide : tubes infinis et semi-infinis

- $Flux_{fluide/solide} = Flux_{F/S} := \int_0^{+\infty} \int_{\partial O} k \nabla T \cdot \mathbf{n} \, dldz$
- Existence de modes dominants $\Rightarrow Flux_{F/S}$ calculé avec ces modes

Flux fluide/solide : tubes infinis et semi-infinis

- $Flux_{fluide/solide} = Flux_{F/S} := \int_0^{+\infty} \int_{\partial O} k \nabla T \cdot \mathbf{n} \, dldz$
- Existence de modes dominants $\Rightarrow Flux_{F/S}$ calculé avec ces modes
- Bonne approximation $Flux_{F/S}$ avec peu de modes :
 - 1% d'erreur relative avec 5 modes cas infini
 - 3% d'erreur relative avec 7 modes cas semi-infini [5]

[5] Ferenbach et al, 2011

Flux fluide/solide : tubes infinis et semi-infinis

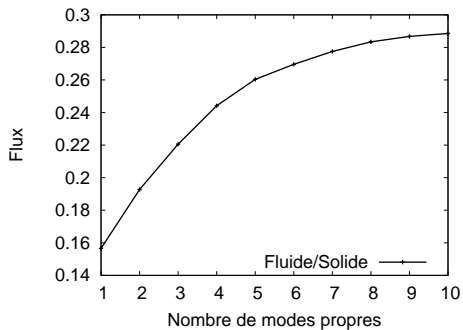
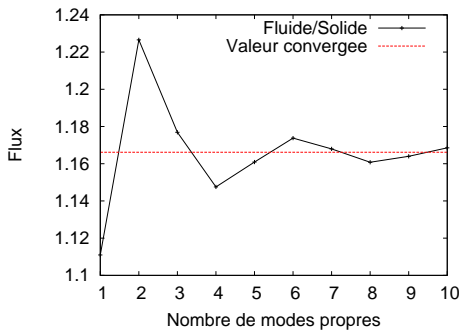


FIGURE: $\text{Flux}_{F/S}$ en fonction du nombre de modes à $Pe = 10$. Tubes infinis à gauche et semi-infinis à droite.

Cas périodique : configuration du problème

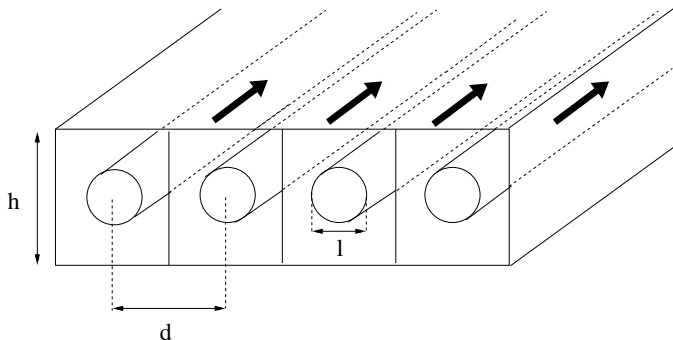


FIGURE: Configuration du problème dans le cas périodique.

Cas périodique : flux et visualisation des modes

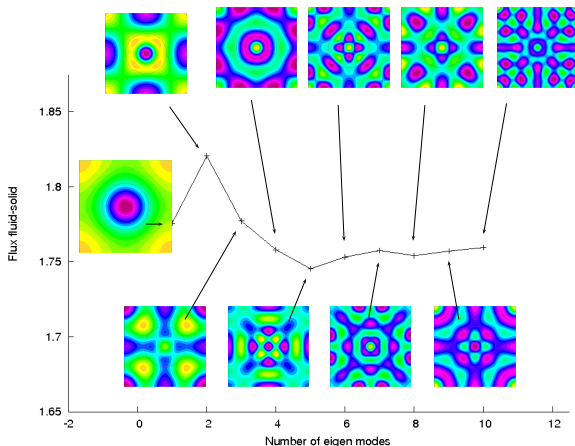


FIGURE: Flux $_{F/S}$ et visualisation des 10 premiers modes. $d = 2$, $h = 2$ et $l = 1$.

Cas deux tubes : configuration du problème

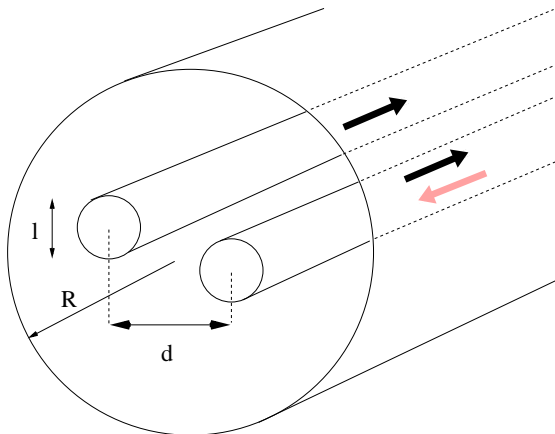


FIGURE: Configuration co et contre courant dans le cas deux tubes.

Cas deux tubes : flux et visualisation des modes

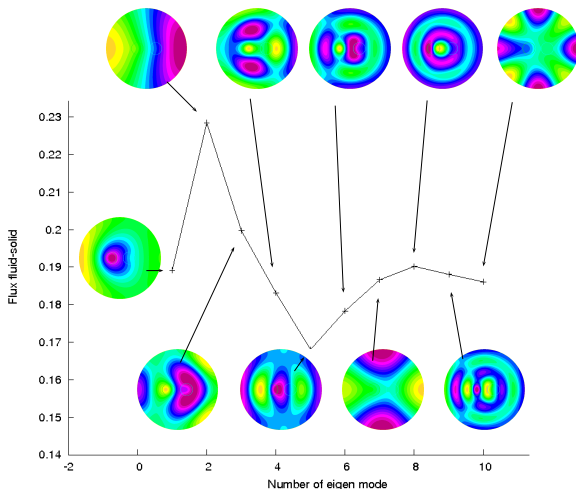
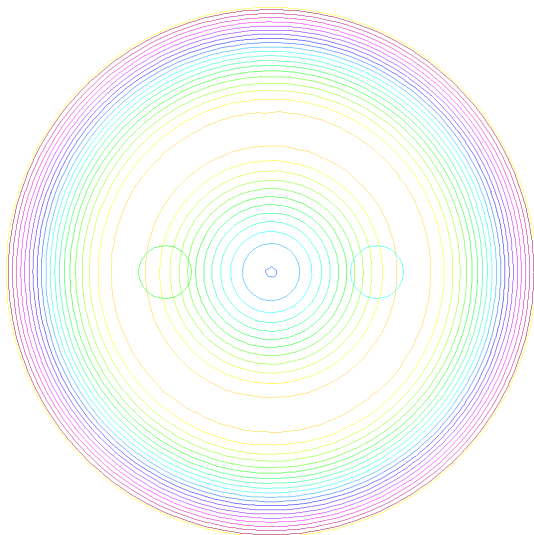


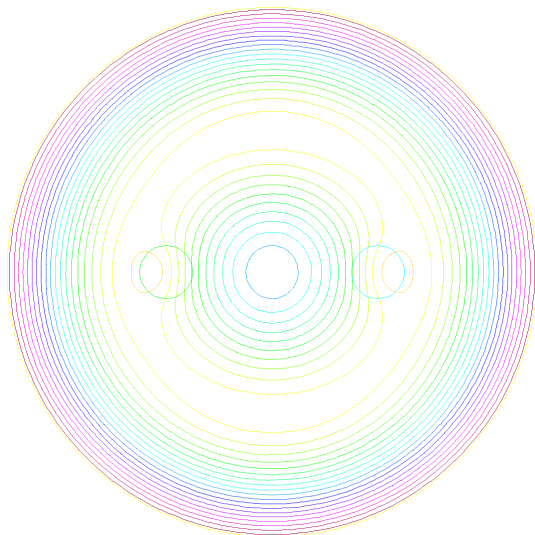
FIGURE: $Flux_{F/S}$ et visualisation des 10 premiers modes. $Pe = 10$, $R = 1$, $l = 0.3$ et $d = 0.45$.

Quelques exemples : variation Péclet



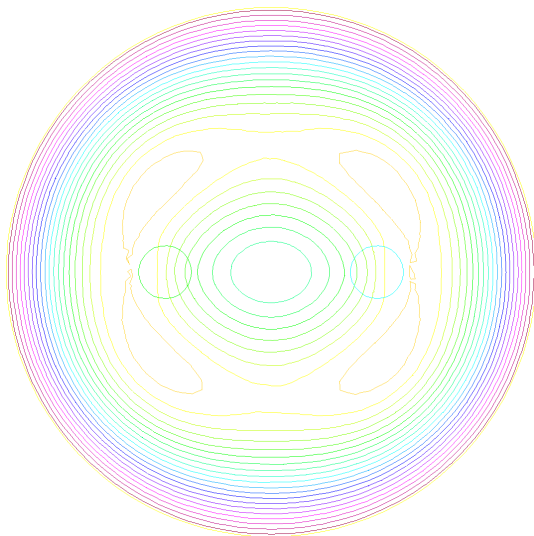
$Pe=0.1$

Quelques exemples : variation Péclet



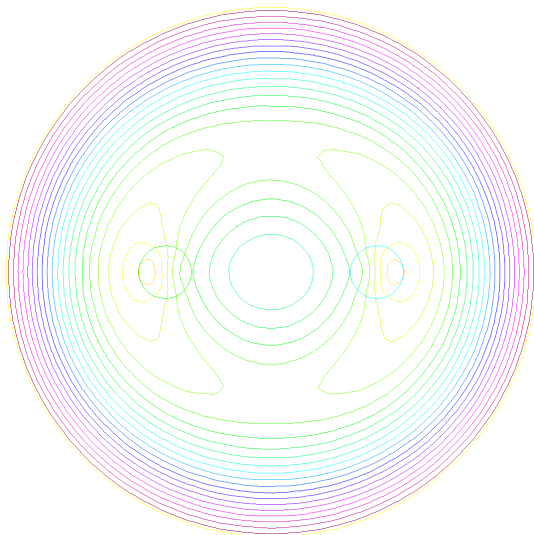
Pe=10

Quelques exemples : variation Péclet



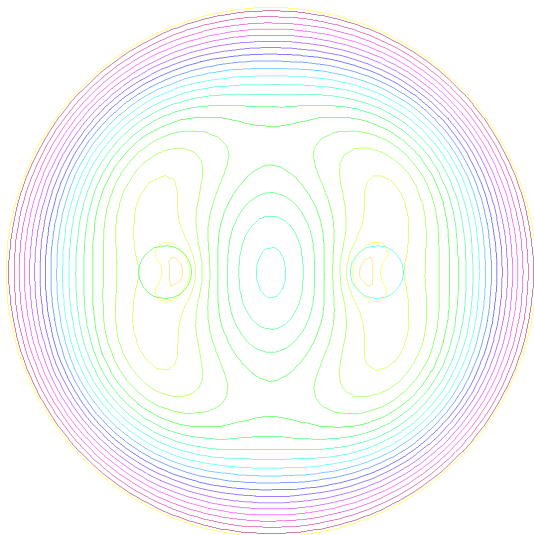
Pe=20

Quelques exemples : variation Péclet



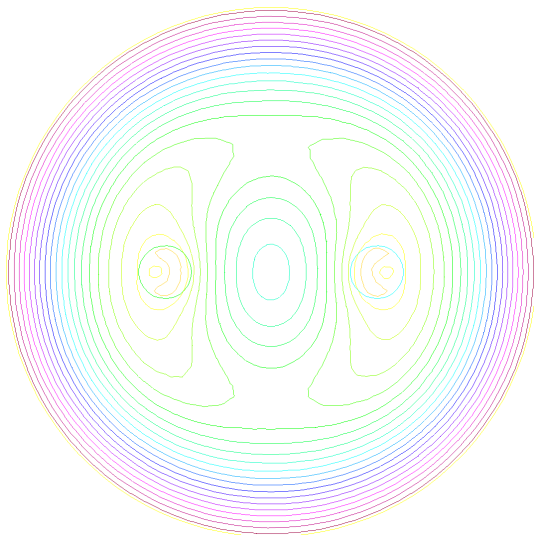
Pe=50

Quelques exemples : variation Péclet



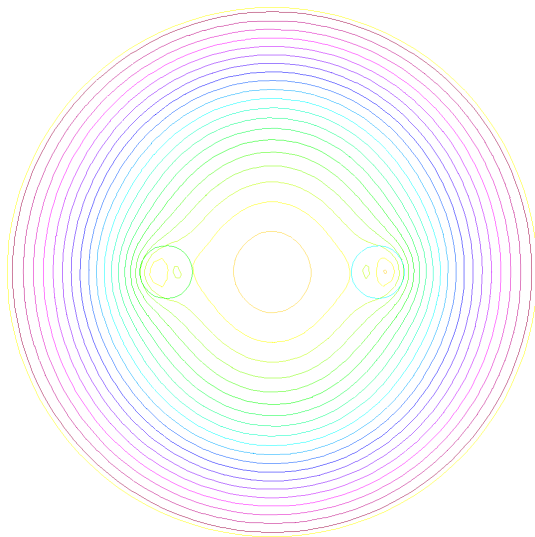
$Pe=100$

Quelques exemples : variation Péclet



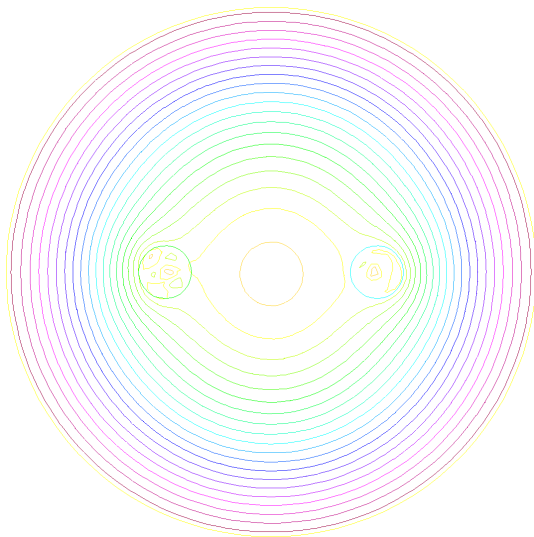
Pe=200

Quelques exemples : variation Péclet



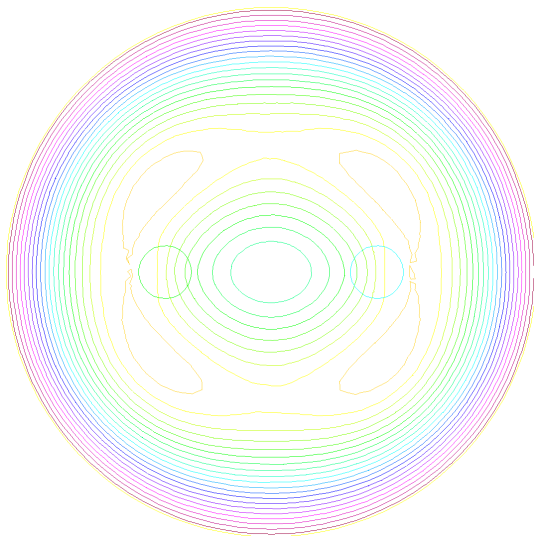
Pe=500

Quelques exemples : variation Péclet



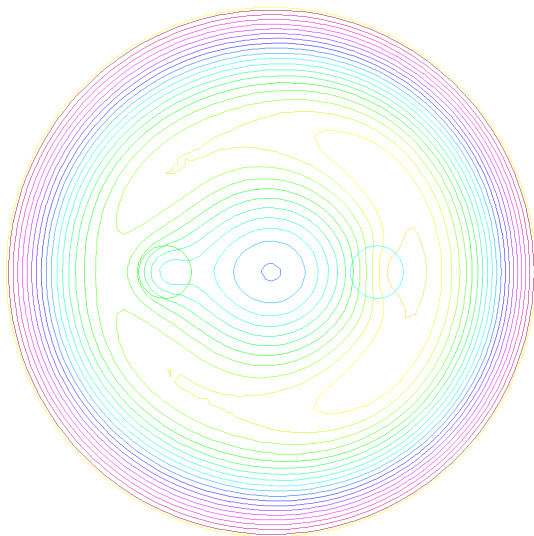
$Pe=1000$

Quelques exemples : variation vitesse



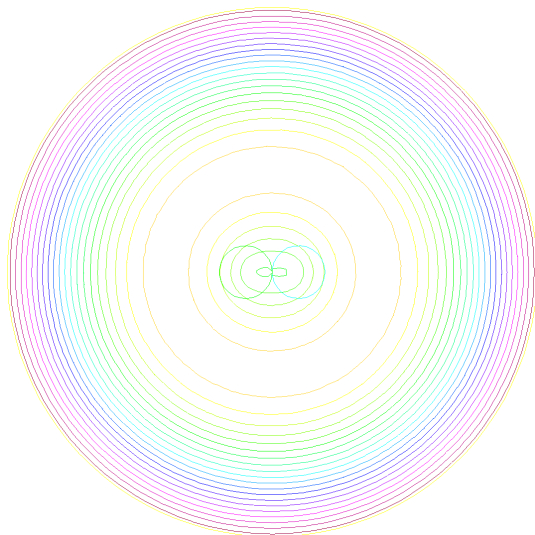
$Pe=20, +/+$

Quelques exemples : variation vitesse



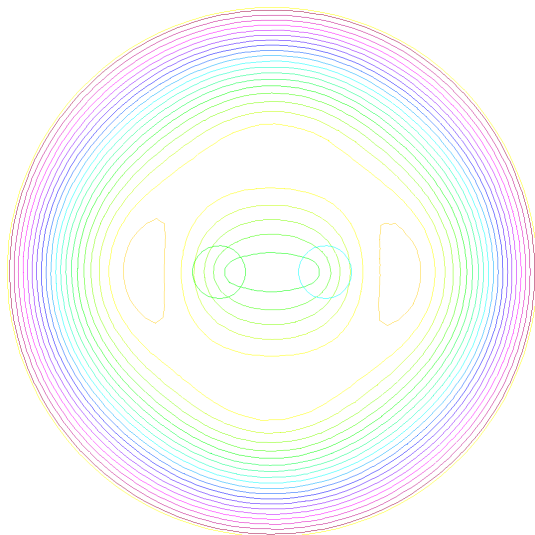
$Pe=20, +/-$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



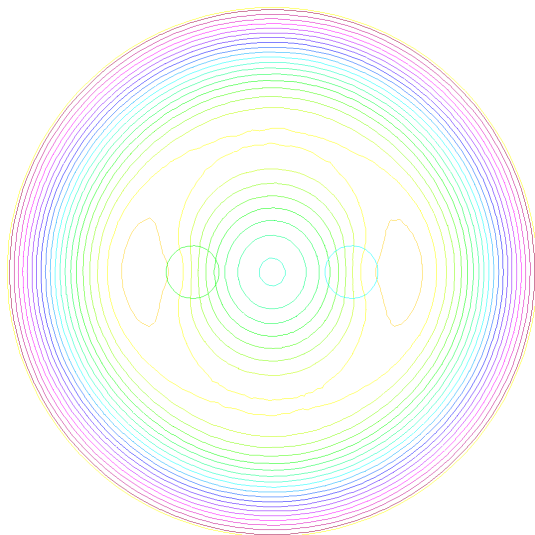
$d=0.1$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



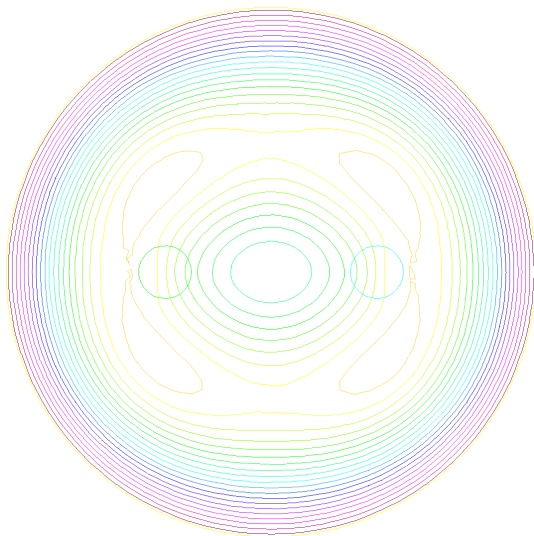
$d=0.2$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



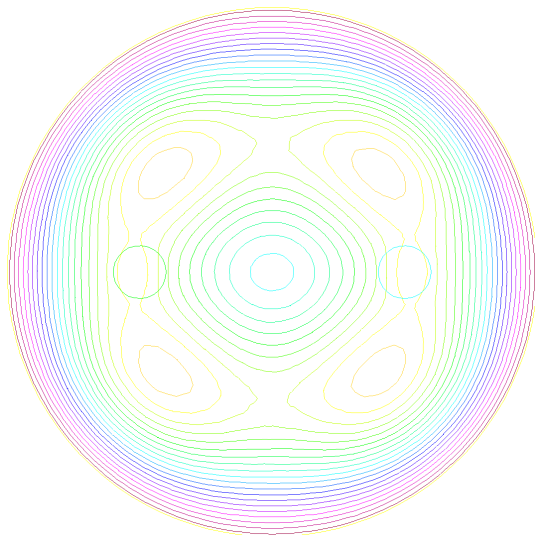
$d=0.3$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



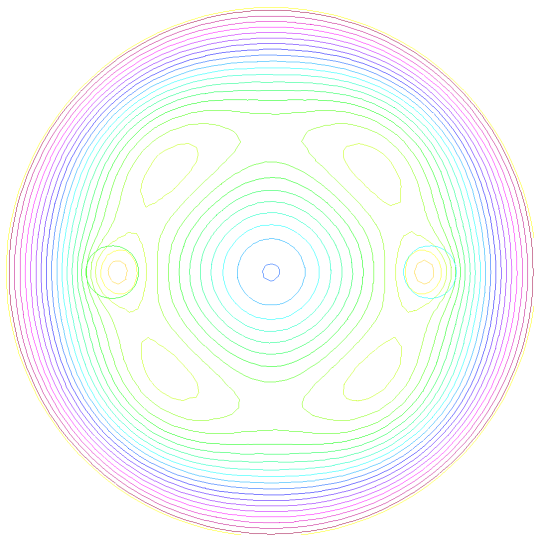
$d=0.4$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



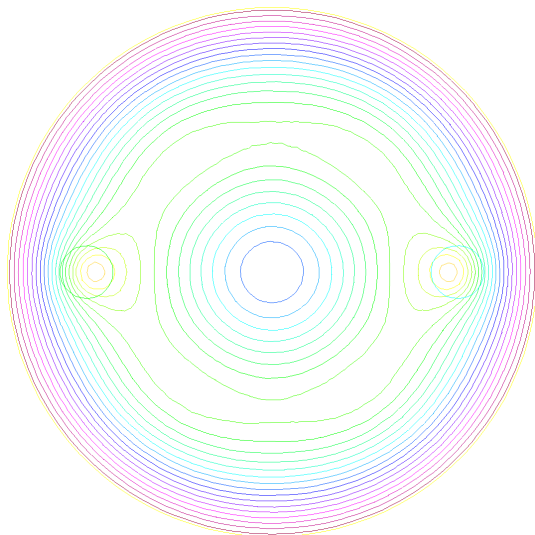
$d=0.5$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



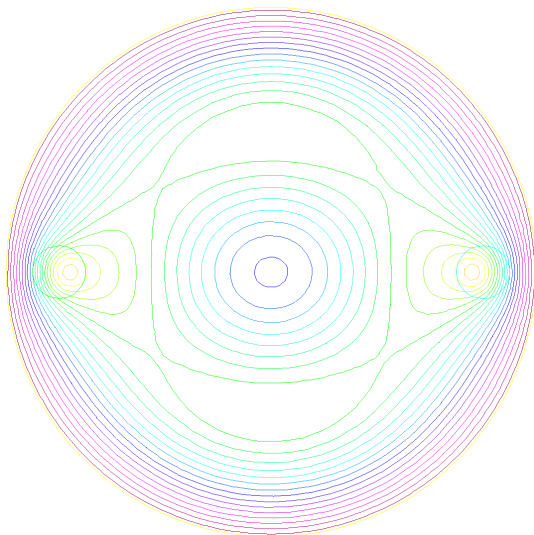
$d=0.6$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



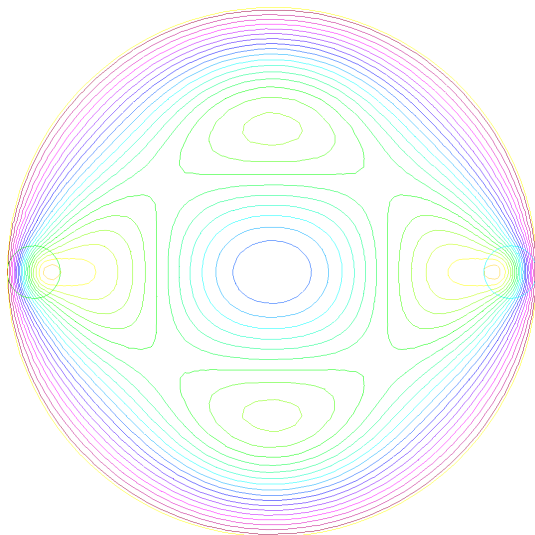
$d=0.7$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



$d=0.8$

Quelques exemples : variation distance entre les tubes



$d=0.9$

Conclusion et perspectives

- Conclusions :

Conclusion et perspectives

- Conclusions :
 - Nouvelle formulation \Rightarrow Gain numérique :

Conclusion et perspectives

- Conclusions :
 - Nouvelle formulation \Rightarrow Gain numérique :
 - Formulation 2D pour des problèmes 3D

Conclusion et perspectives

- Conclusions :
 - Nouvelle formulation \Rightarrow Gain numérique :
 - Formulation 2D pour des problèmes 3D
 - Décomposition en modes dominants

Conclusion et perspectives

- Conclusions :
 - Nouvelle formulation \Rightarrow Gain numérique :
 - Formulation 2D pour des problèmes 3D
 - Décomposition en modes dominants
 - Balayage configurations géométriques, conditions limites, hydrodynamiques ...

Conclusion et perspectives

- Conclusions :
 - Nouvelle formulation \Rightarrow Gain numérique :
 - Formulation 2D pour des problèmes 3D
 - Décomposition en modes dominants
 - Balayage configurations géométriques, conditions limites, hydrodynamiques ...
 - T dépend explicitement de $f(z)$ imposée

Conclusion et perspectives

- Conclusions :
 - Nouvelle formulation \Rightarrow Gain numérique :
 - Formulation 2D pour des problèmes 3D
 - Décomposition en modes dominants
 - Balayage configurations géométriques, conditions limites, hydrodynamiques ...
 - T dépend explicitement de $f(z)$ imposée
- Perspectives :

Conclusion et perspectives

- Conclusions :
 - Nouvelle formulation \Rightarrow Gain numérique :
 - Formulation 2D pour des problèmes 3D
 - Décomposition en modes dominants
 - Balayage configurations géométriques, conditions limites, hydrodynamiques ...
 - T dépend explicitement de $f(z)$ imposée
- Perspectives :
 - Domaines finis

Conclusion et perspectives

- Conclusions :
 - Nouvelle formulation \Rightarrow Gain numérique :
 - Formulation 2D pour des problèmes 3D
 - Décomposition en modes dominants
 - Balayage configurations géométriques, conditions limites, hydrodynamiques ...
 - T dépend explicitement de $f(z)$ imposée
- Perspectives :
 - Domaines finis
 - Optimisation des échanges

Références bibliographiques

- [1] Papoutsakis, E. and Ramkrishna, D. and Lim, H-C., The extended Graetz problem with Dirichlet wall boundary conditions, *Appl. Sci. Res.*, 36 :13-34, 1980
- [2] Pierre, C. and Plouraboué, F., Numerical analysis of a new mixed formulation for eigenvalue convection-diffusion problems, *SIAM J. Appl. Math.*, 70(3) :658-676, 2009
- [3] Bouyssier, J. and Pierre, C. and Plouraboué, F., Mathematical analysis of parallel convective exchangers, *Submitted*, 2012
- [4] Hecht, F. and Le Hyaric, A. and Pironneau, O., <http://www.freefem.org/ff++/>
- [5] Fehrenbach, J. and De Gournay, F. and Pierre, C. and Plouraboué, F., The Generalized Graetz problem in finite domains, *SIAM J. Appl. Math.*, 72(1) :99-123, 2011