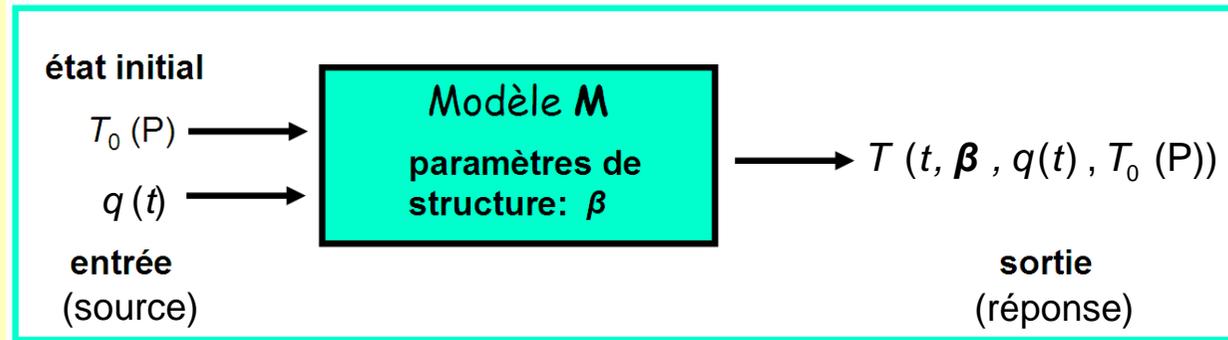


***Caractérisation thermique transitoire  
par la mesure de deux températures:  
1 - Evaluation des erreurs d'estimation***

**Denis Maillet, Yves Jannot, Alain Degiovanni**

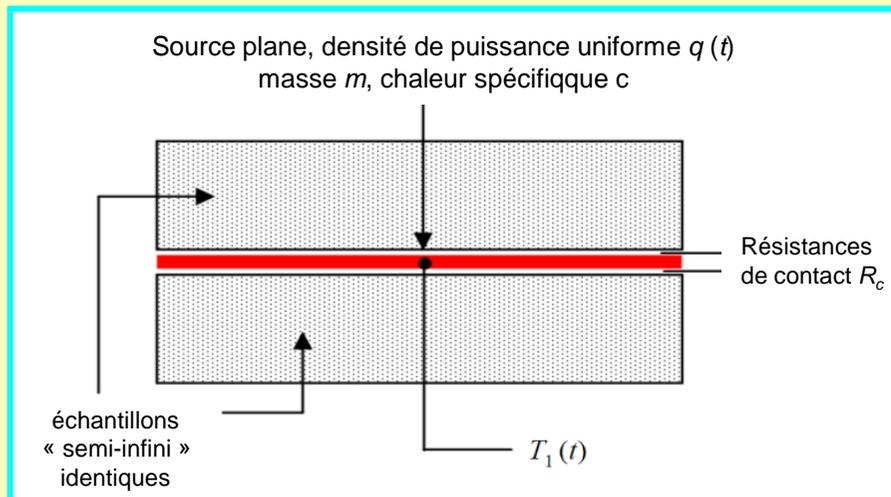
LEMTA – Université de Lorraine & CNRS – Vandoeuvre-lès-Nancy

# Caractérisation en exploitant 1 source et la mesure de $T$ en 1 seul point



Exemple 1: plan chaud en transitoire (pas de thermodépendance)

Forme du modèle (état initial uniforme):



impédance temporelle

produit de convolution

source

$$T_1(t; \beta) \equiv Z_1(t; \beta) * q(t)$$

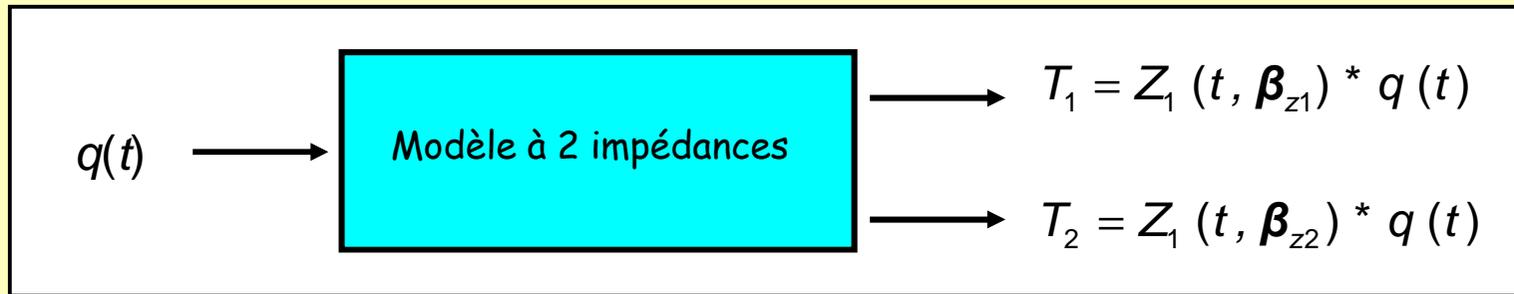
avec  $\beta = [E \quad R_c \quad mc]^T$

vecteur paramètre

effusivité

paramètres de nuisance

## Caractérisation en exploitant la mesure de $T$ en 2 points

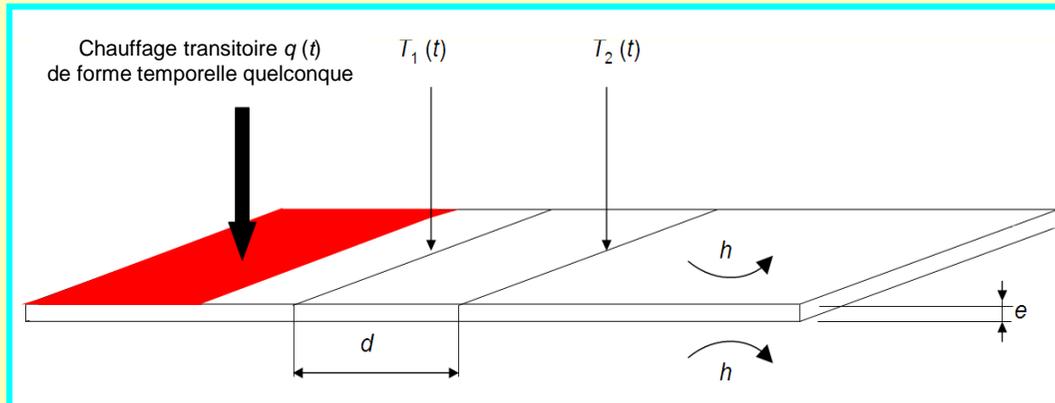


Exemple 2: ailette en transitoire

Passage dans l'espace de Laplace :

$$\bar{x}(p) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-pt) dt$$

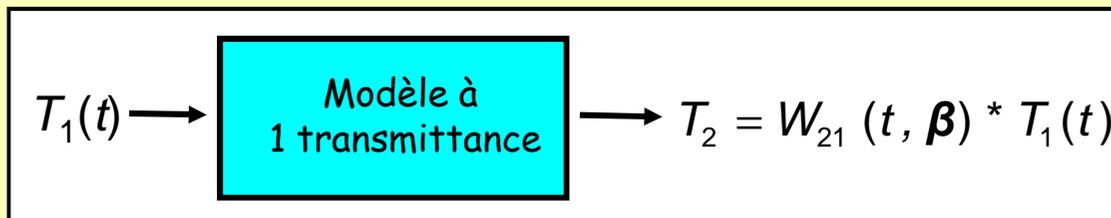
pour  $x = T_i, Z_i$  ou  $q$



$$\bar{T}_1 = \bar{Z}_2(p; \beta_{z1}) \bar{q}(p)$$

$$\bar{T}_2 = \bar{Z}_2(p; \beta_{z2}) \bar{q}(p)$$

Rapport :  $\bar{T}_2 = \bar{W}_{21} \bar{T}_1$  avec  $\bar{W}_{21} = \bar{Z}_2 / \bar{Z}_1$   
 et  $\bar{W}_{21} = \bar{W}_{21}(p; \beta)$



**Intérêt :**

- élimination de la source  $q$
- moins de paramètres dans  $\beta$  que dans  $\beta_{z1}$  et  $\beta_{z2}$ .

**Inconvénient:**  $T_1$  et  $T_2$  bruités (mesures)

## Rappel: Méthode des moindres carrés (non linéaires) ordinaires\* appliquée à un modèle d'impédance $q/T$

$$J_z(\boldsymbol{\beta}_{z2}) = \sum_{k=1}^m \left( T_2^{\text{exp}}(t_k) - (Z_2(\boldsymbol{\beta}_{z2}) * q)(t_k) \right)^2$$

Minimisation: estimation  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{z2}$  de  $\boldsymbol{\beta}_{z2}$  ( $n$  paramètres)

$$T_2^{\text{exp}}(t_k) = T_2(t_k, \boldsymbol{\beta}_{z2}^{\text{exact}}) + \varepsilon_k$$

↑  
mesure

↑  
modèle  
(exact)

↑  
bruit i.i.d.  
(indépendant et  
identiquement  
distribué,  
espérance nulle,  
écart type  $\sigma$ )

→ Notation vectorielle  
(vecteurs-colonnes,  
taille  $m \times 1$ )

$$\mathbf{T}_2^{\text{exp}} = \mathbf{T}_2(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}_{z2}^{\text{exact}}) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

bruit  $\boldsymbol{\varepsilon}$  = variable aléatoire



Erreur d'estimation

$$\mathbf{e}_{\beta_{z2}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{z2} - \boldsymbol{\beta}_{z2}^{\text{exact}}$$

= variable aléatoire

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{z2}) \approx \sigma^2 (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}$$

↓  
matrice de  
variance  
-covariance

↓  
matrice de  
sensibilité  
taille  $m \times n$



$$\text{var}(\hat{\beta}_{z2j}) = \text{var}(e_{\beta_{z2j}}) = [\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{z2})]_{jj}$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta}_{z2}) = \frac{d\mathbf{T}_2}{d\boldsymbol{\beta}_{z2}} \quad S_{ij} = \frac{\partial T_2(t_k, \boldsymbol{\beta}_{z2})}{\partial \beta_{z2j}}$$

\* D. Mailet, Y. Jarny, D. Petit, Problèmes inverses en diffusion thermique, *Techniques de l'Ingénieur*, Paris, base documentaire: Génie Energétique. 4 Dossiers BE 8265 (Modèles diffusifs, mesures et introduction à l'inversion), pp. 1-54, 10 octobre 2010, BE 8266 (Formulation et résolution du problème des moindres carrés), pp. 1-46, janvier 2011, BE 8267 (Outils spécifiques de conduction inverse et de régularisation), pp. 1-24, octobre 2011.

## Méthode des moindres carrés (non linéaires) ordinaires appliquée à un modèle de transmittance $T_1/T_2$

Notation scalaire: 
$$T_2(t_k) = \int_0^{t_m} W(t_k - t') T_1(t') dt' = (W(\boldsymbol{\beta}) * T_1)(t_k)$$

Instants de mesure:  $t_k = k \Delta t$  pour  $k=1$  à  $m$ , avec  $t_0 = 0$

Notation vectorielle: 
$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{W}) \mathbf{T}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{T}_1) \mathbf{W}$$

vecteur des transmittances  
aux différents instants

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \equiv \Delta t$$

Fonction matricielle  
d'un vecteur-colonne  $\mathbf{x}$   
(matrice de Toeplitz)

$$\begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ x_2 & x_1 & & & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_m & x_{m-1} & x_{m-2} & \cdots & x_1 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 = x(t_1) \\ x_2 = x(t_2) \\ x_3 = x(t_3) \\ \vdots \\ x_m = x(t_m) \end{bmatrix}$$

$$J_w(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^m \left( T_2^{\text{exp}}(t_k) - (W(\boldsymbol{\beta}) * T_1^{\text{exp}})(t_k) \right)^2 = \left\| \mathbf{T}_2^{\text{exp}} - \mathbf{M}(W(\boldsymbol{\beta})) \mathbf{T}_1^{\text{exp}} \right\|^2$$

## Du critère des moindres carrés à l'expression de l'erreur d'estimation

$$J_w(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{k=1}^m \left( T_2^{\text{exp}}(t_k) - (W(\boldsymbol{\beta}) * T_1^{\text{exp}})(t_k) \right)^2 = \left\| T_2^{\text{exp}} - \mathbf{M}(W(\boldsymbol{\beta})) T_1^{\text{exp}} \right\|^2$$

$$T_2^{\text{vrai}}(t, \boldsymbol{\beta}^{\text{exact}}) + \varepsilon_2$$

$$T_1^{\text{vrai}}(t, \boldsymbol{\beta}^{\text{exact}}) + \varepsilon_1$$

$$J_w(\boldsymbol{\beta}) \equiv \left\| \mathbf{r}(\boldsymbol{\beta}) \right\|^2 = \mathbf{r}^T(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{r}(\boldsymbol{\beta}) \text{ avec } \mathbf{r}(\boldsymbol{\beta}) = T_2^{\text{exp}} - T_2^{\text{dispo}}(\boldsymbol{\beta})$$

vecteur  
des résidus  
courants

$$T_2^{\text{dispo}}(\boldsymbol{\beta}) \equiv \mathbf{M}(W(\boldsymbol{\beta})) T_1^{\text{exp}} = \mathbf{M}(T_1^{\text{exp}}) W(\boldsymbol{\beta})$$

Algorithme de minimisation de Gauss-Newton – au voisinage de la convergence (1<sup>er</sup> ordre):

$$\mathbf{e}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}^{\text{exact}} \approx \mathbf{A}(\boldsymbol{\beta}^{\text{exact}}) (T_2^{\text{exp}} - T_2^{\text{dispo}}(\boldsymbol{\beta}^{\text{exact}})) \text{ où } \mathbf{A}(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{X}^T(\boldsymbol{\beta}) \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}))^{-1} \mathbf{X}^T(\boldsymbol{\beta})$$

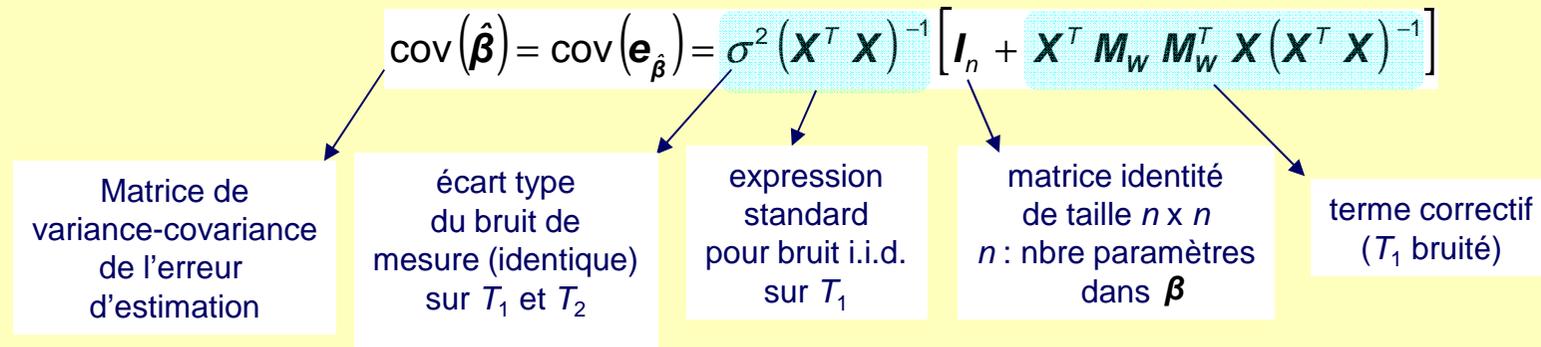
erreur d'estimation      valeur estimée

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{dT_2^{\text{dispo}}}{d\boldsymbol{\beta}} = \frac{dT_2}{dW} \frac{dW}{d\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{M}(T_1^{\text{exp}}) \mathbf{S}_w(\boldsymbol{\beta})$$

matrice de  
sensibilité  
de  $T_2$  à  $\boldsymbol{\beta}$

matrice de  
sensibilité  
de  $W$  à  $\boldsymbol{\beta}$

## Caractérisation de la variabilité de l'erreur d'estimation: on montre\*

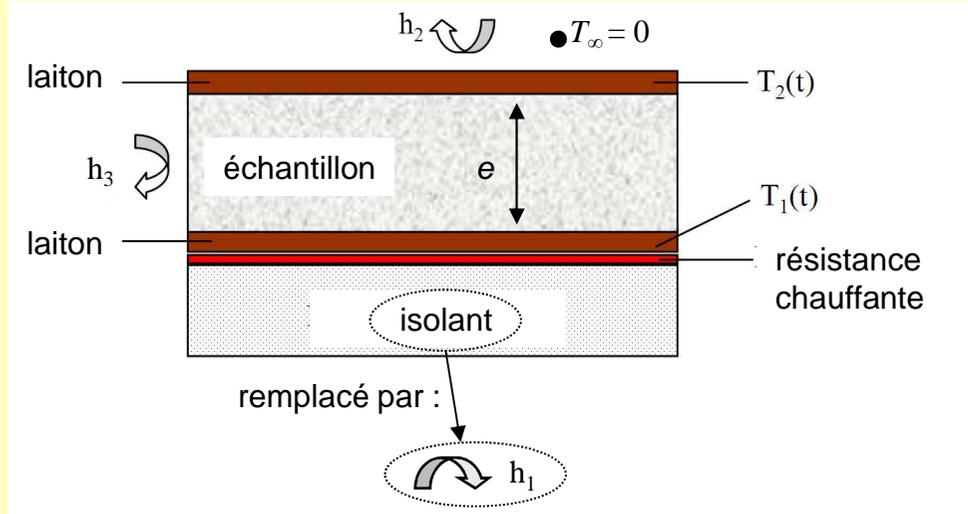


$$\mathbf{X} \approx \mathbf{X}^{dispo} = \mathbf{M}_{T_1} \mathbf{S}_w(\hat{\beta})$$

$$\mathbf{M}_{T_1} = \mathbf{M}(T_1^{exp})$$

$$\mathbf{M}_w \approx \mathbf{M}_w^{dispo} = \mathbf{M}(w(\hat{\beta}))$$

Exemple 3: méthode du tricouche\*



Modélisation par quadripôles  
(variable de Laplace  $p$ ,  $h_3 = 0$ )

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_1 + pC_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_2 + pC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A + BH_2 & B \\ C + AH_1 + DH_2 + BH_1H_2 & D + BH_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = h_1 + pC_1 \quad ; \quad H_2 = h_2 + pC_2 \quad ; \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

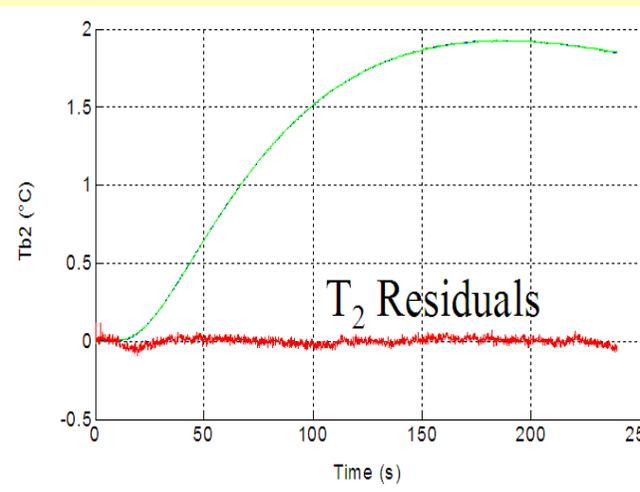
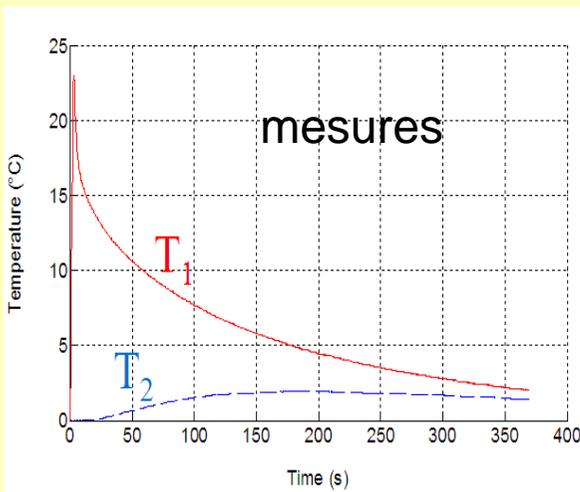
$$A = \cosh(e\sqrt{p/a}) \quad ; \quad B = \sinh(e\sqrt{p/a}) / (\lambda\sqrt{p/a})$$

$$C = \lambda\sqrt{p/a} \sinh(e\sqrt{p/a}) \quad ; \quad D = A \quad C_i = \rho c_{\text{laiton}} e_{\text{laiton } i}$$

Modèle de réponse  
avec impédances  
faces AV et AR:

$$\bar{T}_1 = \frac{A + BH_2}{C + A(H_1 + H_2) + BH_1H_2} \bar{q} = \bar{Z}_1 \bar{q}$$

$$\bar{T}_2 = \frac{1}{C + A(H_1 + H_2) + BH_1H_2} \bar{q} = \bar{Z}_2 \bar{q}$$



### Comparaison de 3 modèles (A1, A2 et B)

- **A1** : Modèle de réponse avec impédance face AR et source  $q(t)$  connue :

$$T_2(t, \beta_2) = Z_2(t, \beta_{z2}) * q(t)$$

$$\beta_{z2} = \left[ \frac{a}{e^2}, \frac{h_2 e}{\lambda}, \frac{C_2}{\rho c e}, \frac{h_1 e}{\lambda}, \frac{C_1}{\rho c e}, \frac{e}{\lambda} \right]^T$$

6 groupes de paramètres mais  $C_1, C_2$  et  $e$  connus = 4 paramètres recherchés  $\implies a, \lambda, h_1, h_2$

- **A2** : Modèle de réponse avec impédance face AR et source  $q(t)$  de forme  $f(t)$  connue :

$$T_2(t, \beta_2) = Z_2(t, \beta_{z2}) * q_0 f(t) \quad \text{Exemple } f(t) = \text{échelon: } q(t) = q_0 [H(t) - H(t - t_0)]$$

$$\beta_2 = \left[ \frac{a}{e^2}, \frac{h_2 e}{\lambda}, \frac{C_2}{\rho c e}, \frac{h_1 e}{\lambda}, \frac{C_1 e}{\lambda}, \frac{q_0 e}{\lambda} \right]$$

6 groupes de paramètres mais  $C_1, C_2$  et  $e$  connus = 5 paramètres recherchés  $\implies a, \lambda, h_1, h_2, q_0$

- **B** : Modèle de réponse avec transmittance entre faces AV et AR:

$$\bar{T}_2 = \frac{1}{A + BH_2} \bar{q} = \bar{W} \bar{T}_1 \implies T_2(t; \beta) = W(t; \beta) * T_1(t)$$

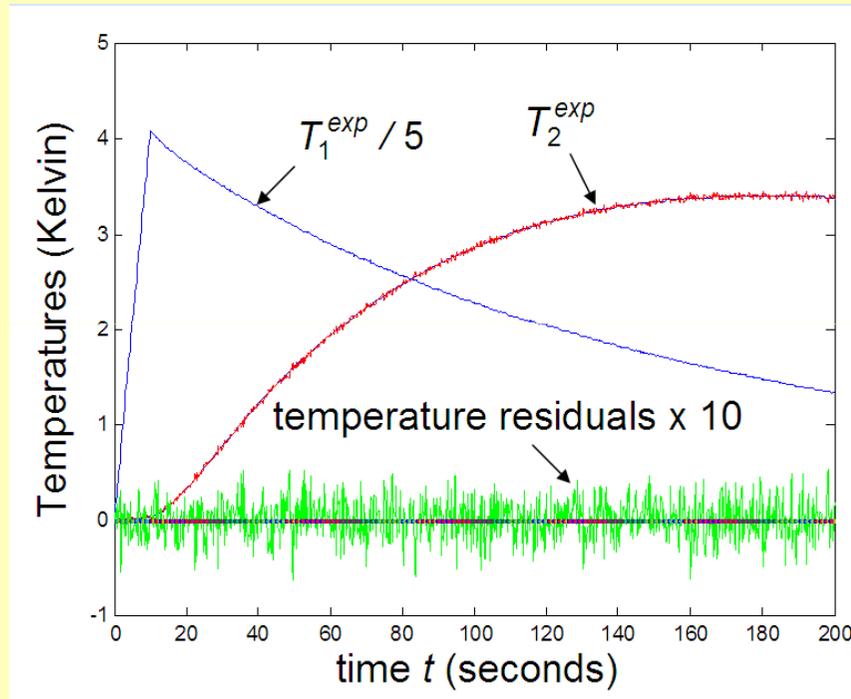
$$\beta = \left[ \frac{a}{e^2}, \frac{h_2 e}{\lambda}, \frac{C_2}{\rho c e} \right]$$

3 groupes de paramètres mais  $C_2$  et  $e$  connus = 3 recherchés  $\implies a, \rho c, h_2$

B plus **parcimonieux** que A1 ou A2 (même information utile)

## Information sur dispersion de l'estimateur : approche statistique (simulations de Monte Carlo et inversion)

$m = 1000$  instants de mesure ;  $N = 10^4$  réalisations différentes du bruit ;  $t_m = t_{max} = 200$  s ;  $\sigma = 0.01$  K



$$\bar{\hat{\beta}}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_j^{(i)} ;$$

$$s_{\hat{\beta}_j}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_j^{(i)2} - \bar{\hat{\beta}}_j^2 ;$$

$$\sigma_{\hat{\beta}_j}^2 = [\text{cov}(\hat{\beta})]_{jj}$$

moyenne statistique  
des estimations

variance statistique  
des estimations

variance stochastique  
des estimations

Inversion des mesures à l'aide du modèle B (transmittances) –  $10^4$  simulations bruitées

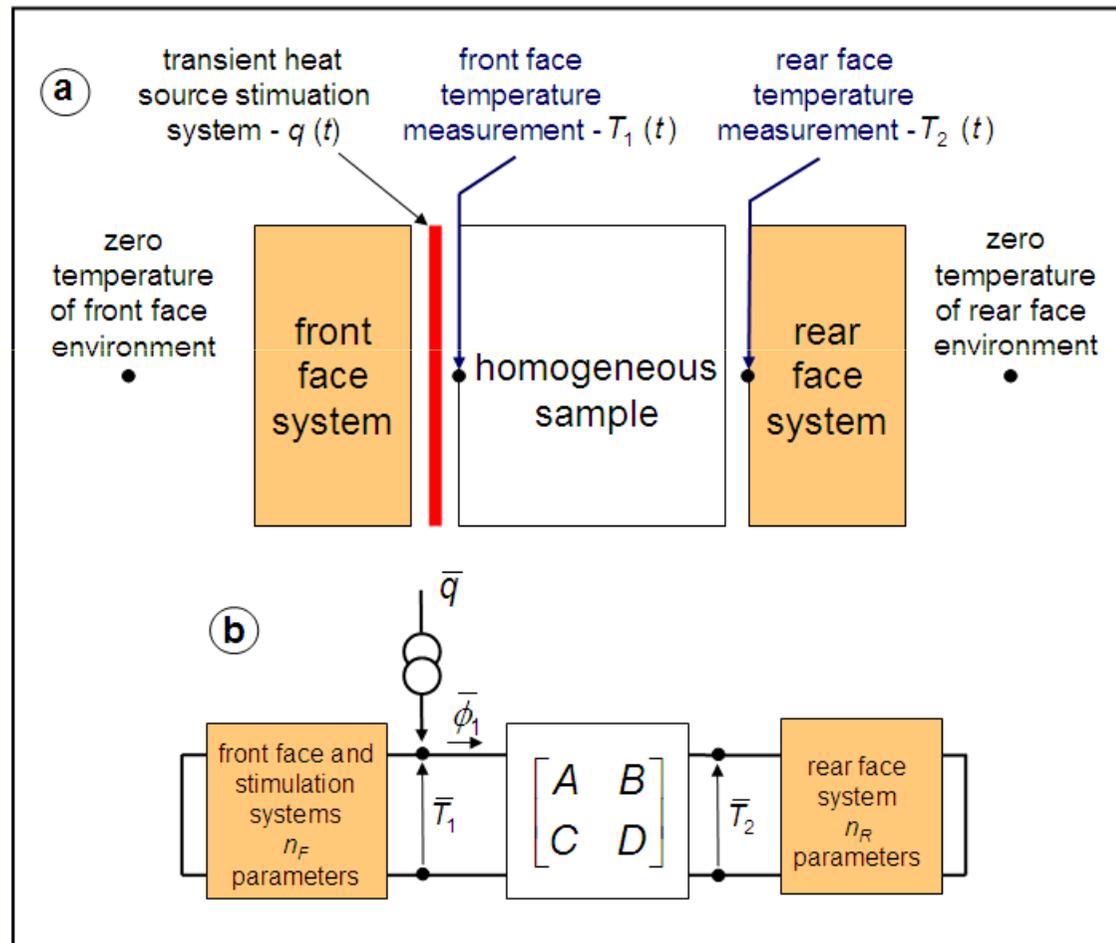
numéro $j$ du paramètre		1	2	3		
paramètre		$\beta_1 = a$	$\beta_2 = \lambda$	$\beta_3 = h_2$	$\rho c = \lambda / a$	
unité		$10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	$\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$	
1	valeur exacte	exact $\beta_j^{\text{exact}}$	6.2500	0.0250	5.0000	40,000
2	exacte ou moyenne value	statistique $\bar{\hat{\beta}}_j$	6.2521	0.0250	5.0017	40,027
3	écarts types normalisés (%)	stochastique $\sigma_{\hat{\beta}_j} / \beta_j^{\text{exact}}$	0.2588	0.0885	0.2326	0.3400
4		statistique $s_{\hat{\beta}_j} / \beta_j^{\text{exact}}$	0.2588	0.0879	0.2311	0.3390

### Comparaison des modèles utilisés (B, A1 et A2) pour l'inversion des mêmes mesures simulées

Ecart-types relatifs  $\sigma_{\hat{\beta}_j} / \beta_j^{exact}$  (%) pour bruit d'écart type  $\sigma = 0.01$  K sur  $T_2$

	Type de modèle	Nombre paramètres à estimer	$\beta_1 = a$	$\beta_2 = \lambda$	$\beta_3 = h_2$	$\beta_4 = h_1$	$\beta_5 = q_0$	$\rho c = \lambda/a$
1	<b>B</b> Même bruit pour $T_2^{exp}$ et $T_1^{exp}$	3	0.2588	0.0885	0.2326			0.3400
2	<b>B</b> sans bruit sur $T_1^{exp}$	3	0.2584	0.0882	0.2319			0.3395
3	<b>A1</b> avec hypothèse $h_1 = h_2$	3	0.274	0.0813	0.107			0.347
4	<b>A2</b> avec hypothèse $h_1 = h_2$	4	0.539	3.553	1.805		3.245	4.031
5	<b>A2</b>	5	0.539	3,553	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	3.245	4.031

## Caractère parcimonieux des modèles de transmittance (2 T mesurées)



Modèles à impédance ( $q$  connu/ $T_R$ )

$$n_{A1} = n_F + n_R + 2$$

Modèles à impédance ( $f(t)/T_R$ )

$$n_{A2} = n_{A1} = n_F + n_R + 2$$

Modèles à transmittance ( $T_F/T_R$ )

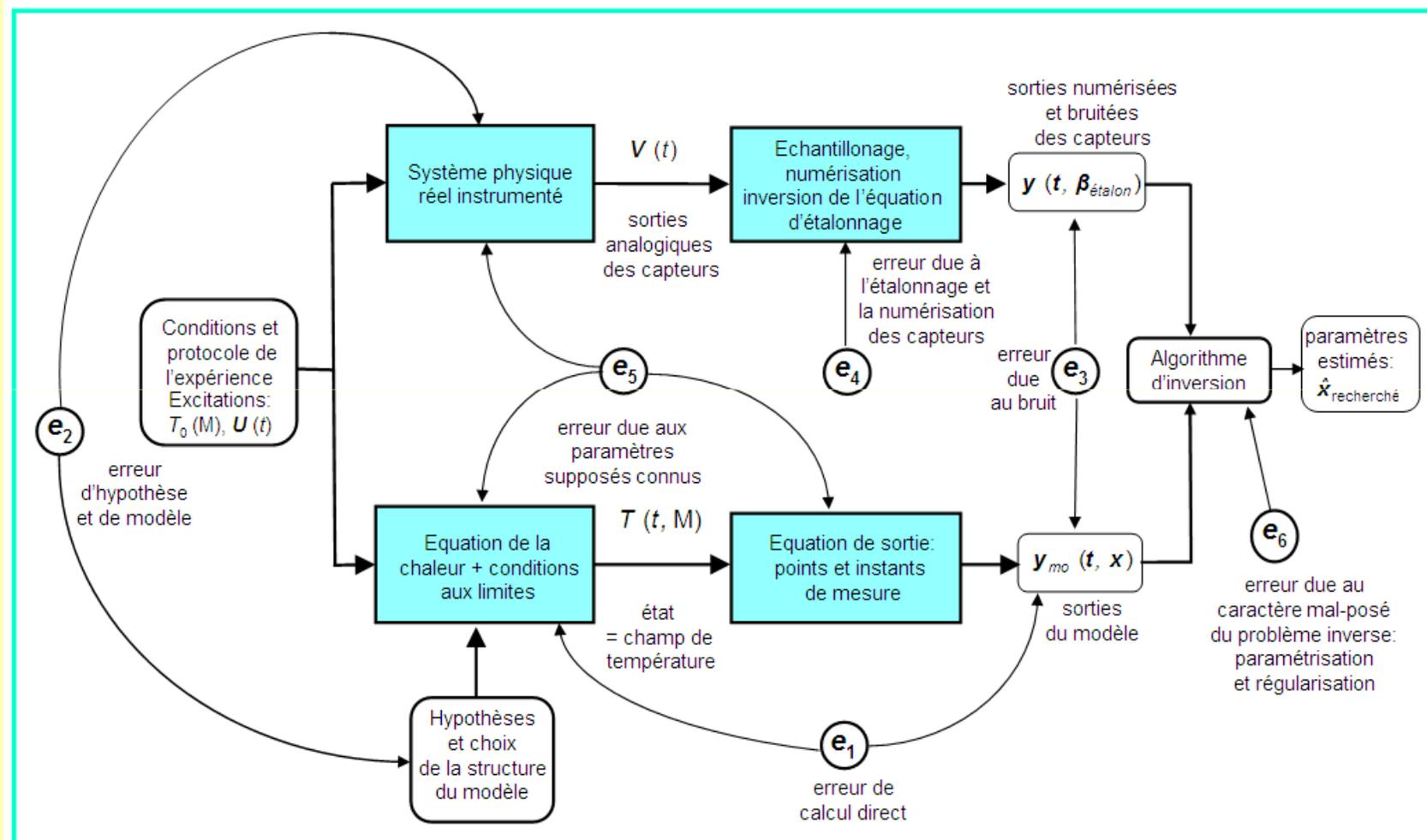
$$n_B = n_R + 1$$

Modèles Flux AV mesuré/ $T_R$

$$\bar{T}_2 = \bar{Z}'_2 \bar{\phi}$$

$$n_{A'} = n_R + 2$$

**Attention: l'erreur due au bruit n'est qu'une ( $e_3$ ) des 6 composantes\* de l'erreur d'estimation (il reste 5 causes de biais !)**



\* D. Mailet, Y. Jarny, D. Petit, Problèmes inverses en diffusion thermique, *Techniques de l'Ingénieur*, Paris, base documentaire: Génie Energétique 14 Dossiers BE 8265 (Modèles diffusifs, mesures et introduction à l'inversion), pp. 1- 54, 10 octobre 2010, BE 8266 (Formulation et résolution du problème des moindres carrés), pp. 1-46, janvier 2011, BE 8267 (Outils spécifiques de conduction inverse et de régularisation), pp. 1-24, octobre 2011.

## Conclusions

- modèles diffusifs utilisant la mesure de 2 températures liées par une transmittance (fonction de transfert) utilisables pour l'inversion:
  - bruit sur la pseudo « source » de température filtré par transmittance:
    - inversion non dégradée (écarts types stochastiques disponibles);
  - gros avantage/modèles source de puissance/réponse (transmittance):  
**paramètres de la source** et son **intensité** disparaissent: moins de paramètres (**parcimonie**)
    - dispersion des estimations ↗
  - NB: - comparaison **B/A1**: ce qui compte, c'est le nombre de paramètres à estimer.  
- dans modèles **A1** ou **A2**: hypothèses sur source (difficiles à vérifier)
  - difficulté: mesure de 2 températures SANS biais
- extension aux modèles advectifs possible (exemple: dispersion polluants en enceinte à ventilation contrôlée, capteurs virtuels, ...).

---

### Pour en savoir plus en inversion de mesures thermiques:

Proceeding of Eurotherm Seminar 94: Advanced Spring School « Thermal Measurements and Inverse Techniques », Roscoff, Brittany, France, June 13-18, 2011, free download a <http://www.sft.asso.fr/document.php?pagendx=12299&project=sft>.

O. Fudym, J.-C. Batsale, Introduction to linear least squares estimation and ill-posed problems for experimental data processing, in: H.R.B. Orlande, 15  
O. Fudym, D. Maillat, R. M. Cotta (Eds.), Thermal Measurements and Inverse Techniques, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2011, pp. 233-281