université de BORDEAUX

Méthodes inverses appliquées à la modélisation de l'ablation de tumeurs du foie par micro-ondes

Journée SFT

Jeudi 11 juin 2026

Ida Burgers, Mariana de Melo Antunes, Nino Avetikovi

Direction de thèse: J-L.Battaglia, V.Ozenne

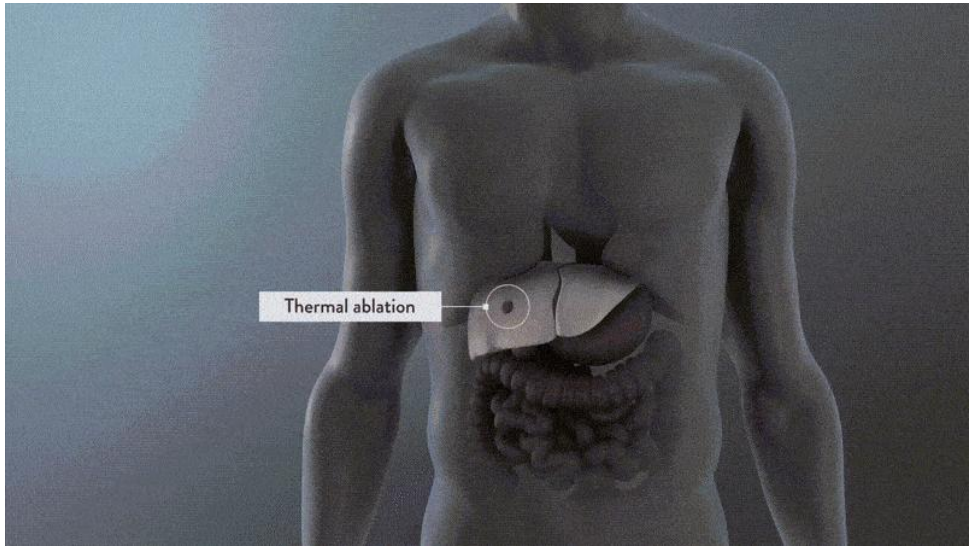
Institut de Mécanique et d'Ingénierie (I2M)

I2M BORDEAUX

Thermoablation de tumeurs par micro-ondes

Etape 1: Une sonde est insérée au centre de la tumeur sous guidage par IRM

Etape 2: La sonde chauffe le tissu jusqu'à atteindre une certaine température (60-100°C)



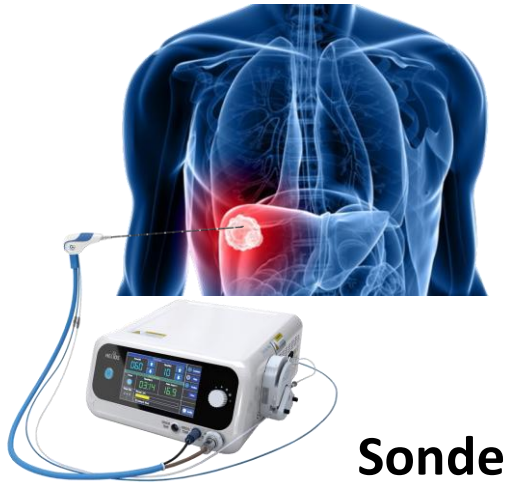
Bénéfices:

La chaleur se propage autour de la lésion de manière contrôlée et radiale

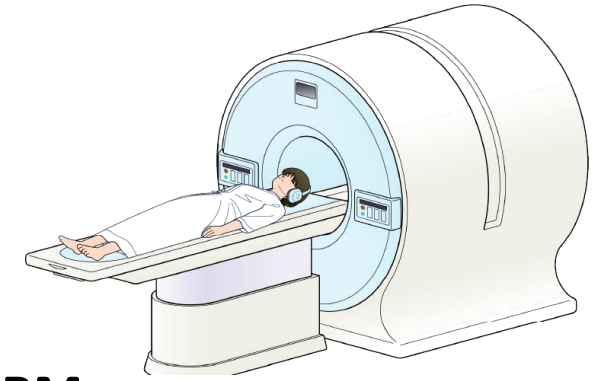
Destruction du tissu tumoral par nécrose thermique: >60°C

Alternative à une opération invasive: la tumeur est traitée sans ouvrir le patient

Thermométrie par IRM



Sonde



IRM

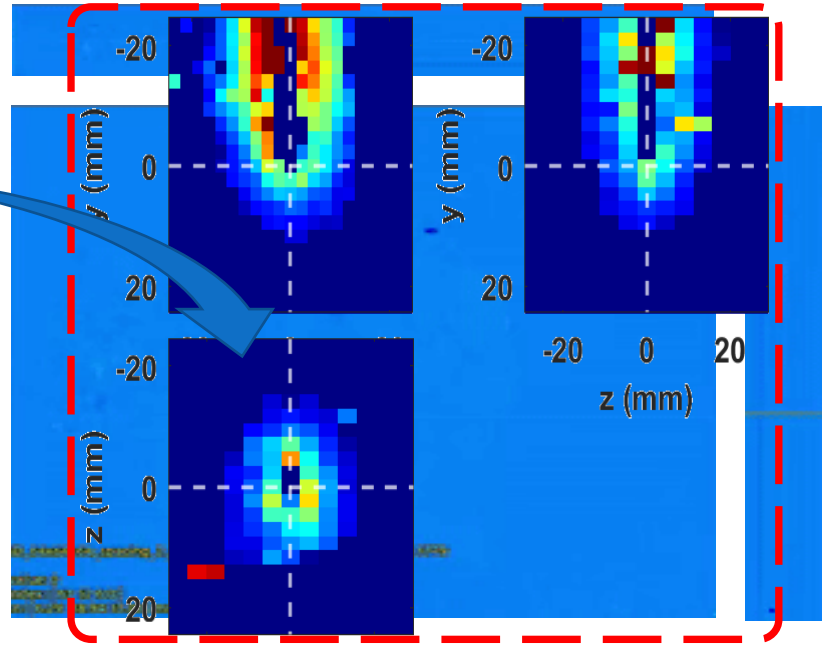


Image obtenue

Thermométrie en temps réel :
permet de contrôler la température durant toute la procédure

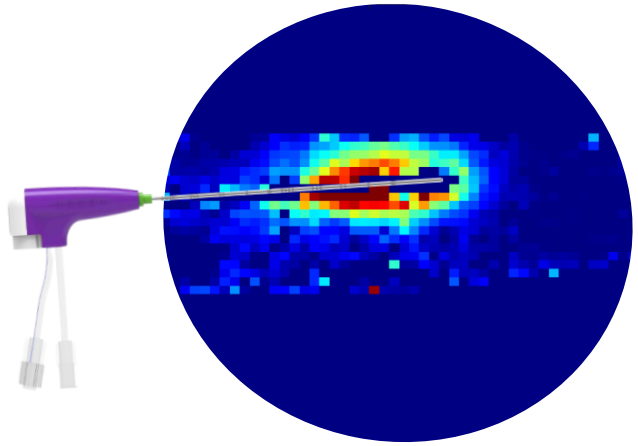
Autour de la sonde, il y a une perte d'information à cause des artefacts magnétiques: zone aveugle [2]

La température correspond à une moyenne dans chaque voxel, calculée par méthode PRFS[1] :

$$\Delta T = \frac{\phi(T) - \phi(T_{ref})}{\gamma \alpha \, B_0 T_E}$$

IRM = Imagerie par Résonnance Magnétique ; PRFS = Proton Resonance Frequency Shift

Limitations



Technologies d'ablation actuelles :15–30% des patients récidivent, surtout pour les tumeurs ⌀ ≥3 cm, en raison d'une couverture thermique incomplète [3]

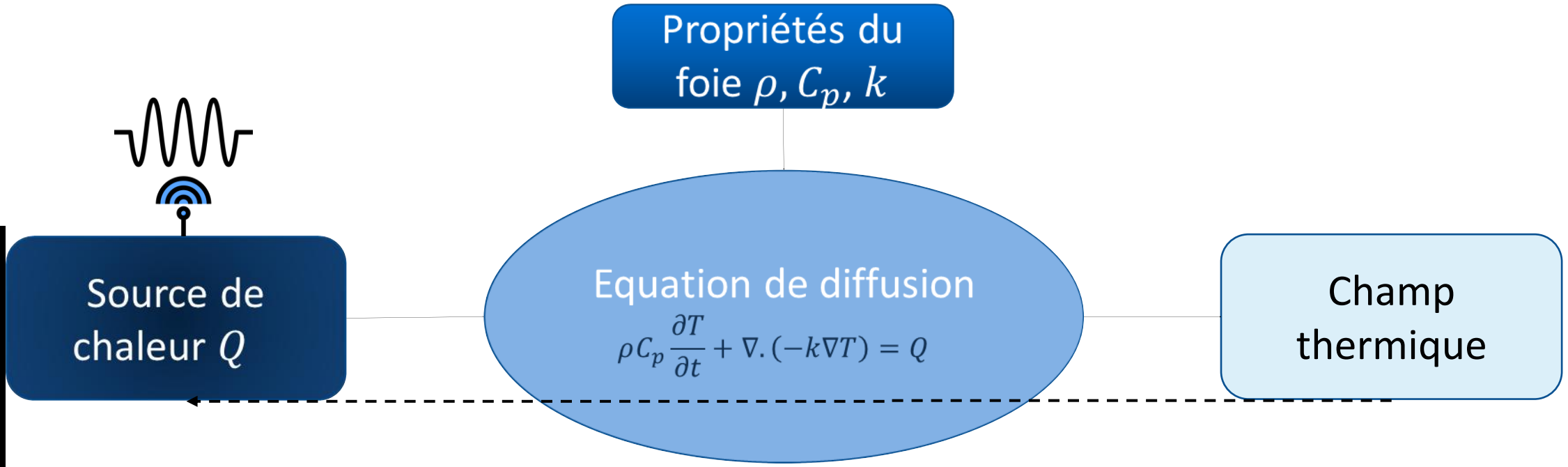
Thermométrie IRM : Les cliniciens ne voient ni les pics de température, ni la zone immédiatement autour de l'aiguille et la thermométrie a une limite autour de 100°C

Manque de prédiction fiable de la marge d'ablation : Difficile de garantir que toute l'extension pathologique soit couverte

Risque de sous-dosage ou surdosage thermique :
Sous-chauffer → récidive tumorale
Surchauffer → dommages au tissu sain

Modèle thermique

Un modèle thermique est essentiel pour anticiper la forme réelle de la lésion et prédire plus précisément la zone nécrosée avant ou pendant l'intervention



Problème Inverse

Objectifs, Hypothèses & Avantages

Objectif 1: Reconstruction super-résolue du champ de température lors d'une ablation de tumeur

Objectif 2: Contrôle du champ de température et de la source en temps réel

Hypothèses:

- Propriétés thermiques constantes
- conditions aux limites de Dirichlet
- Milieu homogène
- Modèle linéaire

Choix mathématiques:

- Passage en Laplace: permets le calcul instantané à n'importe quel instant sans nécessité de connaître les instants précédents
- Grille logarithmique: réduction du nombre de points
- Différences finies d'ordre 2 à pas variable: simple et rapide
- BICGSTAB: Bi gradient conjugué stabilisé; méthode de descente de gradient itérative rapide
- Interpolation barycentrique avec triangulation Delaunay
- Méthode de Beck + régularisation de Tikhonov: adapté au temps réel et robuste au bruit

Avantages:

- Méthode générale valable pour n'importe quel milieu homogène conducteur
- Implémentation simple et robuste
- Calcul du champ de température en temps réel
- Estimation de la source en temps réel

Méthode

Equation de diffusion

- Passage en Laplace: $\frac{\mathrm{p}}{\alpha}\boldsymbol{\theta} = \nabla^2\,\boldsymbol{\theta} + \frac{\boldsymbol{Q}_p}{k}$
- Grille logarithmique => Schéma différences finies à pas variable [4]

Système linéaire

- $\boldsymbol{A\theta} = \boldsymbol{b}$ Résolu par BICGSTAB [5]
- Laplace inverse (méthode de Stehfest [6]) : $\boldsymbol{\theta} \Rightarrow \boldsymbol{T}_{mesh} = \boldsymbol{XQ}$

Projection

- Projection sur réseau de voxels par interpolation barycentrique [7] :

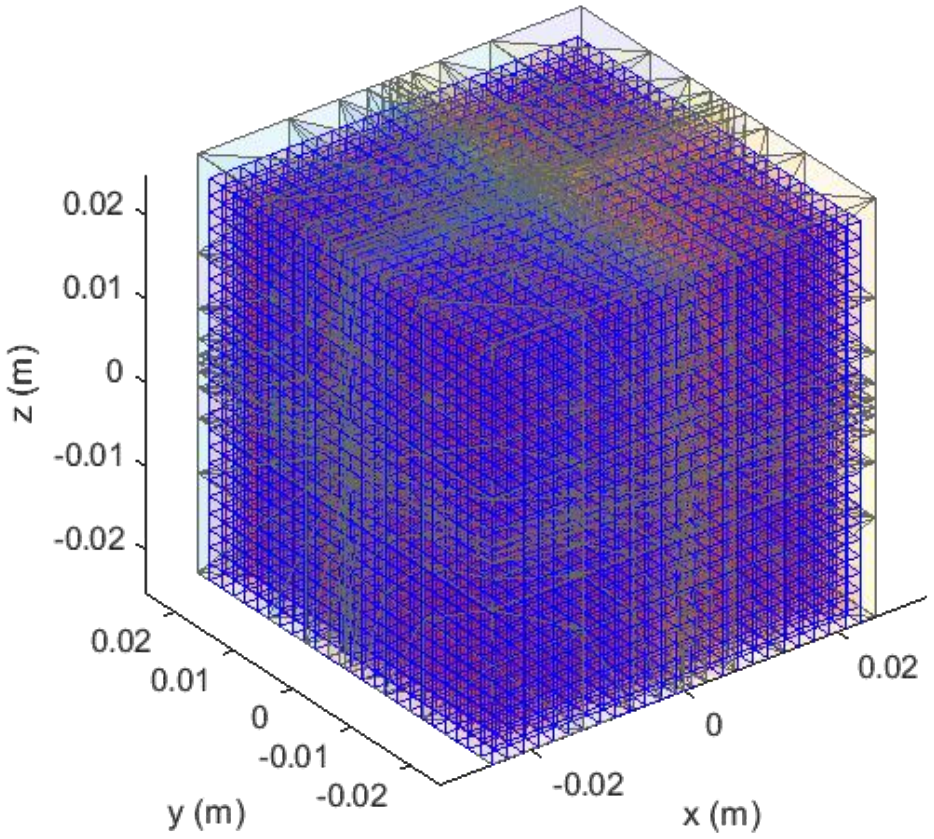
$$\boldsymbol{T}_{vox} = \boldsymbol{MT}_{mesh} = \boldsymbol{MXQ}\ ;\ \boldsymbol{y}_{true} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{T}_{vox})$$

Inversion

- Pour tester le modèle: $\boldsymbol{y}_{meas} = \boldsymbol{y}_{true} + \varepsilon = \boldsymbol{HQ} + \varepsilon; \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2\mathrm{I})$
- Estimation de $\boldsymbol{Q}$ par méthode des pas de temps futurs [8,9]

Grille log et superposition de réseau de voxels

Interpolation barycentrique sur triangulation Delaunay:



$$T_{vox} = MT_{mesh}$$

$$T_{vox} \in \mathbb{R}^{N_{vox} \times N_t}$$

$$M \in \mathbb{R}^{N_{vox} \times N_{nod}}$$

$$T_{mesh} \in \mathbb{R}^{N_{nod} \times N_t}$$

Bénéfices:

Réduire le nombre de points tout en maintenant une précision élevée

Vitesse de calcul très élevée sur un pc portable: <1s pour simuler 50s

Résolution plus élevée par rapport à la thermométrie IRM

Méthode séquentielle de Beck (ou méthode des pas de temps futurs)

Avec cette méthode on cherche à minimiser la fonction objectif (moindres carrés):

$$S(Q_m) = \sum_{i=0}^{r-1} [T_{m+i}^{mes} - T_{m+i}^{calc}(Q_m)]^2$$

On considère r pas de temps futurs pendant lesquels le flux Q est supposé constant (système surdimensionné):

$$Q_m = Q_{m+1} = \cdots = Q_{m+r-1}$$

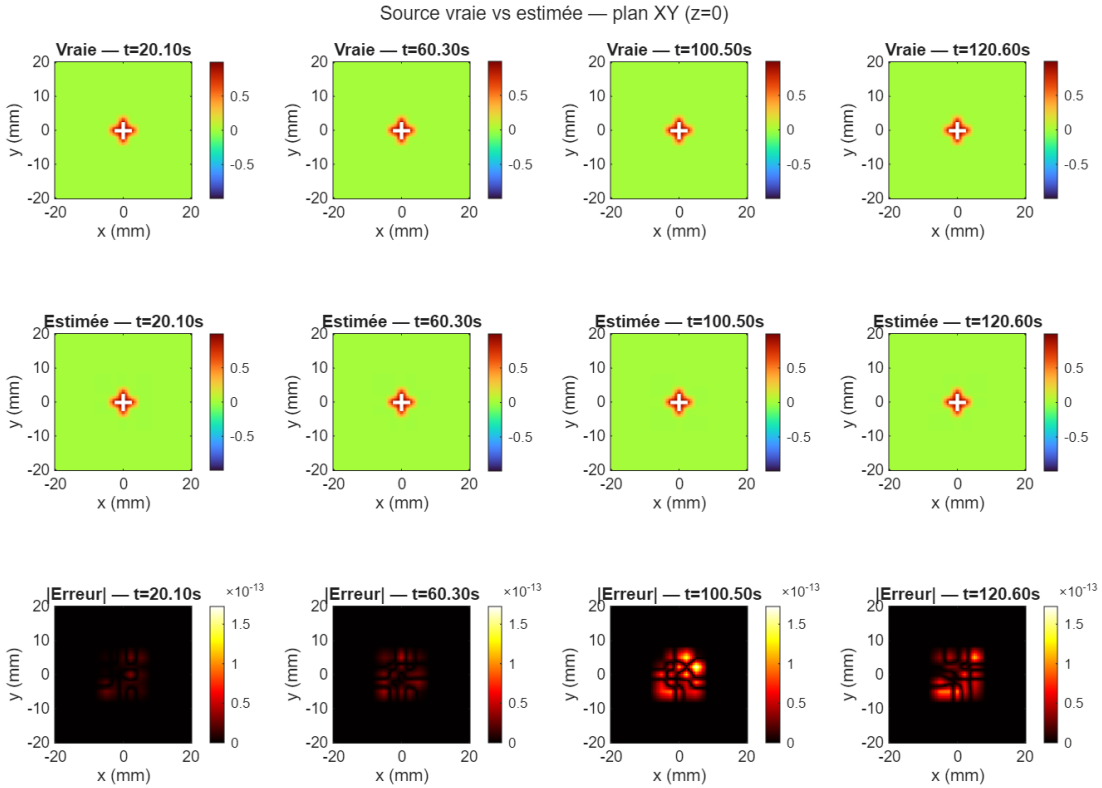
On utilise les températures des instants t_m à t_{m+r-1} pour estimer le flux à l'instant t_m:

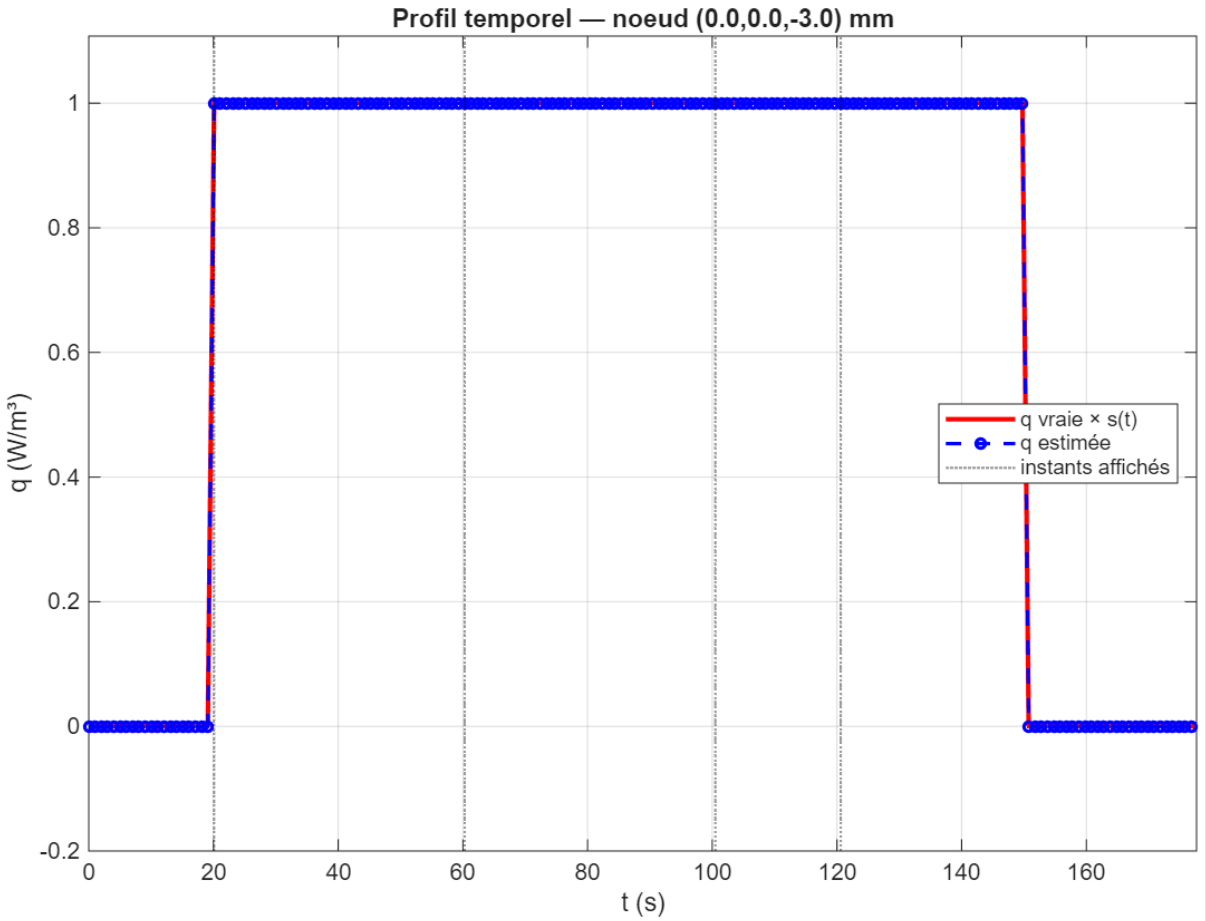
$$\widehat{Q}_m = \left(H^T H\right)^{-1} H^T Y$$

Avec:

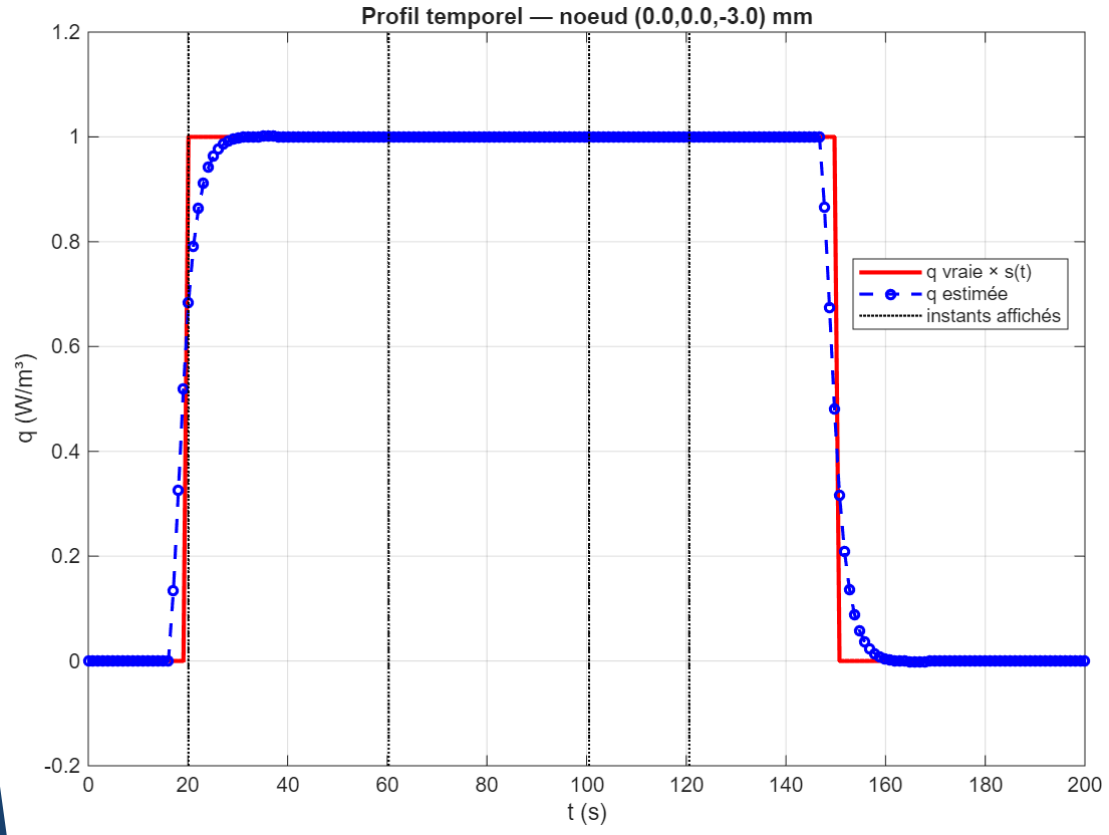
$$H = M \begin{bmatrix} X_m \\ X_{m+1} \\ \vdots \\ X_{m+r-1} \end{bmatrix} \text{ et } Y = \begin{bmatrix} T_m^{mes} - T_m^{calc} \\ T_{m+1}^{mes} - T_{m+1}^{calc} \\ \vdots \\ T_{m+r-1}^{mes} - T_{m+r-1}^{calc} \end{bmatrix}$$

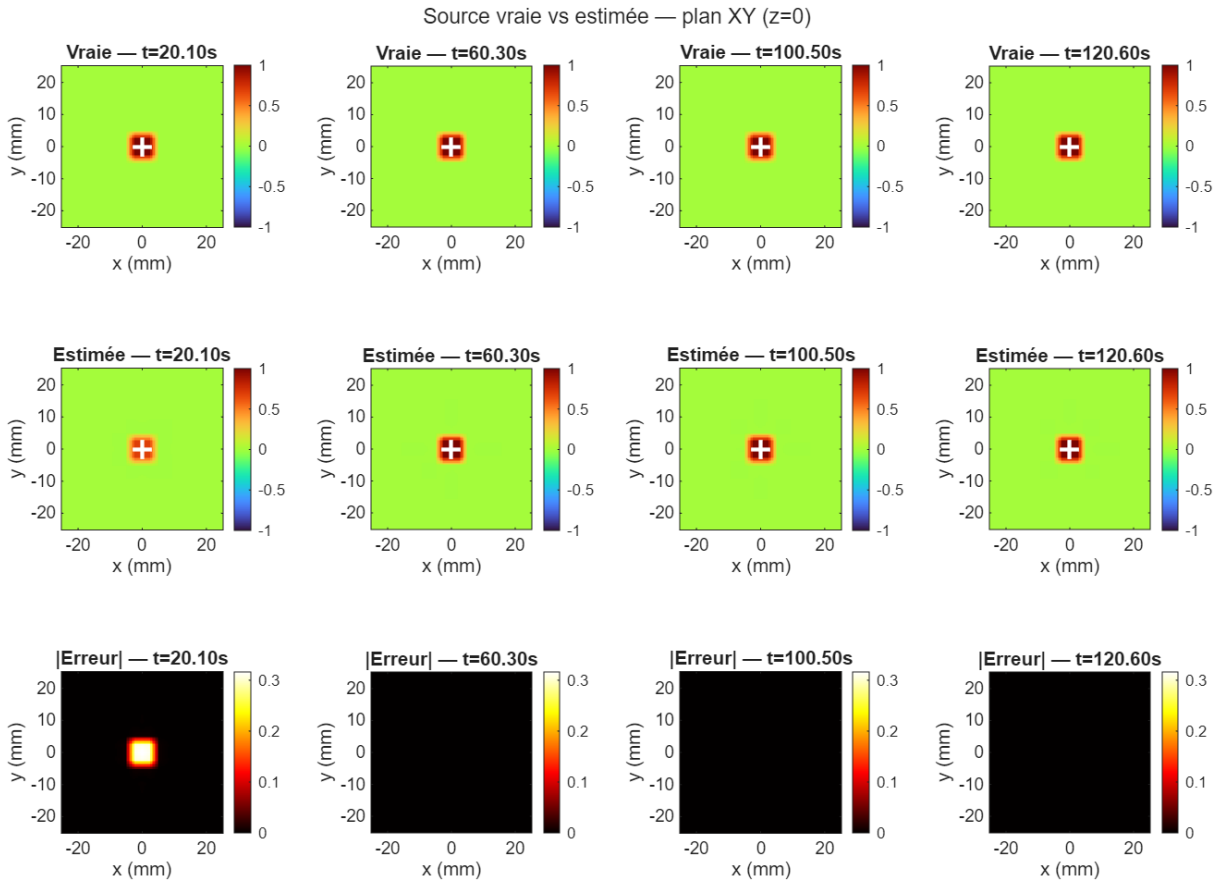
Vérification sans bruit, inversion classique



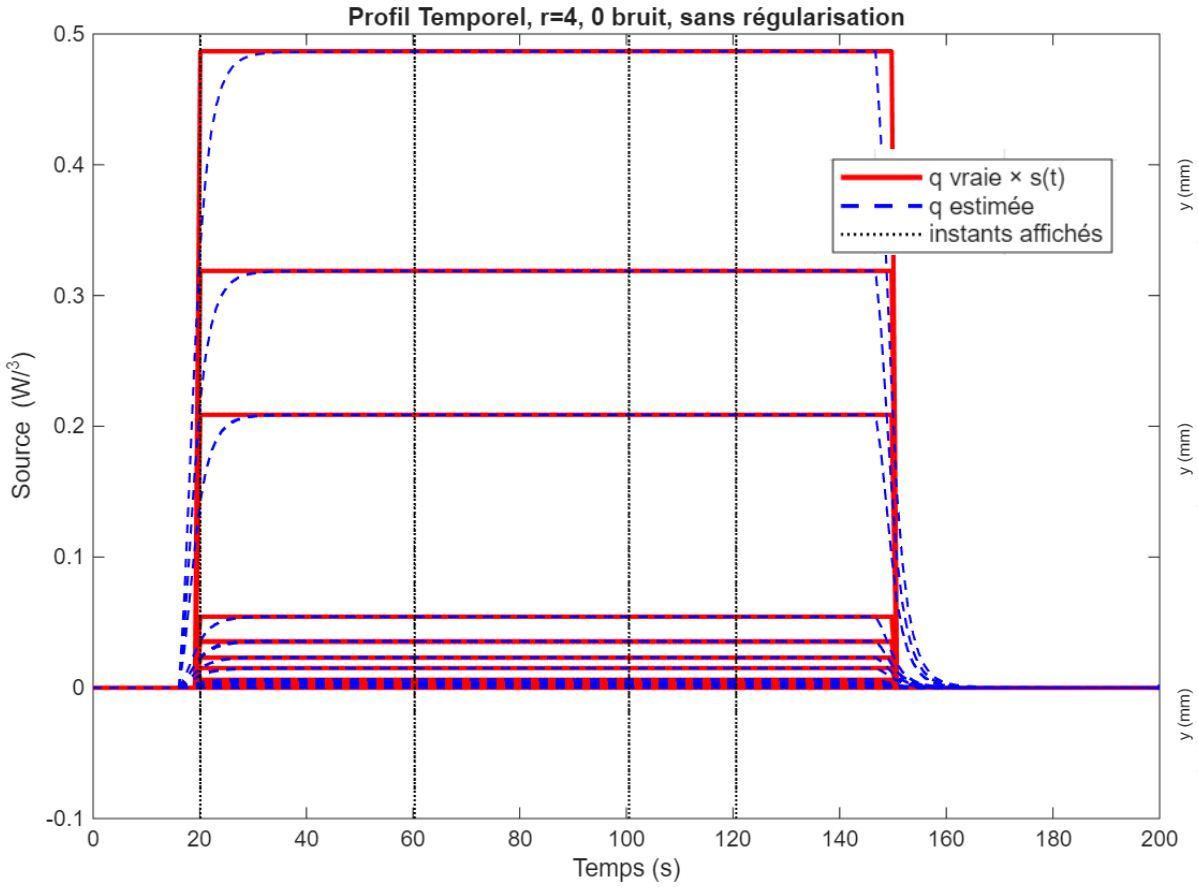


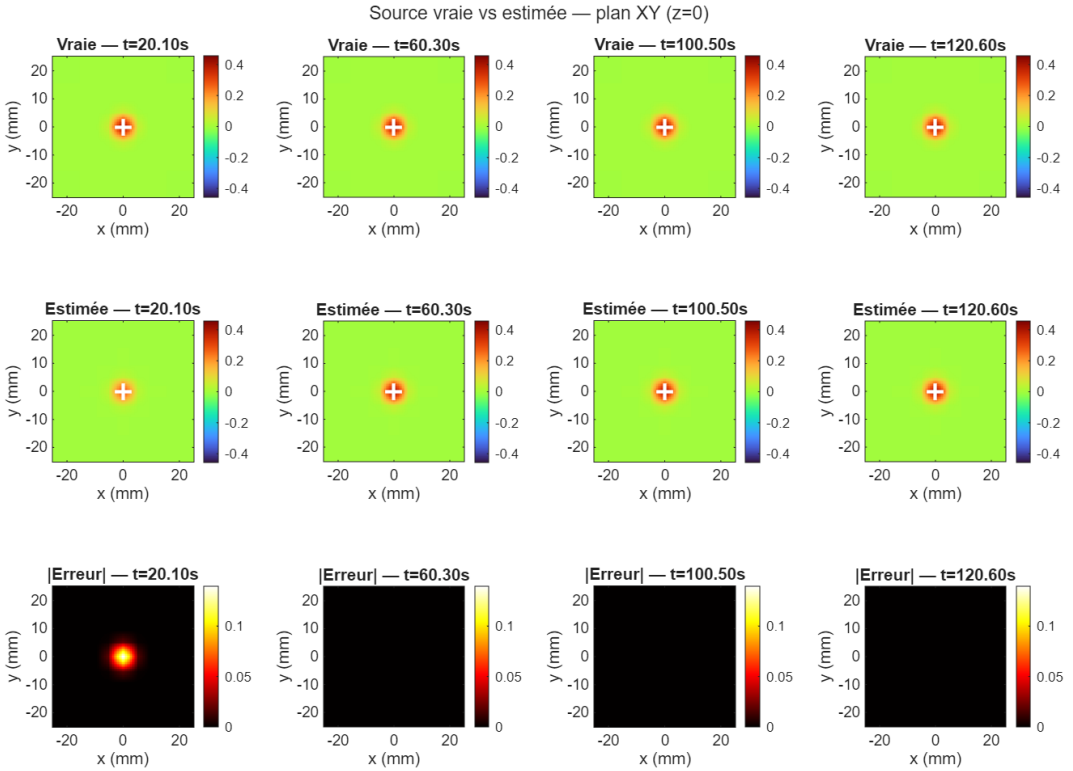
Pas de bruit, r=4





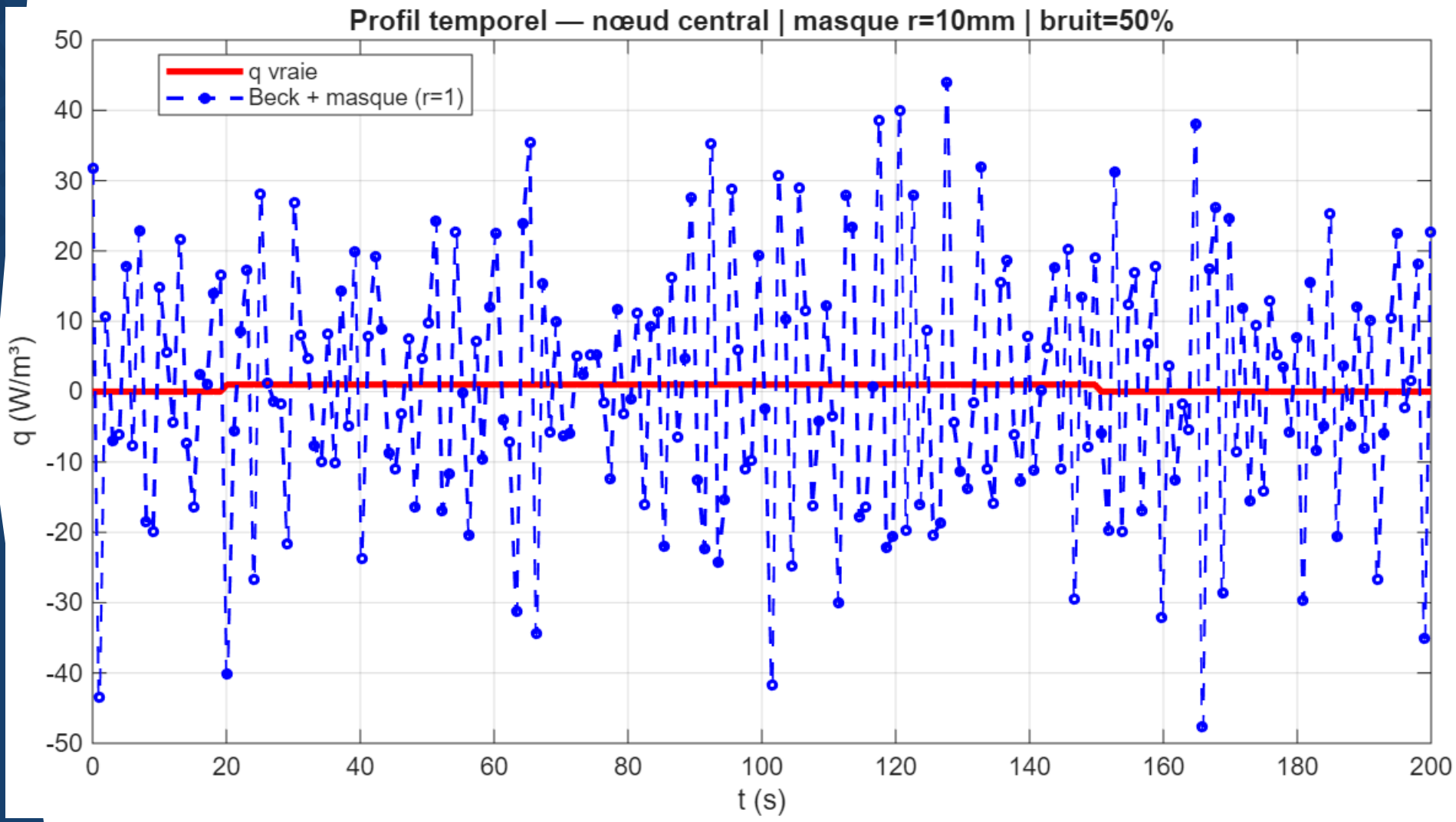
Ici la source est de type $A*\exp(-d^2/2\sigma^2)$ $d^2=dx^2+dy^2+dz^2$; σ=rayon/2





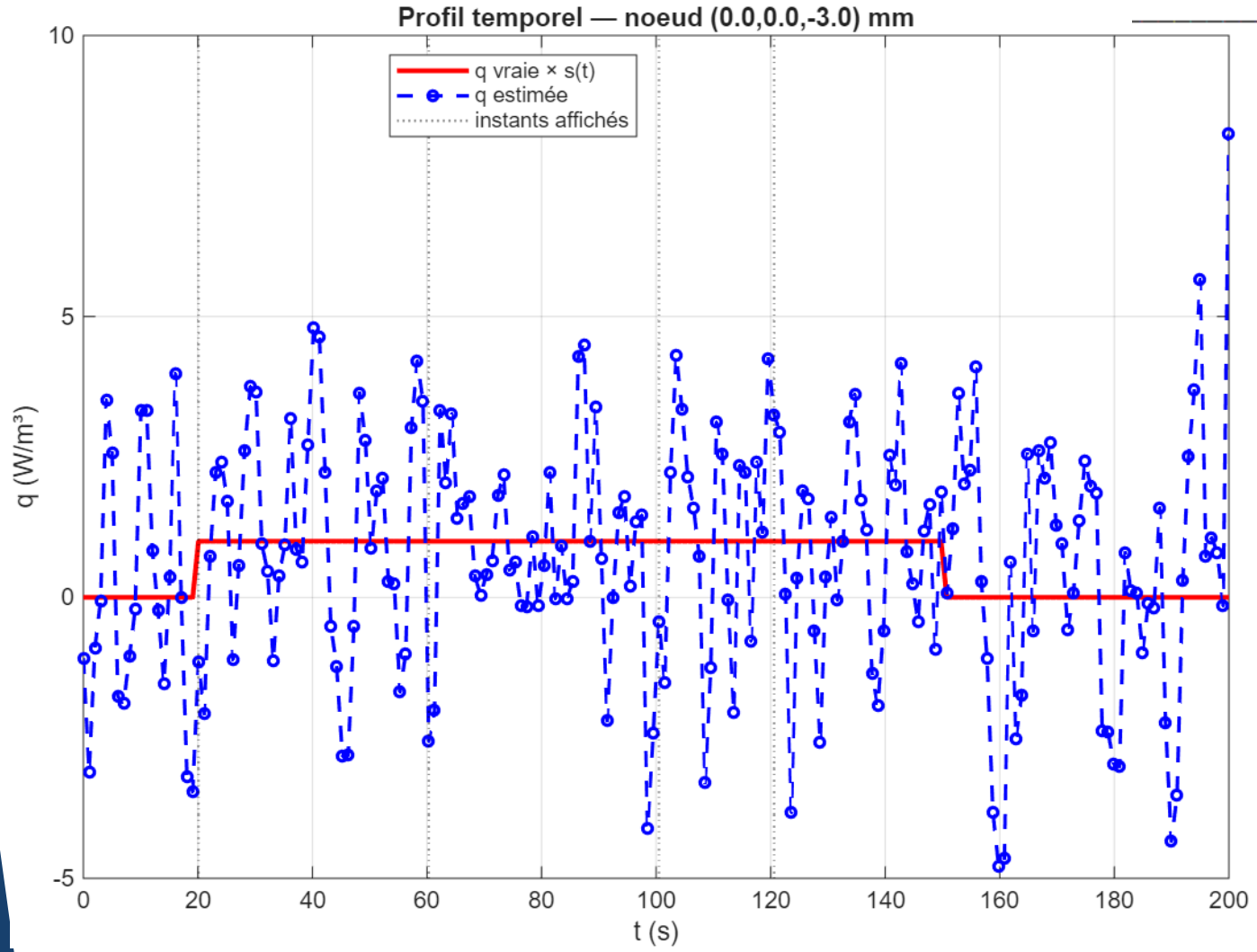
r=1, 50% de bruit

```
— Erreurs relatives par instant ————————————————
  t= 20.10s : 6955.09%
  t= 60.30s : 7376.51%
  t=100.50s : 7810.54%
  t=120.60s : 7678.71%
  Erreur temporelle au centre : 2251.23%
————————————————————————————————————————————
```



r=4, 50% de bruit

```
— Erreurs relatives par instant ————————————
  t= 20.10s : 898.58%
  t= 60.30s : 650.55%
  t=100.50s : 670.47%
  t=120.60s : 578.84%
  Erreur temporelle au centre : 267.57%
————————————————————————————————————————————
```



Régularisation de Tikhonov (ordre 1)

La méthode de Beck ne suffit pas lorsqu'il y a beaucoup de bruit.

Il est donc nécessaire de régulariser, l'expression de la source estimée devient :

$$\widehat{Q}_m = \left(H^T H + \mu_1 L_1\right)^{-1} H^T Y$$

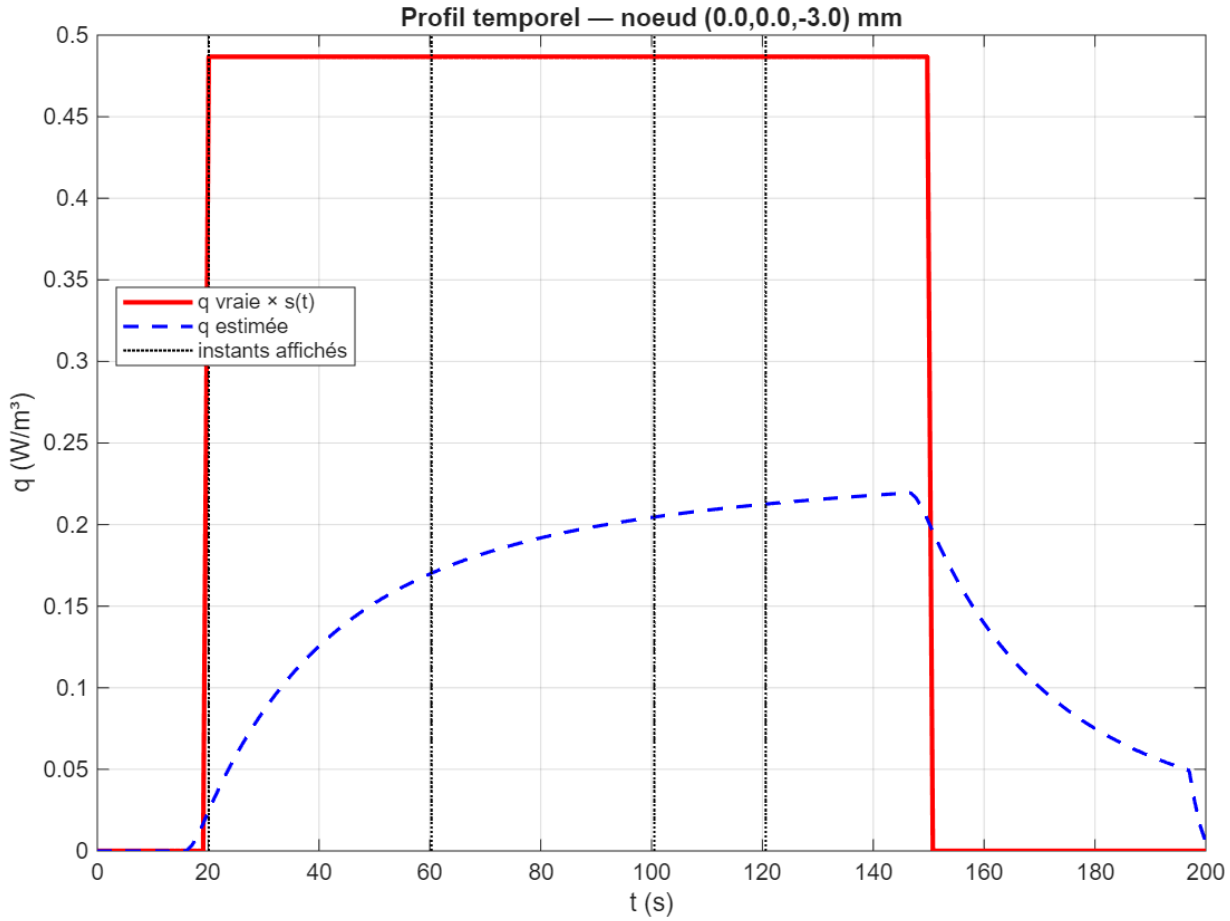
Le paramètre de régularisation μ_1 est trouvé via L-curve:

- On trace la L-curve (en échelle log) qui est la norme de la solution régularisée en fonction de la norme du résidu pour différentes valeurs de μ_1

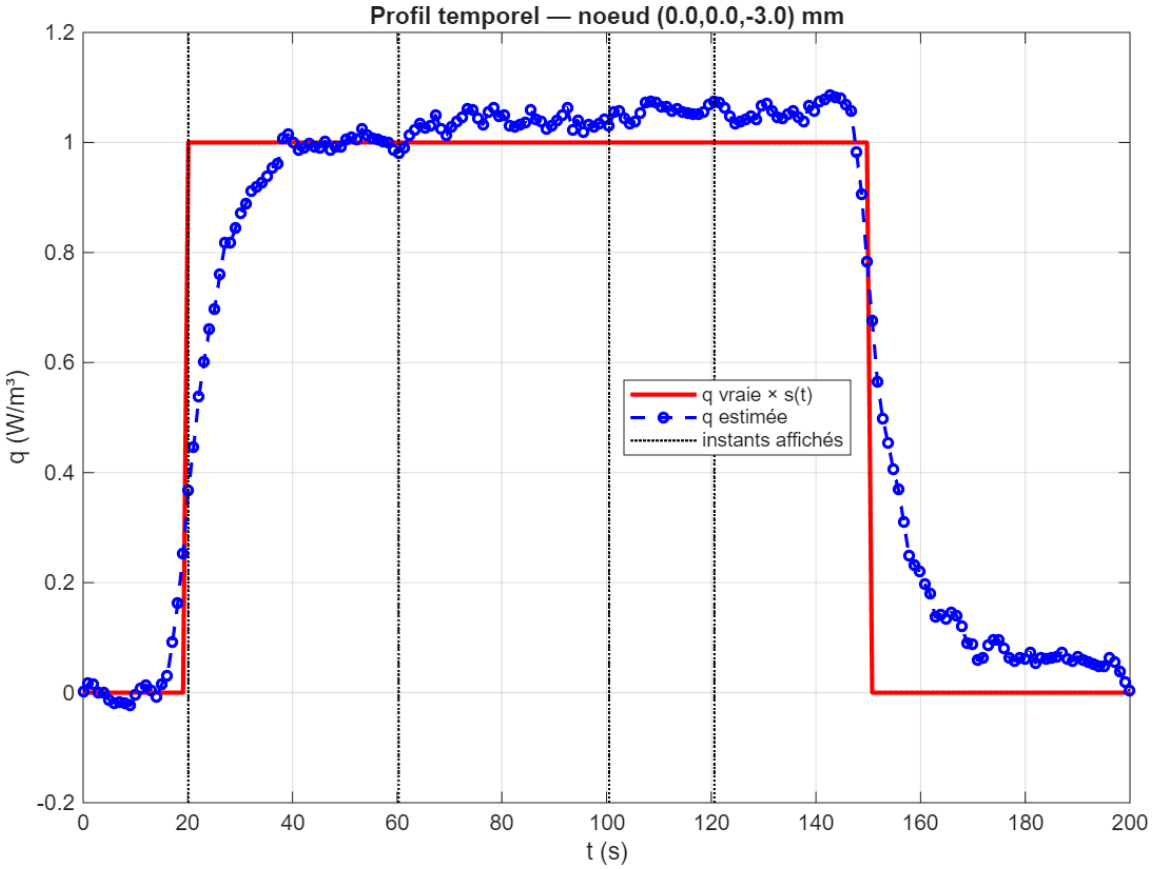
- Le paramètre optimal μ_1 est choisi au point de courbure maximale de la L-curve, correspondant au meilleur compromis entre la minimisation du résidu et la stabilité de la solution

Sans bruit mais avec régularisation

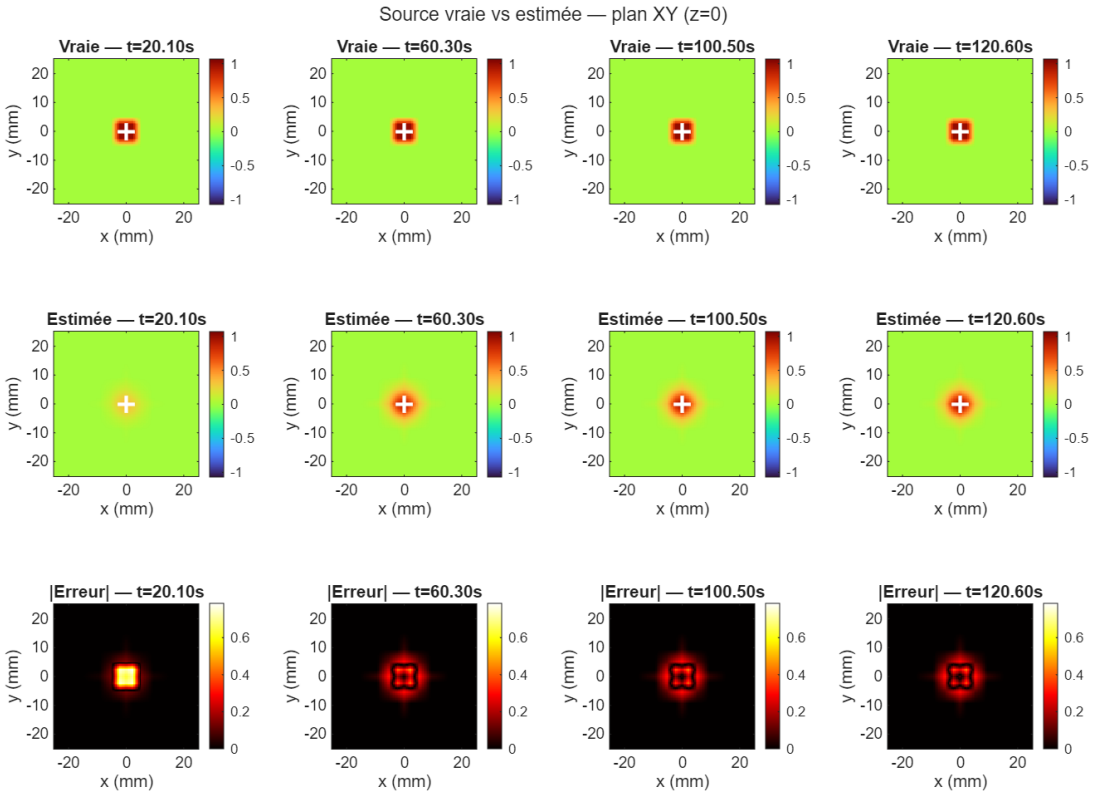
On observe que la régularisation introduit un biais



r=4, 50% bruit, régularisation Tikhonov ordre 1



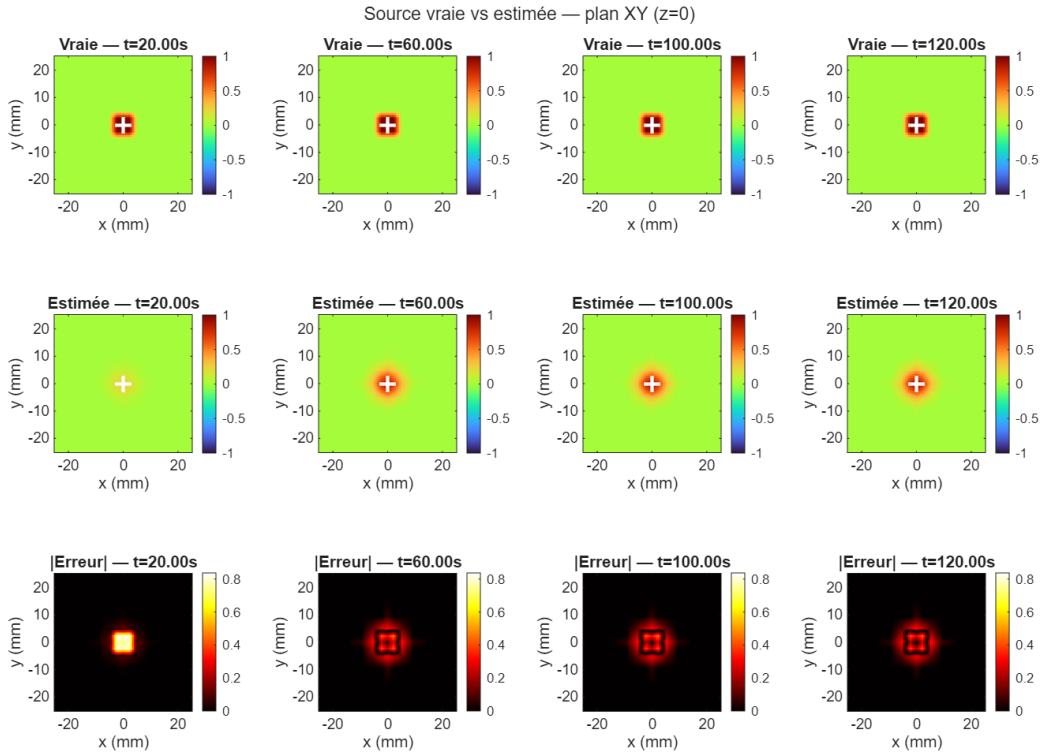

```
── Erreurs relatives par instant ──────────────────────
  t= 20.10s : 70.12%
  t= 60.30s : 40.23%
  t=100.50s : 38.56%
  t=120.60s : 37.77%
  Erreur temporelle au centre : 17.52%
──────────────────────────────────────────────────────
```



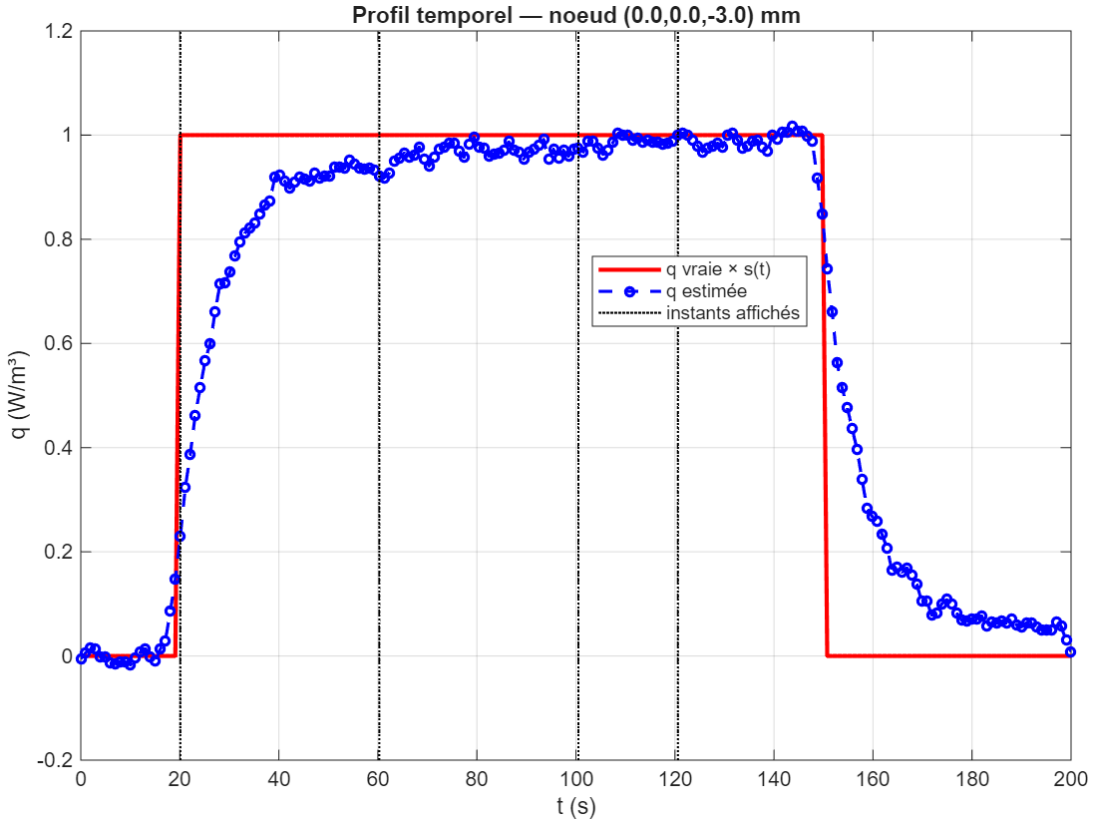
r=3 50%noise

Le choix du nombre de pas de temps futurs r est essentiel:

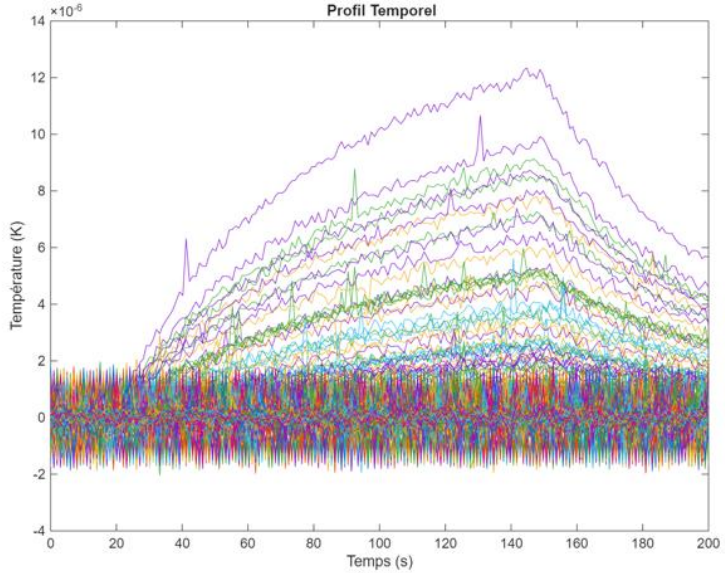
Plus r est grand, plus l'estimation est stable vis-à-vis du bruit, mais moins elle est réactive aux variations rapides du flux

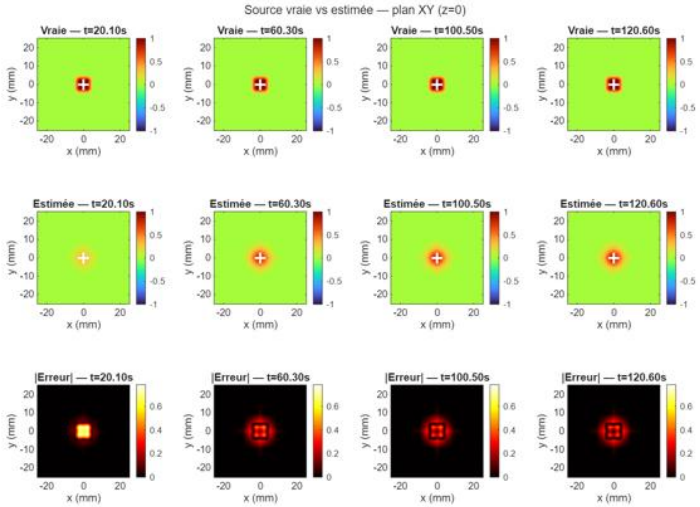



```
— Erreurs relatives par instant ————————————————————
  t= 20.00s : 78.28%
  t= 60.00s : 41.79%
  t=100.00s : 40.37%
  t=120.00s : 39.88%
  Erreur temporelle au centre : 22.03%
————————————————————————————————————————————————————
```



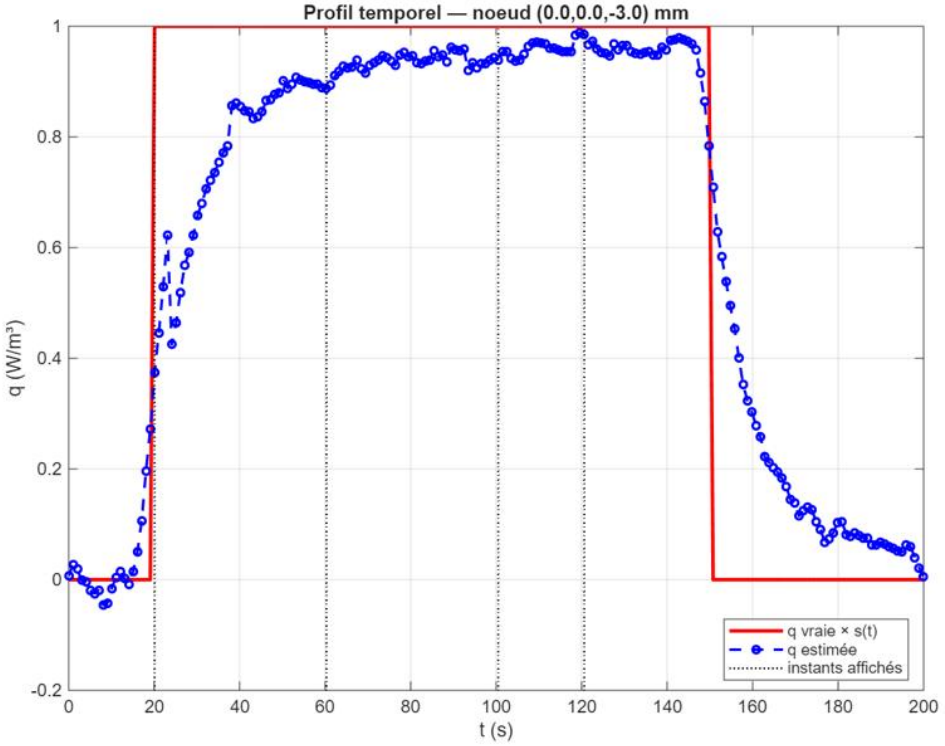
r=4, bruit gaussien 50% + pics ponctuels



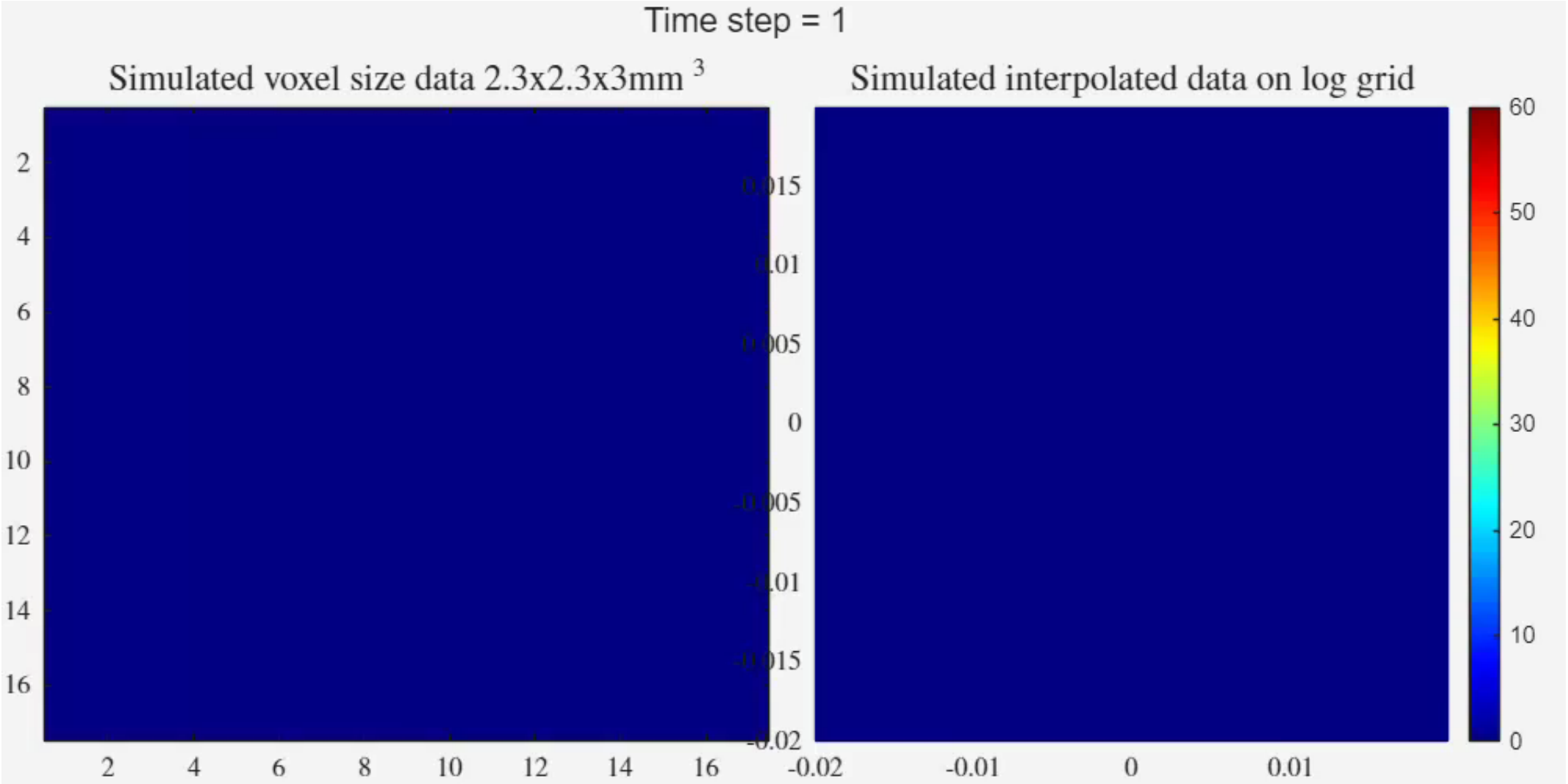



```
— Erreurs relatives globales ————————————
  Beck + masque + continuité (r=4)  : 59.10 %
————————————————————————————————————————

— Erreurs relatives par instant ——————————
  t= 20.10s : 69.75%
  t= 60.30s : 42.84%
  t=100.50s : 41.38%
  t=120.60s : 40.87%
  Erreur temporelle au centre : 23.07%
————————————————————————————————————————
```



Reconstruction super résolue



Conclusion et perspectives

Le modèle thermique reproduit précisément la procédure de thermoablation

→ **Résolution plus élevée par rapport à la thermométrie IRM** ✓

Vitesse de calcul de température très élevée: ≃ 2s pour simuler 200s

Vitesse de l'inversion pour estimation de la source rapide: ≃ 10s pour 200s

→ **Calcul en temps réel** ✓

Perspectives:

Trouver la corrélation entre nombre de pas de temps futurs et paramètre(s) de régularisation en fonction du bruit

Utiliser les données de thermométrie réelles pour estimer la source et tester le modèle

I2M BORDEAUX

Journée SFT
Méthodes Inverses

Jeudi 11 juin 2026

Merci

université de BORDEAUX

Références

- [1] **Ishihara et Al (1995).** *A precise and fast temperature mapping using water proton chemical shift. Magnetic Resonance in Medicine*, **34**(6), 814–823
- [2] **Ladd ME, Erhart P, Debatin JF, Romanowski BJ, Boesiger P, McKinnon GC. "Biopsy needle susceptibility artifacts."** *Magnetic Resonance in Medicine*, 1996;36(4):646–651
- [3] **Simo KA, Elias SG, Berger NG, Jarnagin WR, Kingham TP, D'Angelica MI, et al**. *Long-term outcomes following microwave ablation for liver malignancies.* Br J Surg**.** 2014;102(1):85–91
- [4] **LeVeque, R. J.,** Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, doi:10.1137/1.9780898717839 (2007)
- [5] **van der Vorst, H. A.,** "Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems", SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 13(2), pp. 631–644, doi:10.1137/0913035, Available at https://doi.org/10.1137/0913035 (1992).
- [6] **Stehfest, H. (1970).** *Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms [D5].* Communications of the ACM, 13(1), 47–49.DOI: 10.1145/361953.361969
- [7] **Berrut, J.-P. and Trefethen, L. N.,** "Barycentric Lagrange Interpolation", SIAM Review, 46(3), pp. 501517,doi:10.1137/S0036144502417715 (2004)
- [8] **Beck, J. V., Blackwell, B. and Jr**., C. R. S. C., Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, Wiley-Interscience (1985).
- [9] **Tikhonov, A. N. (1963)** *Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method* Soviet Mathematics Doklady, 4, 1035–1038.

Construction de la matrice H_{blk}

On utilise un index global $h = 1, \dots, N_{nod}$:

$$h = i + (j-1)N_x + (k-1)N_xN_y$$

Température aux nœuds du maillage logarithmique:

$$\boldsymbol{T_{mesh}} = \boldsymbol{XQ}$$

$$\boldsymbol{T_{mesh}} \in \mathbb{R}^{N_{nod} \times N_t}$$
$$\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{N_{nod} \times N_{nod}}$$
$$\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{N_{nod} \times N_t}$$

Température aux voxels:

$$\boldsymbol{T_{vox}} = \boldsymbol{MT_{mesh}}$$

$$\boldsymbol{T_{vox}} \in \mathbb{R}^{N_{vox} \times N_t}$$
$$\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{N_{vox} \times N_{nod}}$$

Elément de la matrice de passage $\boldsymbol{M}$ (avec $v = 1, \dots, N_{vox}$):

$$M(v,h) = \frac{1}{N_q} \sum_{q=1}^{N_q} \sum_{k=1}^{4} \lambda_k(q) \mathbf{1}_{\{h = n_{k,\Gamma}\}}$$

Vectorisation des températures aux voxels:

$$\boldsymbol{y_{true}} = \begin{bmatrix} T_{\text{vox}}(1,t_1) \\ \vdots \\ T_{\text{vox}}(N_{vox},t_1) \\ \vdots \\ T_{\text{vox}}(1,t_{N_t}) \\ \vdots \\ T_{\text{vox}}(N_{vox},t_{N_t}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{HQ}, \qquad \boldsymbol{y_{true}} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad m = N_{vox} \times N_t,$$
$$\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{N_{vox} \times N_{nod}}$$

$h^{ième}$ colonne de la matrice par blocs $\boldsymbol{H_{blk}}$:

$$\boldsymbol{H_{blk}}(ii,h) = \begin{bmatrix} H^{(t_1)}(1,h) \\ \vdots \\ H^{(t_1)}(N_{vox},h) \\ \vdots \\ H^{(t_{N_t})}(1,h) \\ \vdots \\ H^{(t_{N_t})}(N_{vox},h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} X^{(t_1)}(1,h) \\ \vdots \\ X^{(t_1)}(N_{\text{nod}},h) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} X^{(t_{N_t})}(1,h) \\ \vdots \\ X^{(t_{N_t})}(N_{nod},h) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \qquad \text{avec } ii = 1, \dots, m$$

$$\boldsymbol{H_{blk}} \in \mathbb{R}^{m \times N_{nod}}$$

Estimation de la source

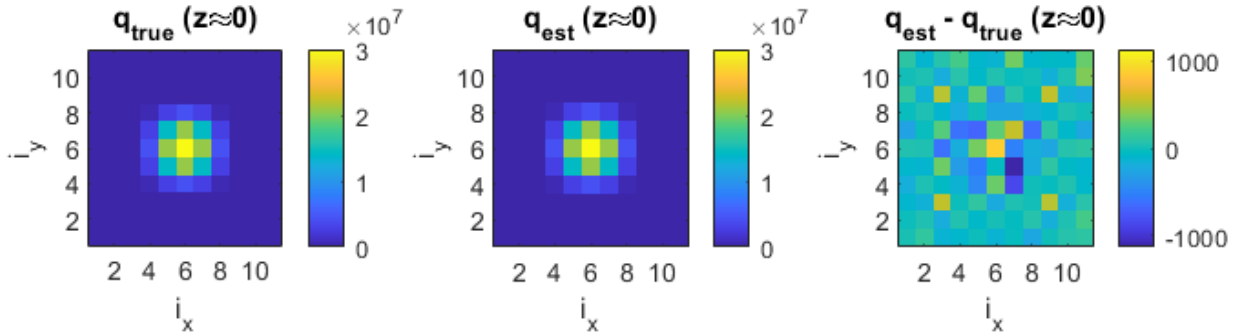
$$Q_{\text{true}}(h,t) = Q_0 \exp \frac{-(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}{2\left(\frac{r}{2}\right)^2} \Pi$$

On considère que: $\boldsymbol{y_{meas}} = \boldsymbol{y_{true}} + \varepsilon = \boldsymbol{HQ} + \varepsilon,\ \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_m)$

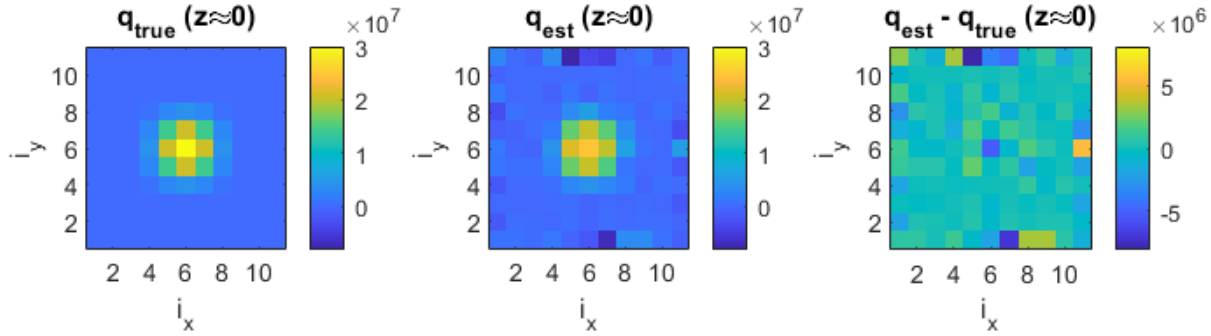
On estime la source aux nœuds de la grille logarithmique à partir des températures aux voxels avec la méthode des pas de temps futurs de Beck:

$$\hat{\boldsymbol{Q}}(h,t) = \sum_{j=t}^{t+s} (\boldsymbol{H}^{(j)}(k,h)^\top \boldsymbol{H}^{(j)}(k,h))^{-1} \sum_{j=t}^{t+s} (\boldsymbol{H}^{(j)}(k,h)^\top \boldsymbol{y_{meas}}(j)), \qquad k = 1, \ldots, N_{vox}$$

Sans bruit:



Avec 5% bruit:



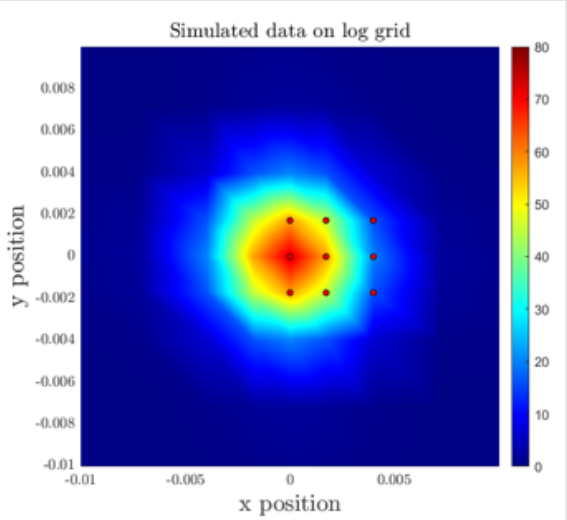
On choisit s pas de temps pour estimer $\hat{Q}(t)$

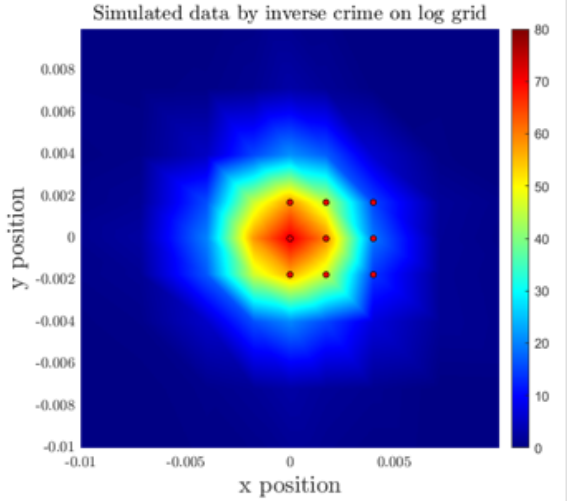
Bénéfices:

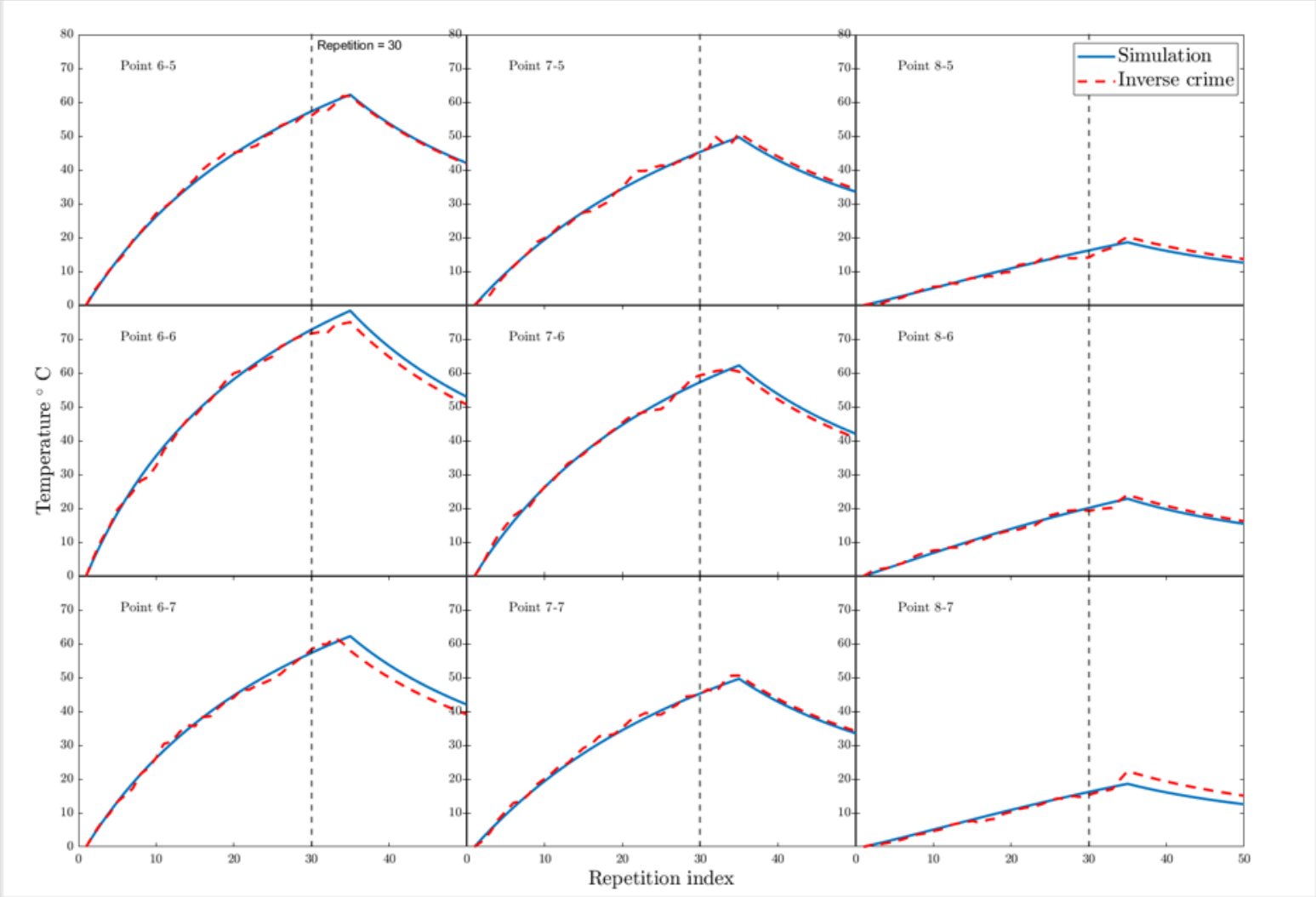
Inversion simple avec la méthode des moindres carrés

Pas de régularisation nécessaire car la méthode réduit implicitement l'instabilité

Vérification par crime inverse avec 5% de ~~bruit~~







BICGSTAB

Résout de manières itérative de grands systèmes creux et non symétriques: Ax=b

Basé sur la méthode de descente de gradient (BICG) et introduit un terme de stabilisation supplémentaire

Stabilisateur: lissage polynomial qui réduit les oscillations de la norme du résidu

Sous-espaces de Krylov avec courtes récurrences pour générer de nouvelles directions de recherche

Contrairement à GMRES, pas besoin de stocker tous les vecteurs, seulement quelques indispensables : Beaucoup plus rapide

B. BICGSTAB ALGORITHM

B.1 Objective Solve linear system $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ where $\boldsymbol{A}$ is a square, non symmetric matrix and $\boldsymbol{b}$ a vector.

B.2 Inputs

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: System matrix
- $b \in \mathbb{R}^n$: right-hand side vector
- x_0 : initial approximation (or initial guess)
- ε : residual tolerance
- $N_{\max}$: maximum number of iterations

B.3 Initialization

$r_0 = b - Ax_0$ (Initial residual)
$\hat{r}_0 = r_0$ (test vector)
$\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$
$v_0 = p_0 = 0$
$x = x_0$

B.4 Loop for $k = 1$ to $N_{\max}$

1. Evaluate $\rho_k = \hat{r}_0^T r_{k-1}$
2. **If** $\rho_k = 0$: quit (failure)
3. **Else** $\beta = \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} \cdot \frac{\alpha}{\omega_{k-1}}$ Update
4. $p_k = r_{k-1} + \beta(p_{k-1} - \omega_{k-1} v_{k-1})$ Search direction
5. $v_k = Ap_k$
6. $\alpha = \frac{\rho_k}{\hat{r}_0^T v_k}$ Step size
7. $s_k = r_{k-1} - \alpha v_k$ Intermediate residual
8. **If** $\|s_k\| < \varepsilon$:
   - $x = x + \alpha p_k$ Estimation of the solution
   - **Quit** : reached convergence
9. **Else** $t_k = As_k$
10. $\omega_k = \frac{t_k^T s_k}{t_k^T t_k}$ Stabilization coefficient
11. $x = x + \alpha p_k + \omega_k s_k$ New estimation of the solution
12. $r_k = s_k - \omega_k t_k$
13. **If** $\|r_k\| < \varepsilon$: **Quit** (convergence)

B.5 Outputs

- Vector x : approximation of the solution
- Residual $\|Ax - b\|$
- Number of iterations, indication of success or failure