



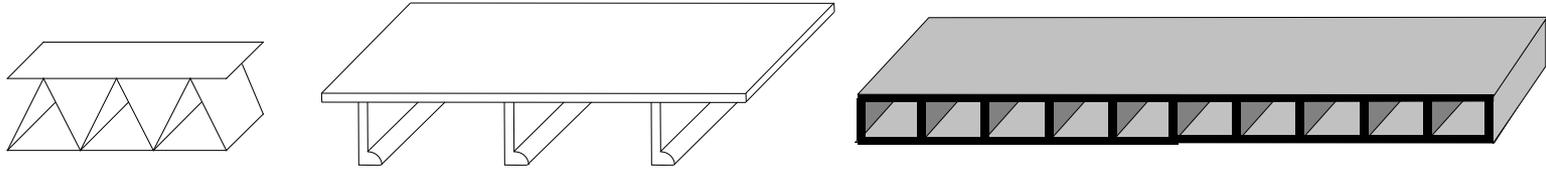
# *Homogénéisation de Structures Minces Périodiques et Effets de Bords*

Patrice CARTRAUD

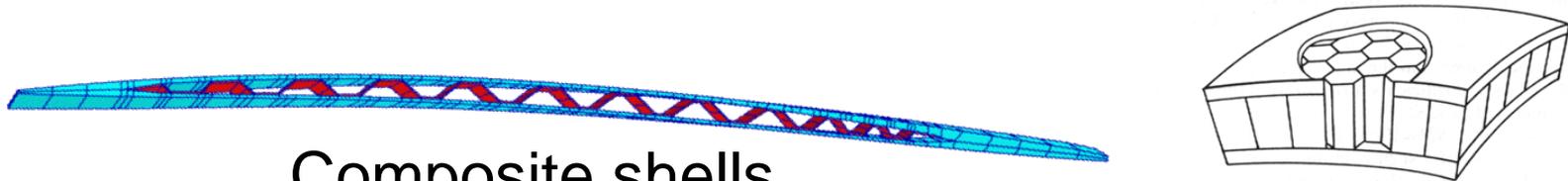
GÉM - Institut de Recherches en Génie Civil et Mécanique  
Ecole Centrale de Nantes

patrice.cartraud@ec-nantes.fr

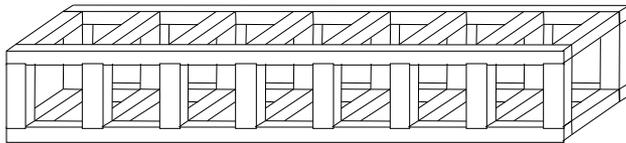
- 1) Introduction
- 2) Modèle asymptotique du 1<sup>er</sup> ordre
- 3) Modèle asymptotique d'ordre supérieur et effets de bords
- 4) Exemples d'application
- 5) Conclusion



Reinforced plates, sandwich panels



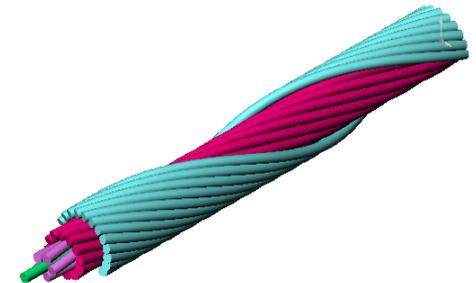
Composite shells



Reticulated structures



Composite beams

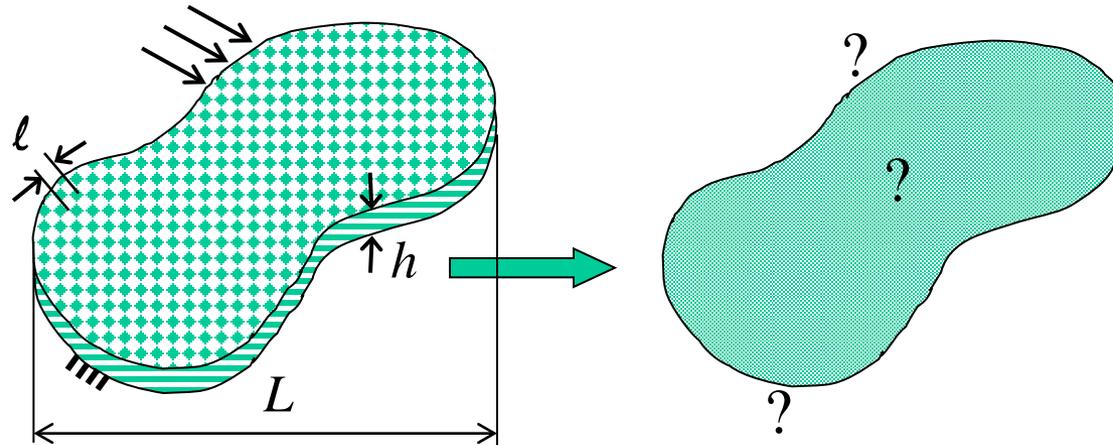


Cables

Objective : propose simplified models

- Structures périodiques (minces)
- HPP, élasticité

Existence de plusieurs  
**petits paramètres** :  $e = h/\ell$ ,  $\varepsilon = L/\ell$



Modélisation simplifiée

- Homogénéisation
- Diminution de la dimension du problème

Précision du modèle homogénéisé ?

## Approches mathématiques

- théorèmes :  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon$   
 $\|u^s - u^\varepsilon\| \leq C\varepsilon^n$

## Approches à dominante numérique

- modèles fins 3D hétérogènes  
résolution approchée (DD)
- EF<sup>2</sup>

Analyse  
de structures périodiques

2 échelles

Couplage micro-macro

## Modèle simplifié

- homogène
- 1- ou 2D

Découplage micro-macro

## Approches modèles

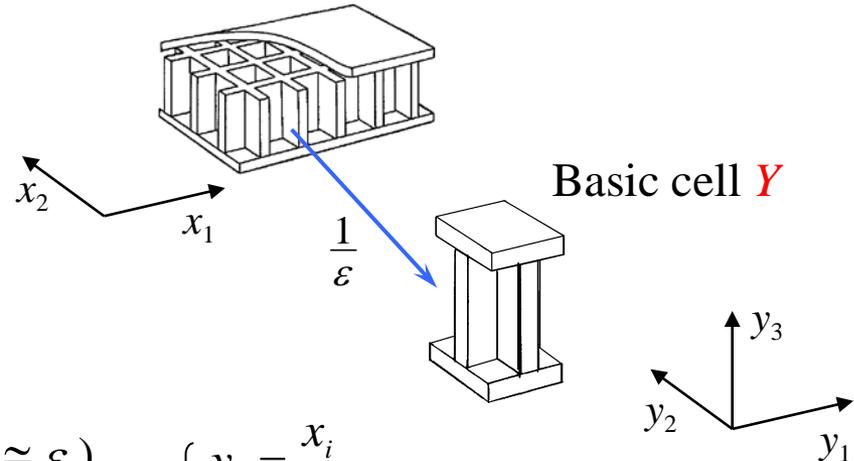
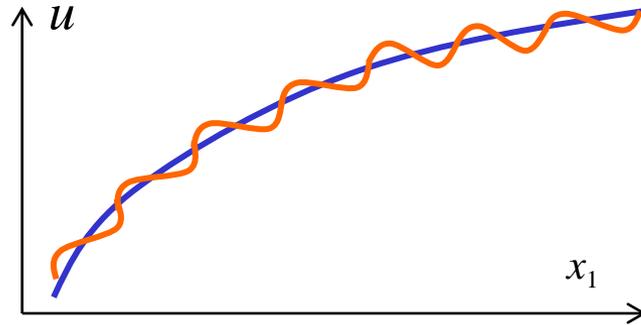
- homogénéisation appliquée
- besoins industriels – ingénieurs
- méthode des développements asymptotiques **formels**

$$u = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^3 u^3 + \dots$$

# Modèle asymptotique du 1<sup>er</sup> ordre

[Caillerie 84, Lewinski 91]

- solution of the 3D elastic problem



➡ 2 scales : - local or **microscopic** ( $e \cong \epsilon$ )  
 - global or **macroscopic**

$$\begin{cases} y_i = \frac{x_i}{\epsilon} \\ (z_1, z_2) = (x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_1}$$

- solution searched under the form of an **asymptotic expansion** :

$$u(x) = u_3^0(z_1, z_2) e_3 + \epsilon u^1(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3) + \epsilon^2 u^2(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3) + \dots$$

with  $u^i(z_1, z_2, y_1, y_2, y_3)$  periodic in the plane ( $y_1, y_2$  periodic)

➡ infinite sequence of problems

- ➡ 3D **microscopic** problems on  $Y$
- ➡ 2D **macroscopic** problems

- -1<sup>th</sup> order **microscopic** problem : analytical solution

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^1 = \hat{u}_1^1(z_1, z_2) - y_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial z_1} \\ u_1^1 = \hat{u}_2^1(z_1, z_2) - y_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial z_2} \\ u_1^1 = \hat{u}_3^1(z_1, z_2) \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \sigma^0 = 0$$

justification of the **Kirchhoff-Love** assumption

- 1<sup>st</sup> order **macroscopic** problem :

- 2D **Kirchhoff-Love** plate problem: unknowns  $\hat{u}_1^1(z_1, z_2); \hat{u}_2^1(z_1, z_2); u_3^0(z_1, z_2)$
- overall behavior obtained from the solution of 0<sup>th</sup> order **microscopic** problems

- periodic homogenization problems
  - elastic 3D problems posed on the basic cell  $Y$
  - load : macroscopic strain

$$e_{y_{\alpha\beta}}(u) = \underbrace{E_{\alpha\beta}}_{\text{membrane strain}} + y_3 \underbrace{K_{\alpha\beta}}_{\text{curvature}} + e_{y_{\alpha\beta}}(u^{per})$$

$$\begin{cases} E_{\alpha\beta} = e_{z_{\alpha\beta}}(\hat{u}^1) \\ K_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 u_0^3}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \end{cases}$$

- periodic boundary conditions
- **Numerical solution of** homogenization problems : use of FE software
  - discretization of  $u^{per}$  : macroscopic strains  $\longrightarrow$  initial strains or stresses

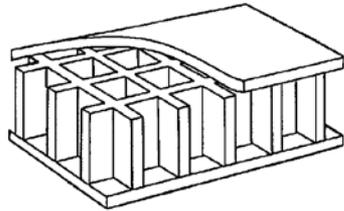
- discretization of  $u$  : MPC
- local stresses computation
- **generalized macroscopic stresses computation**  
(use of strain energy)

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta} = \langle \sigma_{\alpha\beta}^1 \rangle \\ M_{\alpha\beta} = \langle y_3 \sigma_{\alpha\beta}^1 \rangle \\ \langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \cdot dy \end{cases}$$

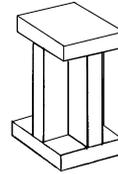
- overall plate behaviour  $\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = [A^{hom1}] \begin{Bmatrix} \{E\} \\ \{K\} \end{Bmatrix} \longrightarrow$  6 problems to solve

# Numerical example

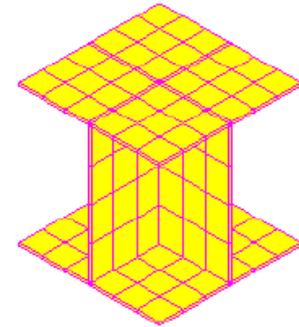
## Metallic sandwich panel with square honeycomb cell



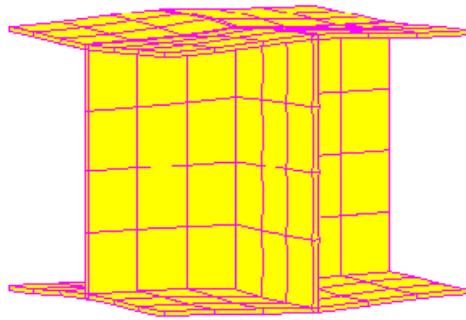
Sandwich panel



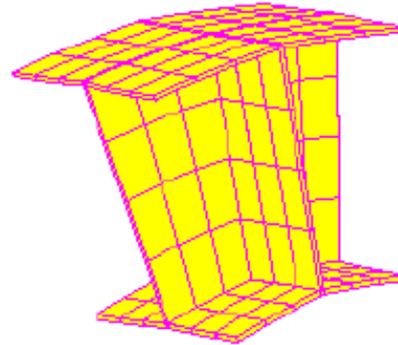
Basic cell



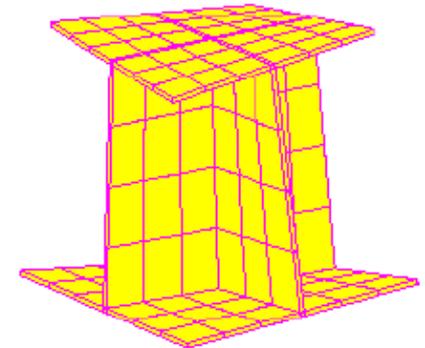
3D FE mesh



Macroscopic membrane strain



Macroscopic curvature strain

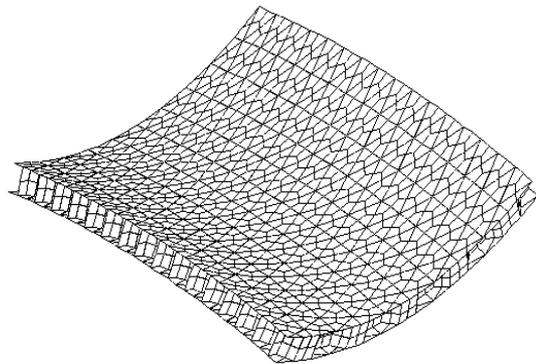
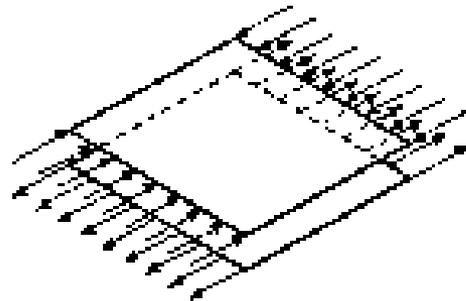


Macroscopic torsion strain

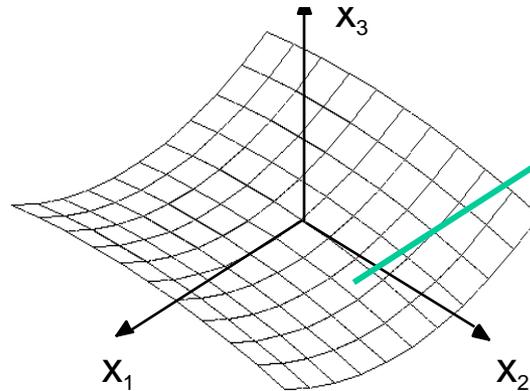
## Metallic sandwich panel with honeycomb core

Validation of the homogenization method : pure bending case

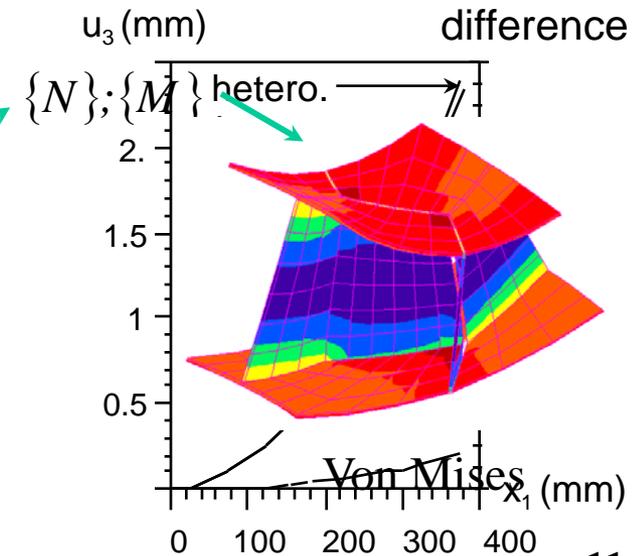
[Bourgeois 97, Bourgeois et al 98]



3D heterogeneous model : 17000 d.o.f.

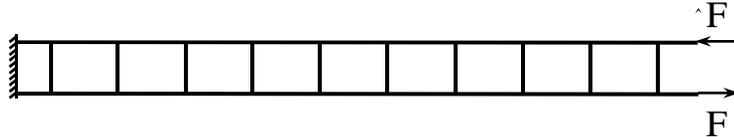


2D homogenized model : 700 d.o.f

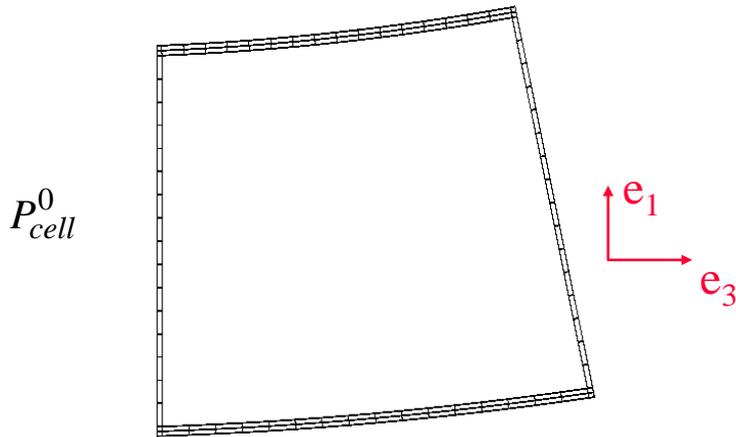


## Exemple d'un treillis de poutres

- solution de référence 3D hétérogène



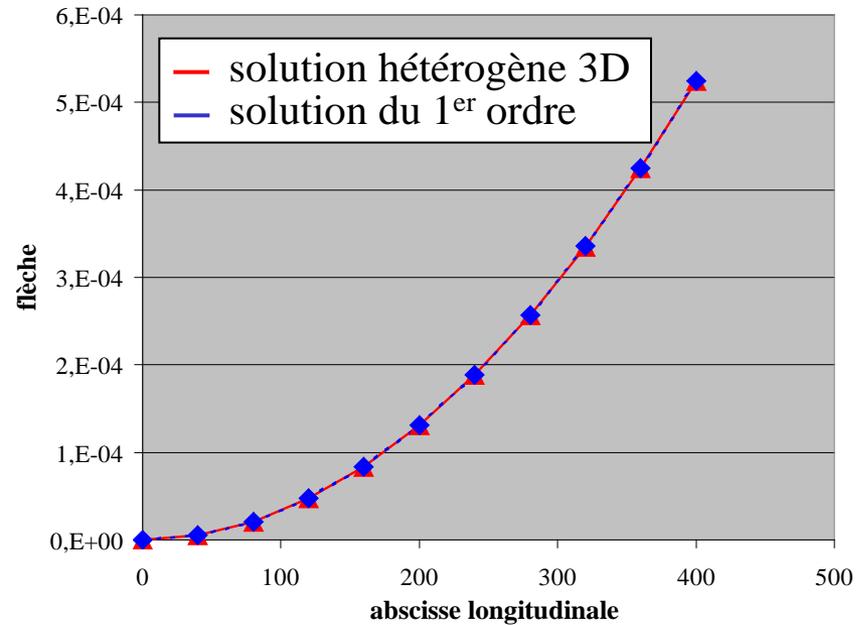
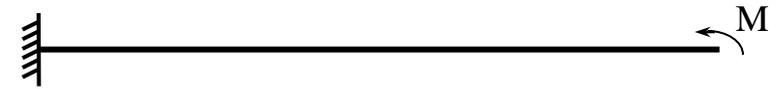
- résolution des pb **microscopiques**  
simulation d'essais mécaniques



$$\bar{e}^1 = \left\{ \partial_3 \hat{u}_3^1 = 0, \partial_{33} \hat{u}_1^0 = 1, \partial_{33} \hat{u}_2^0 = 0, \partial_3 \varphi^1 = 0 \right\}^t$$

courbure imposée

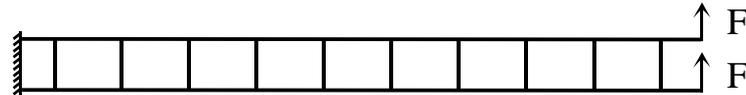
- solution du 1<sup>er</sup> ordre (**Bernoulli**)



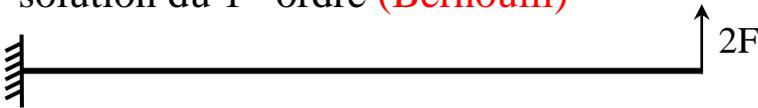
➔ très bon accord solution du 1<sup>er</sup> ordre : solution hétérogène 3D

## Cas de la flexion simple

- solution de référence 3D hétérogène



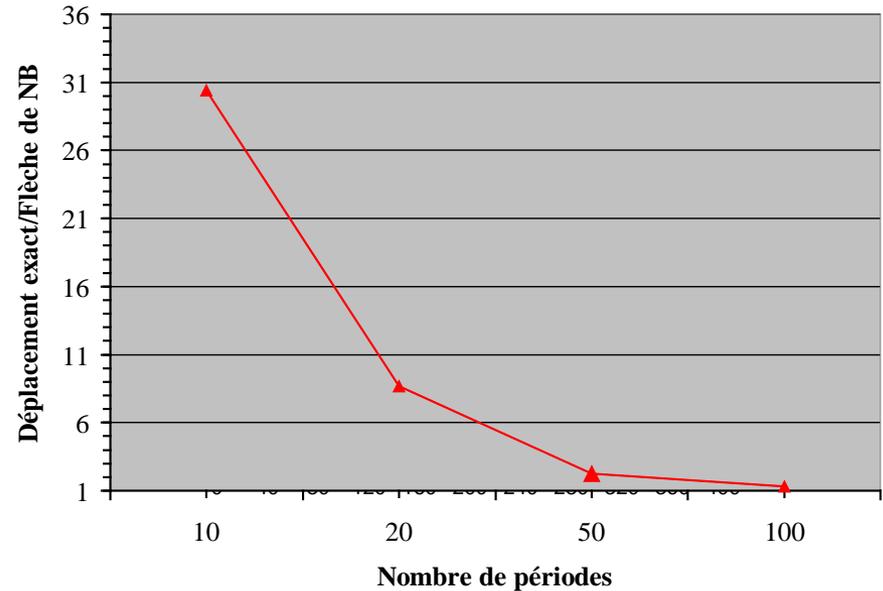
- solution du 1<sup>er</sup> ordre (Bernoulli)



➔ insuffisance de la solution limite  $u^0$

Causes :

- $\varepsilon$  pas assez petit... définition de  $\varepsilon$  ?
- trop peu de termes calculés dans la série
- structure non testée pour l'état macroscopique envisagé
- problème des bords (perte de périodicité)



$$u = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^3 u^3 + \dots$$

Remèdes :

- déterminer les termes d'ordre supérieur
- prendre en compte les effets de bords

# Modèle asymptotique d'ordre supérieur et effets de bords

**Multiscale Methods for Composites: A Review**  
**P. Kanouté · D.P. Boso · J.L. Chaboche · B.A. Schrefler**  
Arch Comput Methods Eng (2009)

In a recursive manner :

- formal derivation of the asymptotic expansion (arbitrary order)
- interior solution expression :

$$\begin{aligned}
 u^{(I)}(x_i) = & \hat{u}_3^0(z_\alpha) e_3 + \varepsilon \tilde{u}^1(z_\alpha, y_3) + \varepsilon^2 \left[ \tilde{u}^2(z_\alpha, y_3) + \chi^{0m}(y_i) \tilde{e}_m^0(z_\alpha) \right] \\
 & + \varepsilon^3 \left[ \tilde{u}^3(z_\alpha, y_3) + \chi^{0m}(y_i) \tilde{e}_m^1(z_\alpha) + \chi^{1m\beta}(y_i) \partial_\beta \tilde{e}_m^0(z_\alpha) \right] \\
 & + \varepsilon^4 \left[ \tilde{u}^4(z_\alpha, y_3) + \chi^{0m}(y_i) \tilde{e}_m^2(z_\alpha) + \chi^{1m\beta}(y_i) \partial_\beta \tilde{e}_m^1(z_\alpha) + \chi^{2m\beta\gamma}(y_i) \partial_{\beta\gamma} \tilde{e}_m^0(z_\alpha) \right] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Higher-order computations :

- new homogenization local problems posed on the 3D basic cell  $Y$  :

load : successive macroscopic **strain gradients**

Solution :  $\chi^{1m\beta}(y_i), \chi^{2m\beta\gamma}(y_i)$

- new macroscopic 2D problems :

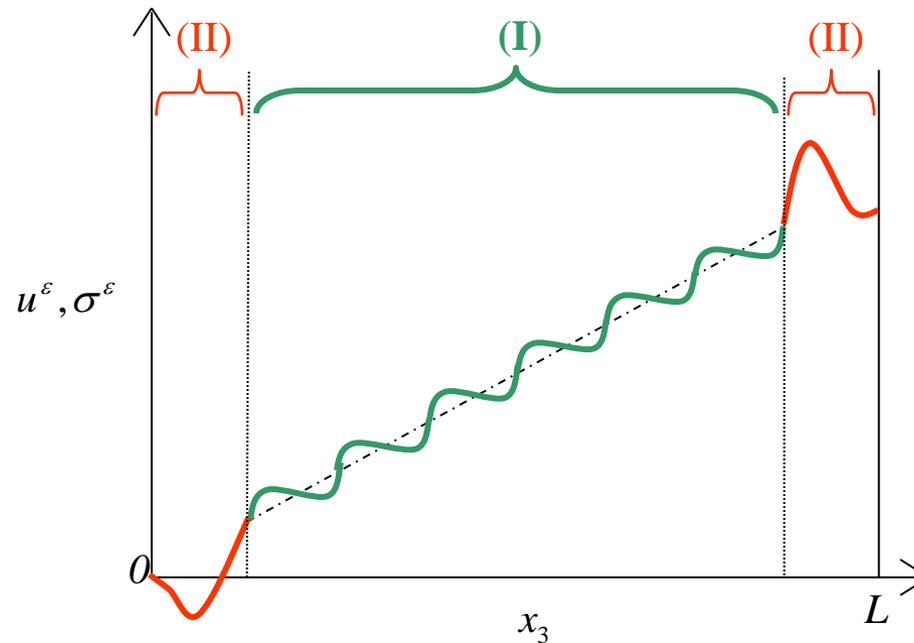
1<sup>st</sup> order problem

$$\begin{cases}
 \mathbb{L}(\bar{\sigma}^1) + F^1 = 0 \\
 \bar{\sigma}^1 = A^{hom1} \bar{e}^1
 \end{cases}$$

2<sup>nd</sup> order problem

$$\begin{cases}
 \mathbb{L}(\bar{\sigma}^2) = 0 \\
 \bar{\sigma}^2 = A^{hom1} \bar{e}^2 + A^{hom2} \partial_\beta \bar{e}^1 \\
 \Rightarrow \mathbb{L}(A^{hom1} \bar{e}^2) = -\mathbb{L}(A^{hom2} \partial_\beta \bar{e}^1)
 \end{cases}$$

**Remark** : higher-order asymptotic models  $\neq$  refined eng. theories (e.g. Reissner)

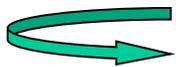


(I) Région intérieure : réponse macroscopique, localement périodique



domaine de validité de la *solution asymptotique intérieure*

(II) Couches limites : réponses localisées, associées aux CL



rupture des hypothèses de périodicité locale  
*solution asymptotique intérieure non valide*

## Origine :

- solution asymptotique incompatible avec des CL quelconques

## Solutions possibles

- modèle 3D hétérogène au voisinage des bords et :
  - superposition ou jonction avec le modèle asymptotique intérieur [Ben Dhia 98], [Panasencko 99]
- satisfaction exacte des CL 3D  $\Rightarrow$  2<sup>ème</sup> développement asymptotique aux bords  
[Friedrichs et Dressler 61], [Destuynder 86]
- dérivation de CL macroscopiques « asymptotiquement correctes »

### ➔ analyse de la décroissance des effets de bords

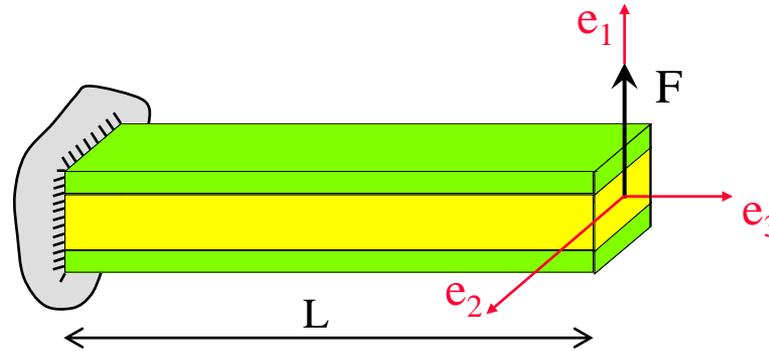
[Gregory et Wan 84] (plaques), [Duva et Simmonds 91] (poutres)

Remarque : méthode *a priori* non applicable en 3D

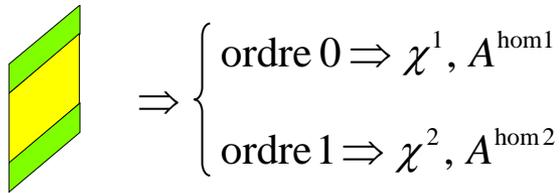
- résultats à chaque ordre (6 CL à chaque extrémité)
  - CL 3D en **contraintes** ➔ justification du **principe de Saint-Venant**
  - CL 3D en **déplacements** ➔ CL classiques  $\neq$  CL heuristiques
  - CL 3D **mixtes** ➔ {
    - CL sthéniques : Saint-Venant
    - CL cinématiques non classiques

# Exemples d'application

- problème 3D hétérogène



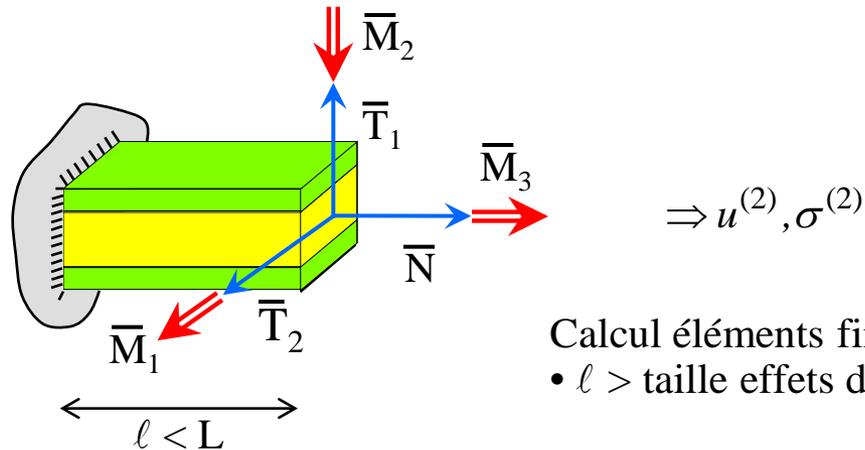
- Problèmes **microscopiques**



Calcul éléments finis (logiciel spécifique)

- déformation initiale
- CL périodiques
- efforts volumiques

- Problèmes 3D canoniques



Calcul éléments finis (Samcef)

- $l >$  taille effets de bords

- calcul des CL **macroscopiques**

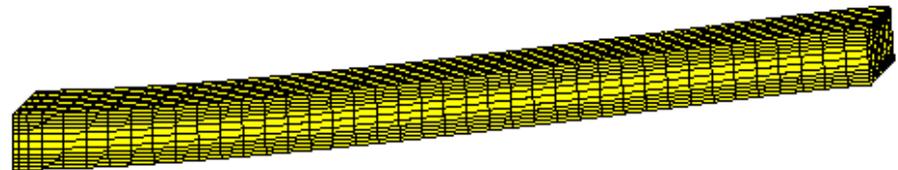
- calcul de la solution **macroscopique**

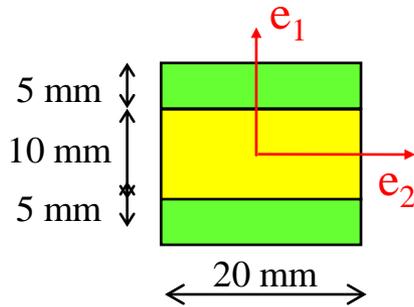
- deux types de CL
- solution (semi)-analytique
- solution  $O(\varepsilon^n)$  ou  $O(\infty)$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{u}_\alpha(z_3) = \underbrace{\hat{u}_\alpha^0(z_3)}_{O(\infty)} + \varepsilon \underbrace{\hat{u}_\alpha^1(z_3)}_{O(1)} + \dots \\ \hat{u}_3(z_3) = \underbrace{\hat{u}_3^1(z_3)}_{O(1)} + \varepsilon \underbrace{\hat{u}_3^2(z_3)}_{O(\varepsilon)} + \dots \\ \varphi(z_3) = \underbrace{\varphi^1(z_3)}_{O(1)} + \varepsilon \underbrace{\varphi^2(z_3)}_{O(\varepsilon)} + \dots \end{cases}$$

- confrontation solution EF 3D / solution asymptotique intérieure

- calcul de la solution hétérogène 3D





■  $E = 200000 \text{ MPa}$   
 $\nu = 0.3$

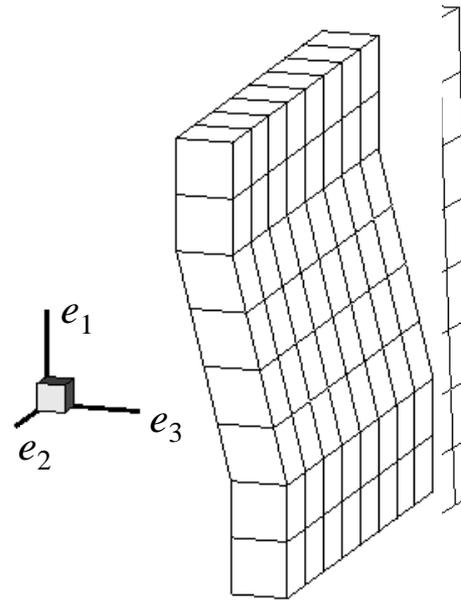
■  $E = 400 \text{ MPa}$   
 $\nu = 0.3$

Solution des pb **microscopiques**

$A^{hom1}$  diagonale

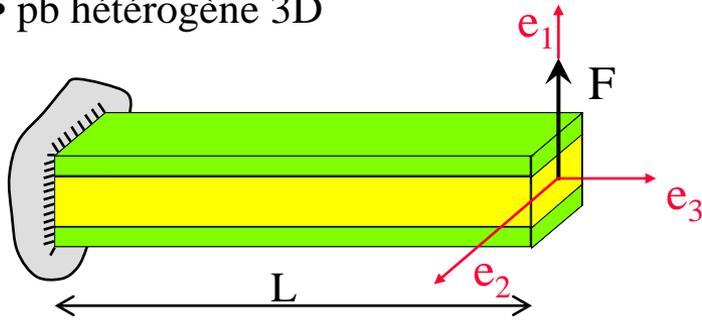
$A^{hom2} \equiv 0$

Déformée problèmes **microscopiques**

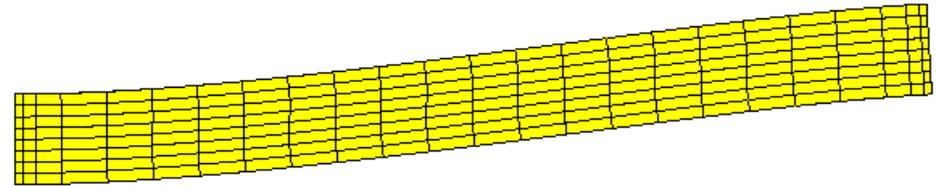


champ ~~total~~ périodique  
 courbure unitaire imposée  
 gradient de courbure unitaire imposée

- pb hétérogène 3D



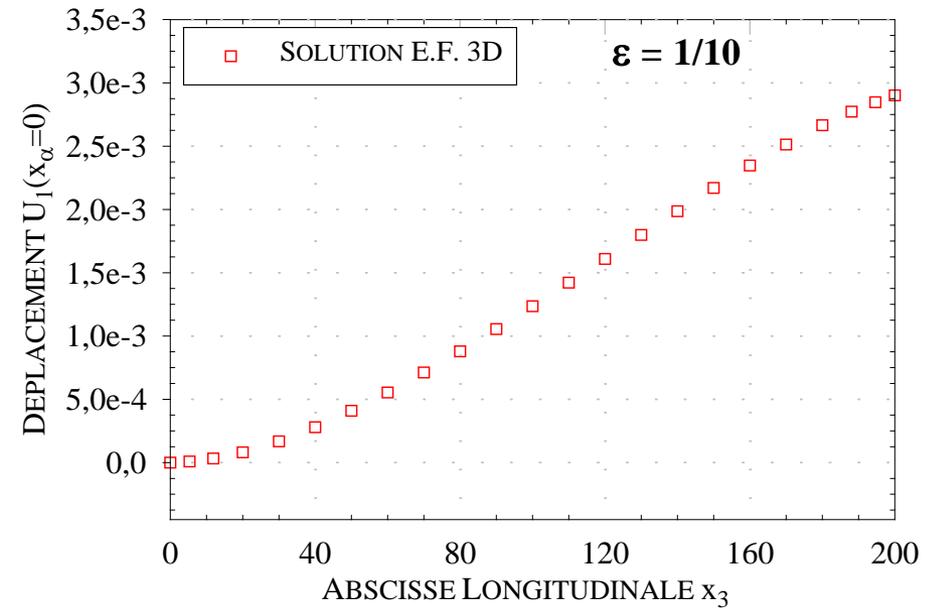
déformée - élanement de 10

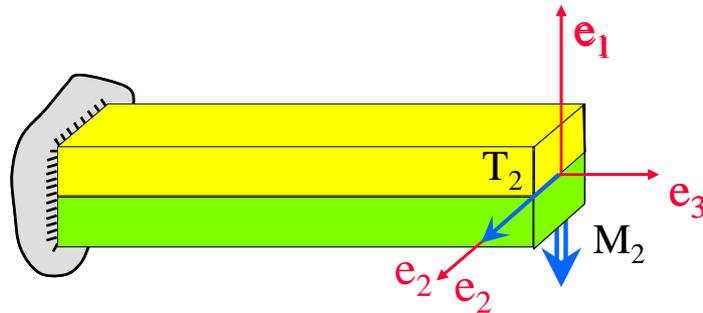
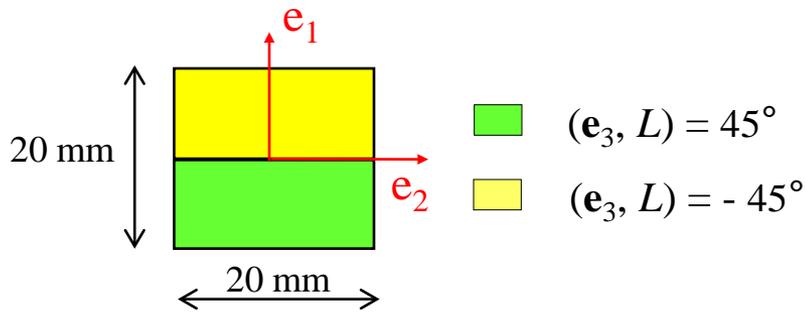


- solution asymptotique

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(z_3) &= \hat{u}_1^0 + \varepsilon \hat{u}_1^1 + \varepsilon^2 \hat{u}_1^2 + \varepsilon^3 \hat{u}_1^3 \\ &= \frac{L}{EI_1} \left( \frac{z_3^2}{2} - \frac{z_3^3}{6} \right) + \varepsilon z_3 \partial_3 \hat{u}_1^1(0) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left( z_3 \partial_3 \hat{u}_1^2(0) + \hat{u}_1^2(0) \right) + \varepsilon^3 \hat{u}_1^3(0) \end{aligned}$$

- modèle du 1<sup>er</sup> ordre (Bernoulli) inadéquat
- importance termes d'ordre supérieur et effets de bords



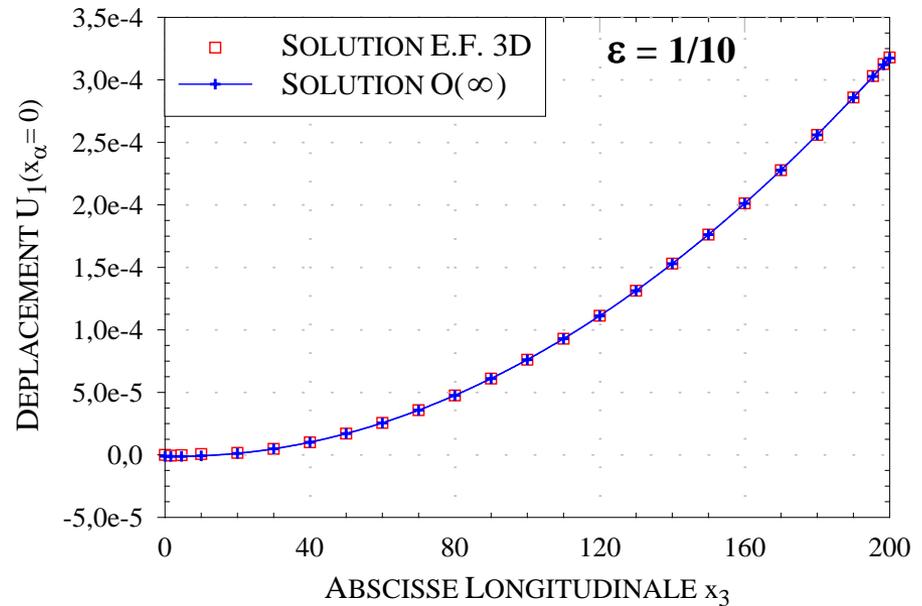


→ validation de  $A^{hom2}$   $\equiv$  couplage de réponse impossible à obtenir avec Timoshenko et CL classiques

Solution des pb **microscopiques**

$A^{hom1}$  : couplage extension torsion

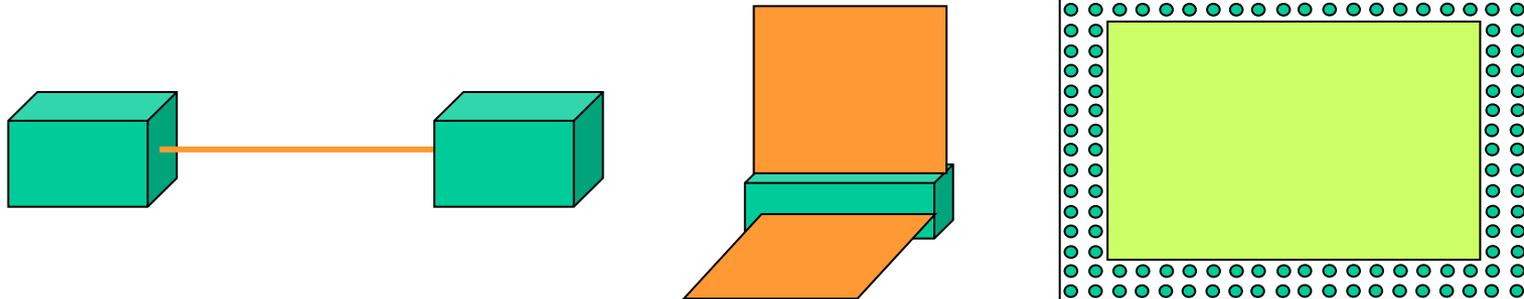
$A^{hom2}$  : couplage entre les flexions



- efficacité de l'approche proposée
- importance des termes d'ordre supérieur **et** des effets de bords  
[Goldenveizer *et al.* 93], [Dauge *et al.* 99]
- formulation d'un problème macroscopique **complet**  
prise en compte rigoureuse des gradients de déformation via un milieu **classique**
- limite de l'approche proposée pour le traitement des effets de bords

## Méthode optimale

- détermination de la taille des effets de bords (problème microscopique)  
[Horgan 96], [Stephen et Wang 96]
- utilisation d'un modèle 3D hétérogène dans les zones à effets localisés
- modèle macroscopique complet ailleurs



- modèle hybride → définir le raccord : e.g. méthode Arlequin