Homogénéisation de multicouches

Vincent Coeuriot, Benjamin Rémy et Alain Degiovanni

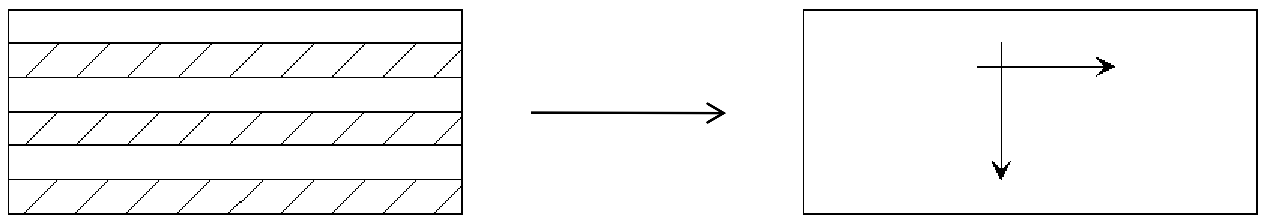
LEMTA UMR 7563
UNIVERSITE DE LORRAINE
NANCY

Nancy-Université

Thèse de Mouloud Amazouz (1987)

INTRODUCTION

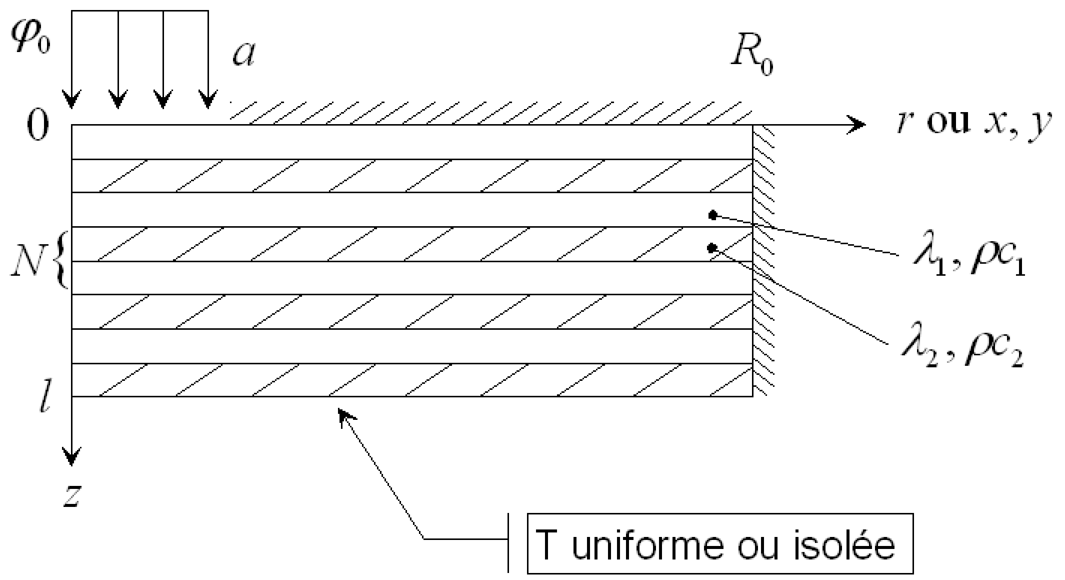
Le but est de montrer en pratique sur l'exemple des multicouches, la difficulté de prévoir **« le nombre d'éléments »** nécessaires pour remplacer un **« milieu hétérogène »** par un **« milieu homogène anisotrope »**



$$\lambda_1,\ \rho c_1$$
$$\lambda_2,\ \rho c_2$$
$$\vdots$$
$$etc$$

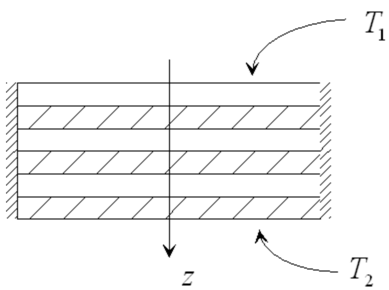
$$\lambda_{hx},\ \lambda_{hy},\ \lambda_{hz},\ \rho c_h$$

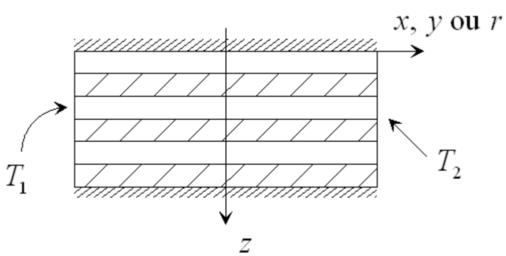
Pour simplifier	:	les observations sont surfaciques
	:	les transferts sont 3D (x, y, z ou z, r)
	:	les couches de même épaisseur de 2 natures différentes
	:	la surface latérale isolée



MILIEU HOMOGENE EQUIVALENT

On choisit 3 conditions aux limites particulières :





$$R = \frac{\sum e_1}{\lambda_1 S} + \frac{\sum e_2}{\lambda_2 S} = \frac{\sum e_1 + \sum e_2}{\lambda_{zh} S}$$

$$\lambda_{zh} = \frac{2}{\dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2}}$$

$$1/R = \frac{\lambda_1 L \sum e_1}{l} + \frac{\lambda_2 L \sum e_1}{l} = \frac{\lambda_{rh} L \left(\sum e_1 + \sum e_2\right)}{l}$$

$$\lambda_{rh} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

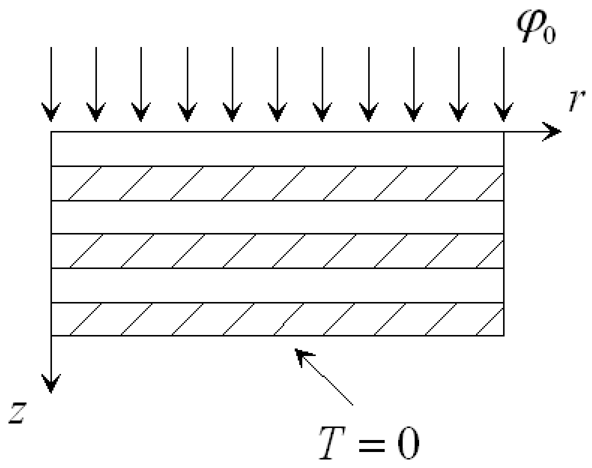
$$\rho c_1 \sum e_1 l L + \rho c_2 \sum e_2 l L = \rho c_h \left(\sum e_1 + \sum e_2\right) l L$$

$$\rho c_h = \frac{\rho c_1 + \rho c_2}{2}$$

Petit corps : $\Delta Q = mc\,\Delta T$

Nancy-Université

1er Cas : Régime Permanent, transfert 1D

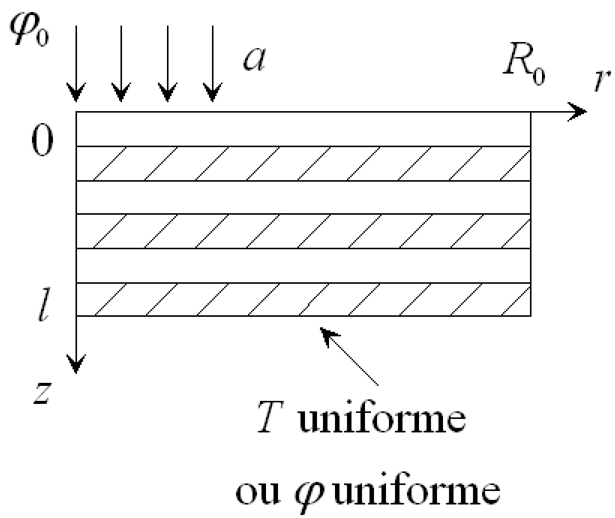


C'est toujours « **homogénéisable** » quelque soit le nombre de couches

$$\lambda_h = \frac{2}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}$$

2ème Cas : Régime permanent, transfert 3D

LE PROBLEME



$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right) = 0$$

à l'interface $\left| \begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right.$

en $z = 0$ $\quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \varphi_0 \quad 0 < r < a$

$\qquad = 0 \quad a < r < R_0$

en $z = l$ $\quad T_2 = 0$

ou $-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = \varphi_0 \frac{a^2}{R_0^2}$

LA SOLUTION

- Transformée de Hankel sur *r* $\bar{T} = \int_0^{R_0} T r J_0(\alpha_n r) dr$ idem pour φ

  avec α_n donnés par $J_1(\alpha_n R_0) = 0$

- Représentation quadripolaire

- Empilement de N bicouches

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{ne} \\ \bar{\varphi}_{ne} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} \bar{T}_{ns} \\ \bar{\varphi}_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n & \mathcal{B}_n \\ \mathcal{C}_n & \mathcal{D}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_{ns} \\ \bar{\varphi}_{ns} \end{bmatrix}$$

pour $T(l) = 0$ soit $\bar{T}_{ns} = 0 \rightarrow \bar{T}_{ne} = \dfrac{\mathcal{B}_n}{\mathcal{D}_n} \bar{\varphi}_{ne}$

et $T(0,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\bar{T}_{ne} J_0(\alpha_n r)}{N_n} + \dfrac{\bar{T}_{0e}}{N_0}$

Avec $$A_n = ch^2(\omega_n e^*) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} sh^2(\omega_n e^*)$$

$$B_n = R_0\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \quad ch(\omega_n e^*)sh(\omega_n e^*)/\,\omega_n$$

$$C_n = (\lambda_1 + \lambda_2)/\,R_0 \quad ch(\omega_n e^*)sh(\omega_n e^*).\omega_n$$

$$D_n = ch^2(\omega_n e^*) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} sh^2(\omega_n e^*)$$

$$A_0 = D_0 = 1 \quad , \quad B_0 = l\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \quad , \quad C_0 = 0$$

avec ω_{n} solution de $J_1(\omega) = 0$ et $e^* = \dfrac{l}{2NR_0}$

$$N_n = \frac{R_0^2}{2} J_0^2(\omega_n) \quad , \quad N_0 = \frac{R_0^2}{2}$$

$$\overline{\varphi}_{ne} = \varphi_0 R_0^2 \frac{a^*}{\omega_n} J_1(\omega_n a^*) \quad et \quad \overline{\varphi}_{0e} = \varphi_0 R_0^2 \frac{a^{*2}}{2} \quad \text{avec} \quad a^* = \frac{a}{R_0}$$

$$T(0,r)=\varphi_0\frac{\mathcal{B}_0}{\mathcal{D}_0}a^{*2}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_0\frac{\mathcal{B}_n}{\mathcal{D}_n}\frac{2a^*}{\omega_n}\frac{J_1(\omega_n a^*)}{J_0^2(\omega_n)}J_0(\omega_n r^*)$$

On caractérise le milieu par sa résistance thermique R_N soit :

$$\overline{T}_{0,a}(0)-T(l)=R_N\varphi_0\pi a^2$$

$$\rightarrow \quad R_N=\frac{1}{\pi R_0^2}\left[\frac{l}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_n}{\mathcal{D}_n}\frac{4}{a^{*2}\,\omega_n^2}\frac{J_1^2(\omega_n a^*)}{J_0^2(\omega_n)}\right]$$

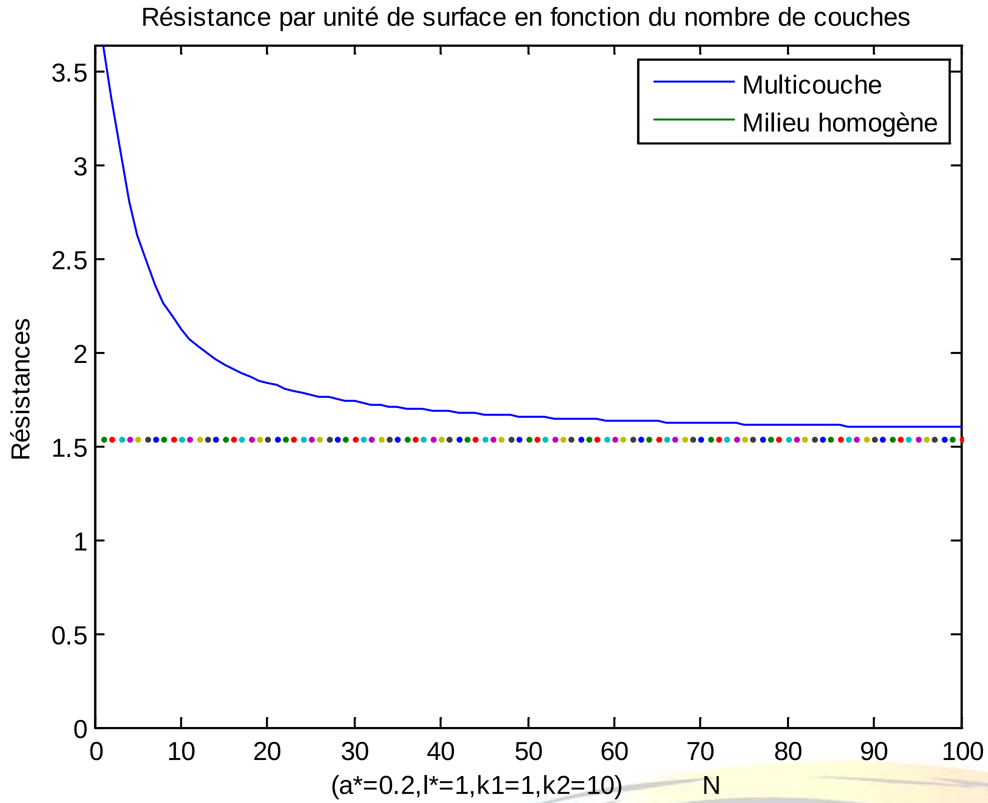
La résistance du milieu homogène anisotrope équivalent est obtenue de la même façon :

$$\rightarrow \quad R_h=\frac{1}{\pi R_0^2}\left[\frac{l}{\lambda_z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{th\left(\omega_n l^*\sqrt{\frac{\lambda_r}{\lambda_z}}\right)}{\sqrt{\lambda_r\lambda_z}}\frac{4}{a^{*2}\,\omega_n^3}\frac{J_1^2(\omega_n a^*)}{J_0^2(\omega_n)}\right]$$

Dans le cas $\varphi(l)=\text{uniforme}$, $\frac{\mathcal{B}_n}{\mathcal{D}_n}$ est remplacé par $\frac{\mathcal{A}_n}{C_n}$

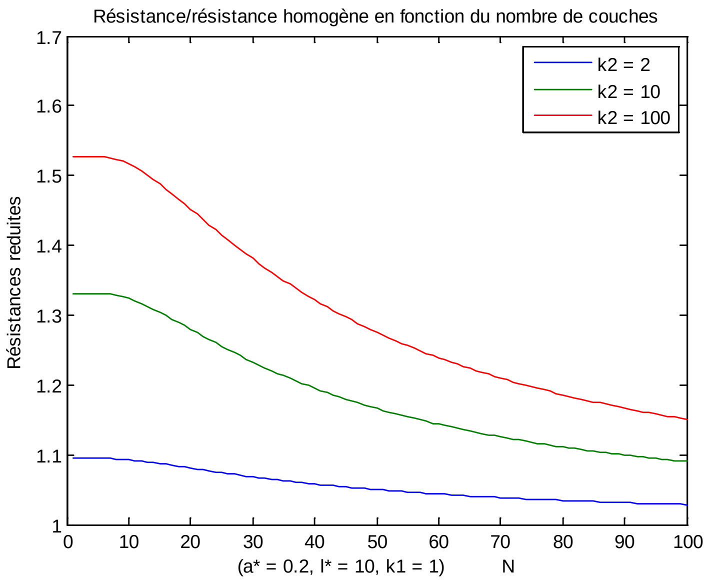
et $th\left(\omega_n l^*\sqrt{\lambda_r/\lambda_z}\right)$ par $1/th$

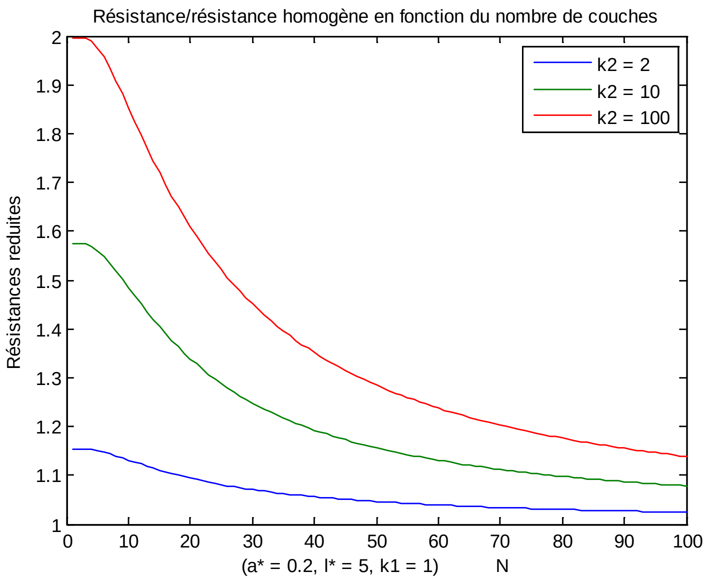
LES RESULTATS



Nancy-Université

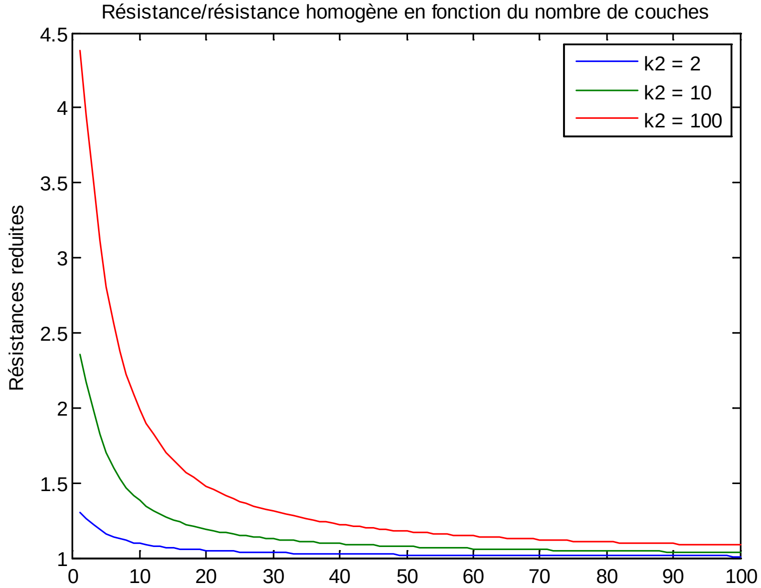
LES RESULTATS



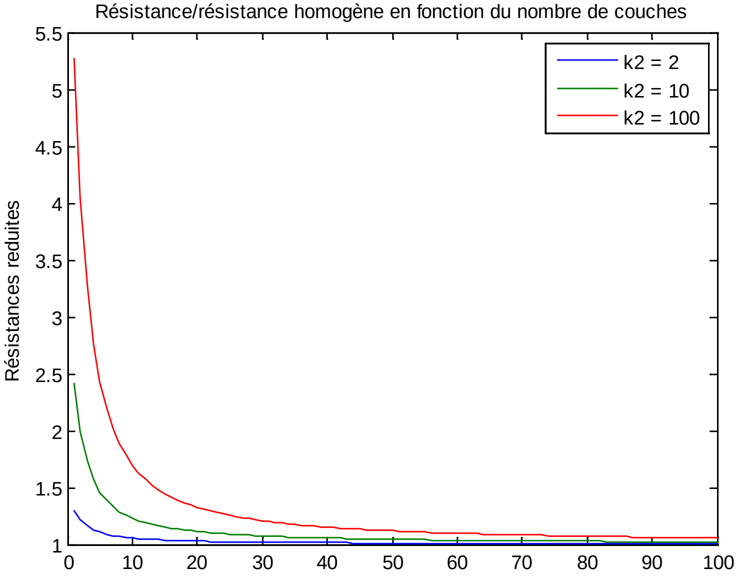


Nancy-Université

LES RESULTATS

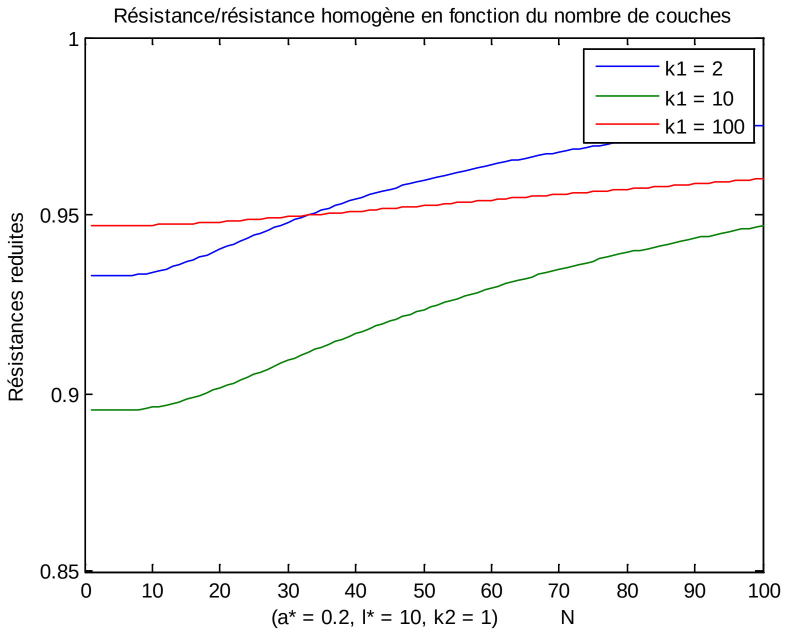


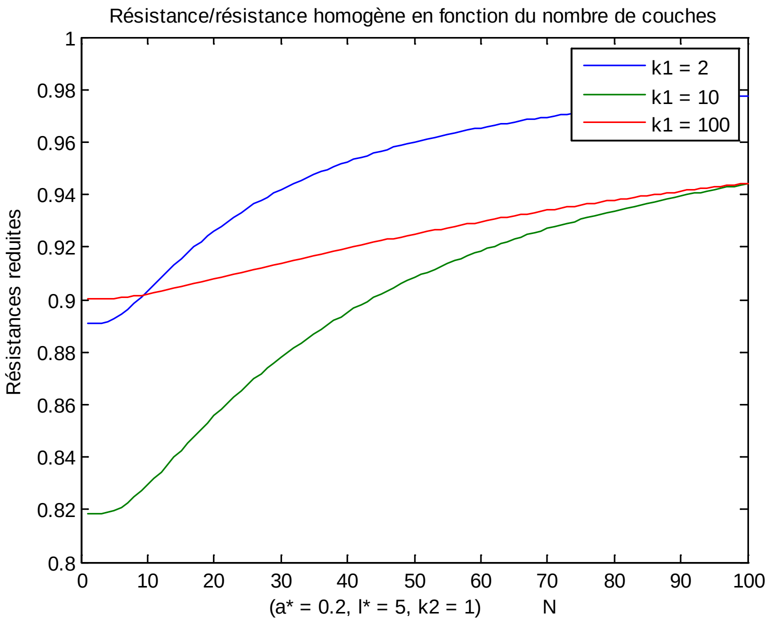
(a* = 0.2, l* = 1, k1 = 1)



(a* = 0.2, l* = 0.5, k1 = 1)

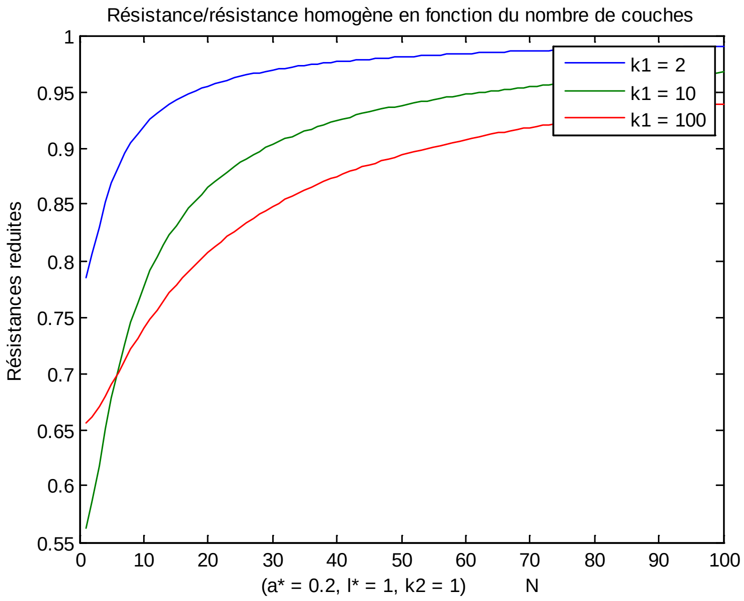
LES RESULTATS

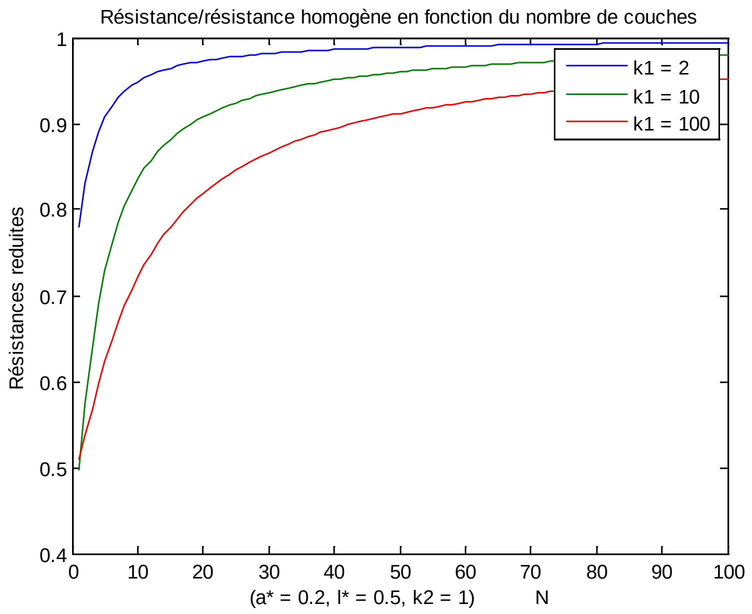




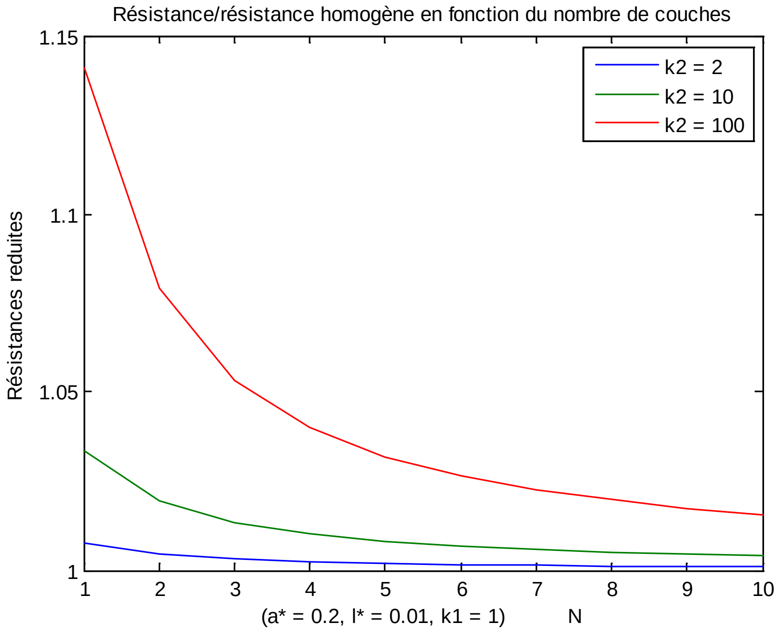
Nancy-Université

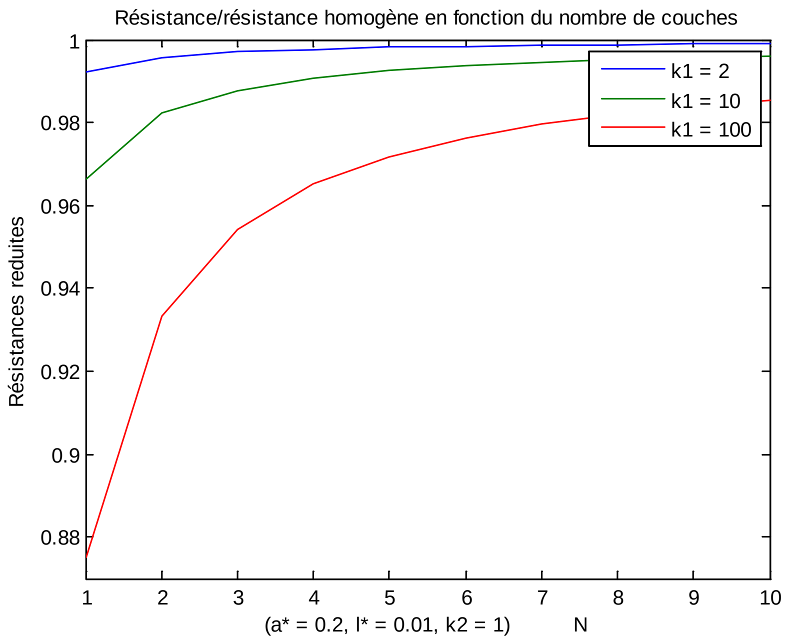
LES RESULTATS



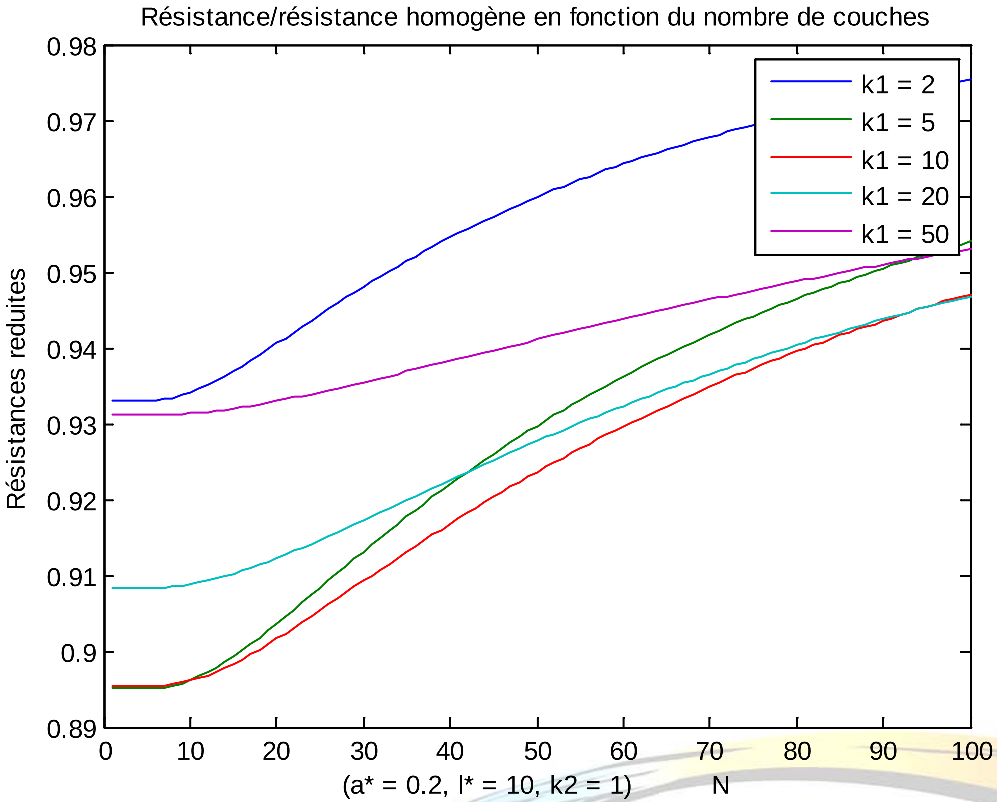


LES RESULTATS





LES RESULTATS

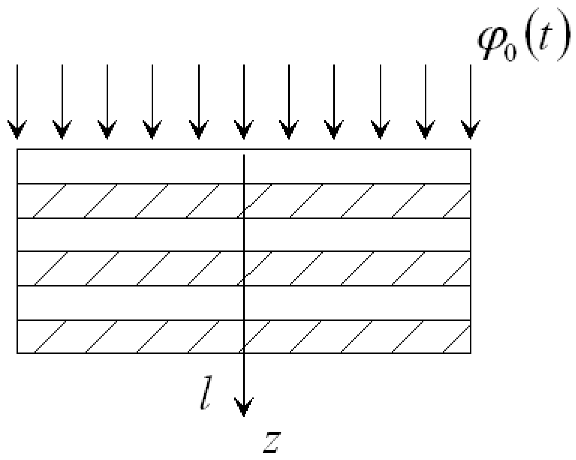


Les écarts en % à la résistance homogène pour 200 couches :

λ^* \ l^*	10	5	1	0,5	0,1
0,5	3	2,5	1	0,5	0,1
0,1	9	8	3,5	2	0,5
0,01	15	14	8	5,5	1,5
2	- 2,5	-2	-1	-0,5	- 0,1
10	- 5	- 5,5	-3,5	-2	-0,5
100	- 4	- 5,5	- 6	- 4,5	-1,5

3ème Cas : Régime transitoire, transfert 1D

LE PROBLEME



$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = \frac{1}{a_1}\frac{\partial T_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = \frac{1}{a_2}\frac{\partial T_2}{\partial t}$$

$$\text{à l'interface} \quad \left| \begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right.$$

$$\text{en} \quad z = 0 \qquad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \varphi_0(t)$$

$$\text{en} \quad z = l \qquad -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0$$

$$\text{à} \quad t = 0 \qquad T_1 = T_2 = 0$$

$$\lambda_z = \frac{\lambda_1 . \lambda_2}{\frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)} \rightarrow a_z = \frac{\lambda_z}{\rho C_p e}$$

LA SOLUTION

- Transformée de Laplace sur *t*

- Représentation quadripolaire

- Empilement de N bicouches

$$\begin{bmatrix} \overline{T}_e \\ \overline{\varphi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} \overline{T}_s \\ \overline{\varphi}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{T}_s \\ \overline{\varphi}_s \end{bmatrix}$$

avec $\overline{\varphi}_e = 1 \quad \left(\varphi_e(t) = \delta(t)\right)$ et $\overline{\varphi}_s = 0$

soit $\overline{T}_s = \dfrac{1}{\mathcal{C}}$ et $T(l,t) = L^{-1}\left(\overline{T}_s\right)$

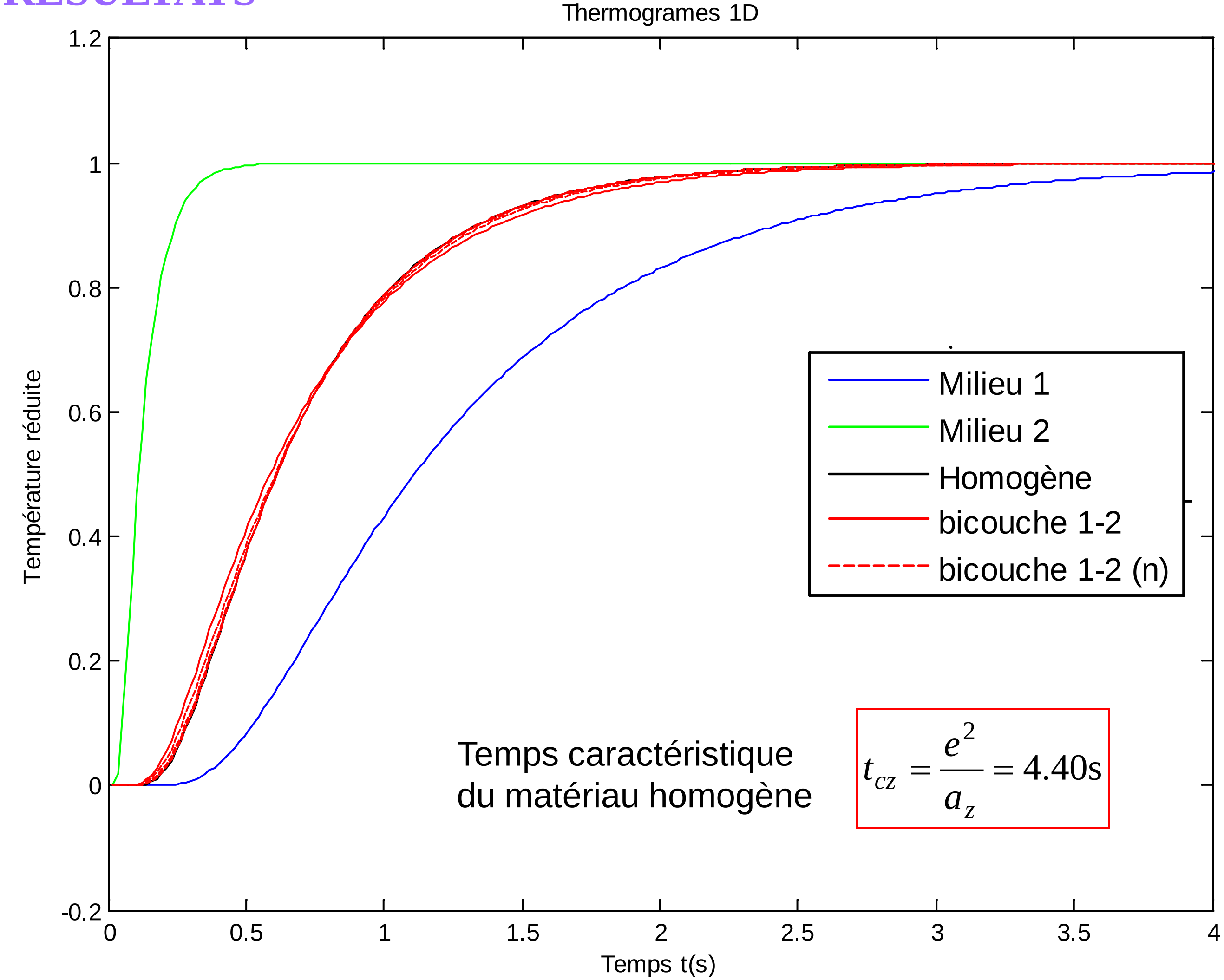
$$\lambda_1 = 1\,W/m.°C$$

$$\lambda_2 = 10\,W/m.°C$$

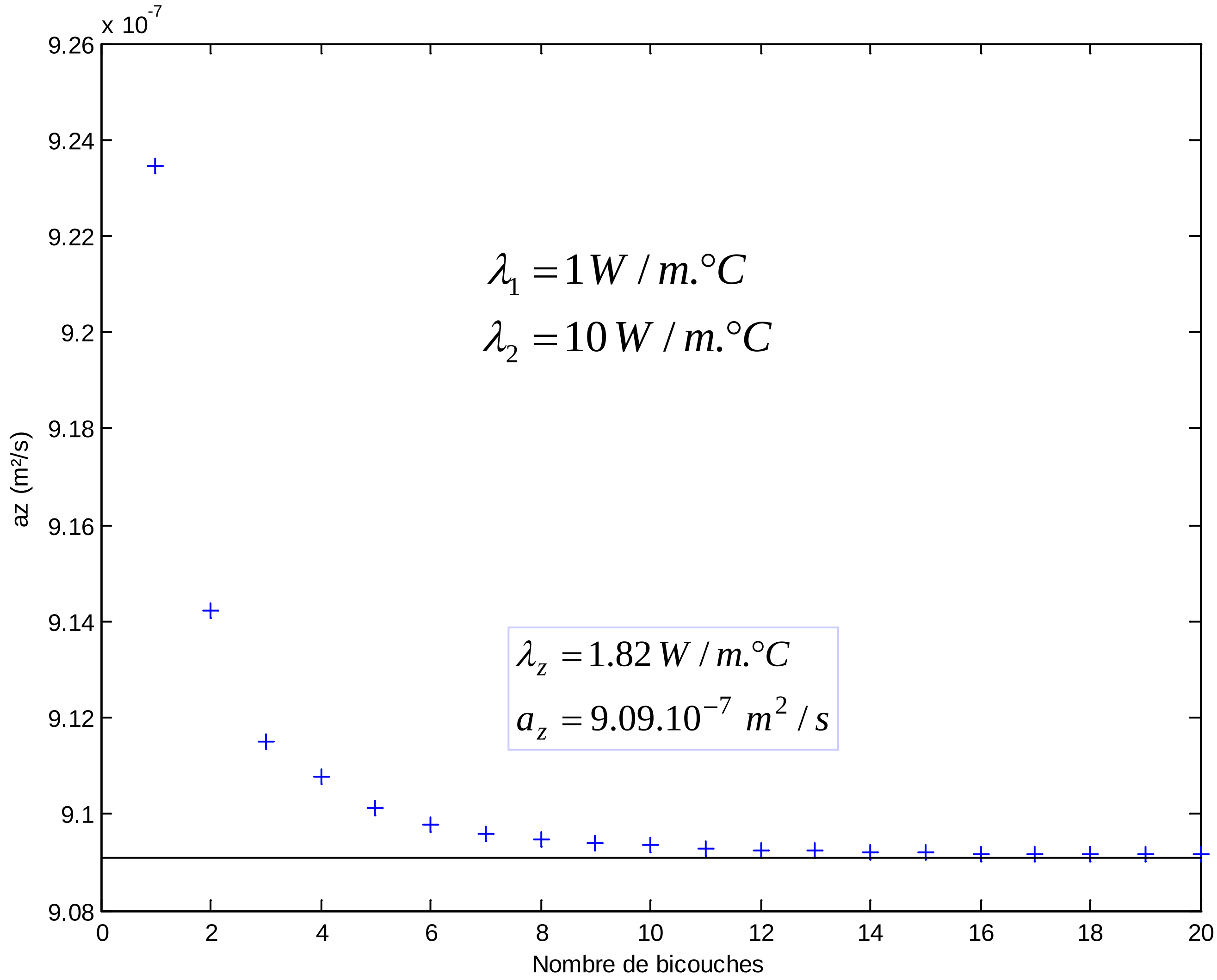
$$\lambda_z = 1.82\,W/m.°C$$

$$a_z = 9.09.10^{-7}\ m^2/s$$

LES RESULTATS

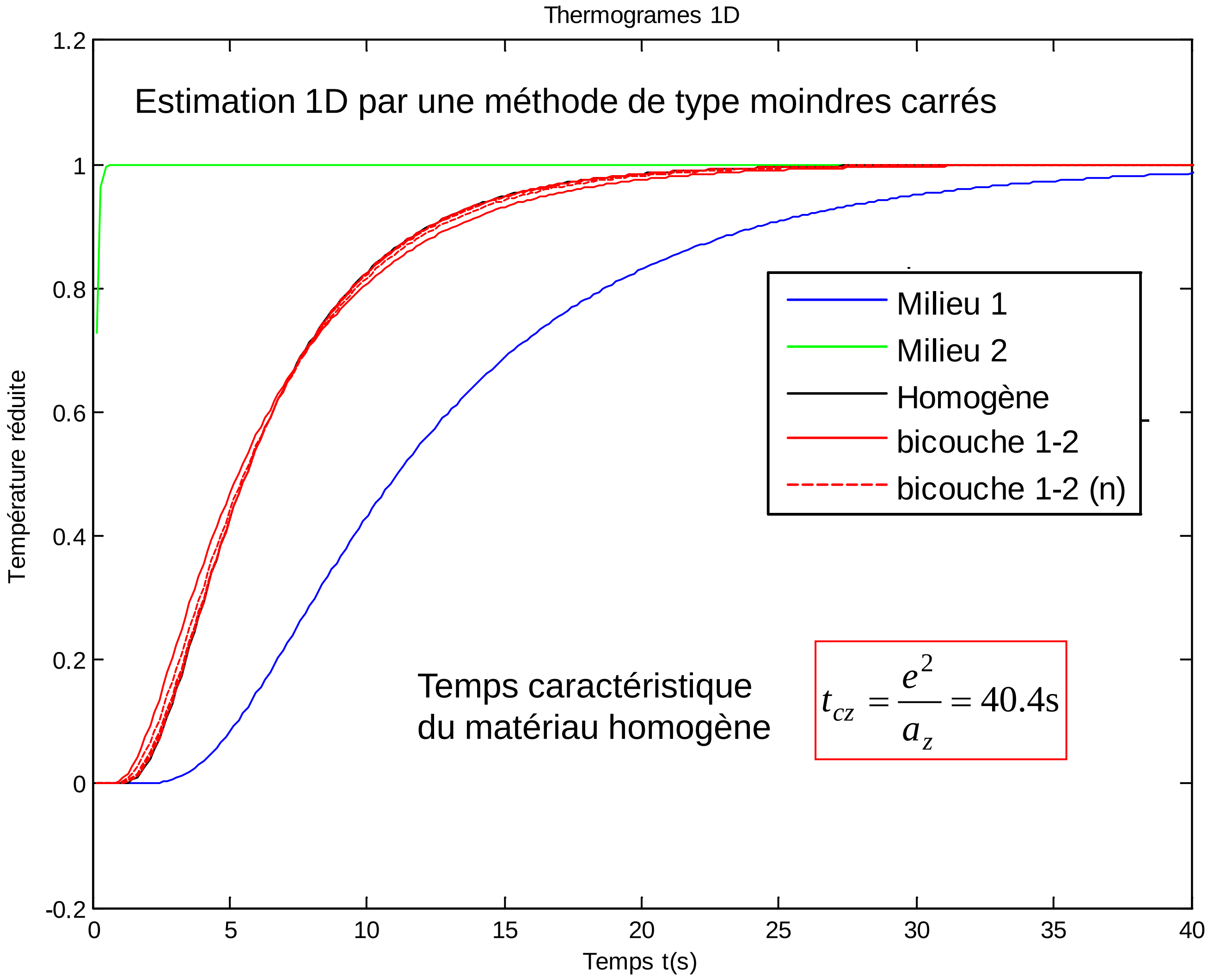


$$t_{cz} = \frac{e^2}{a_z} = 4.40s$$


x 10^-7
9.26
9.24
9.22
9.2
9.18
9.16
9.14
9.12
9.1
9.08
az (m²/s)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Nombre de bicouches
$\lambda_1 = 1\,W/m.°C$
$\lambda_2 = 10\,W/m.°C$
$\lambda_z = 1.82\,W/m.°C$
$a_z = 9.09.10^{-7}\ m^2/s$

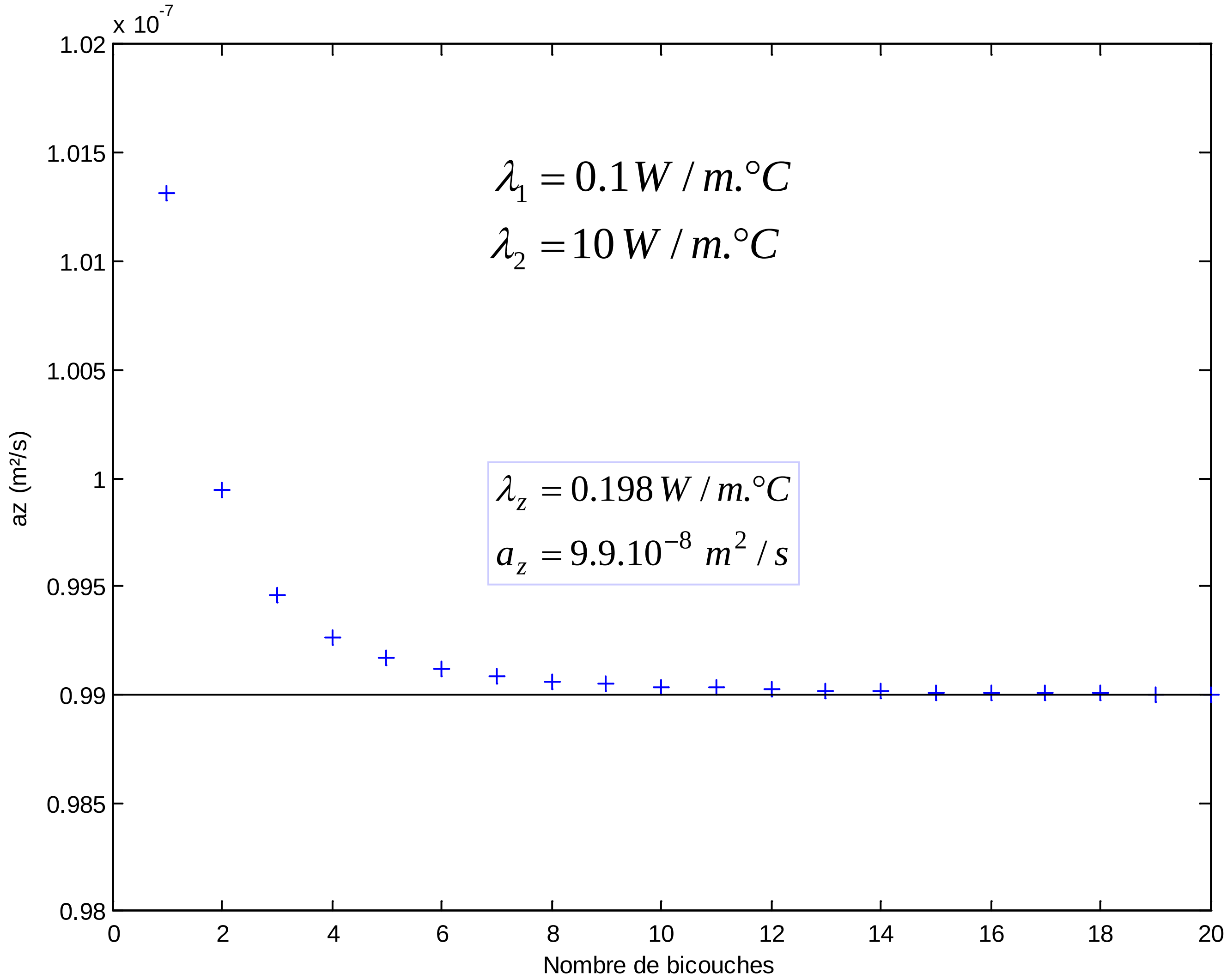
$$\lambda_1 = 0.1\, W / m.°C$$
$$\lambda_2 = 10\, W / m.°C$$

$$\lambda_z = 0.198\, W / m.°C$$
$$a_z = 9.9.10^{-8}\ m^2 / s$$



Nancy-Université

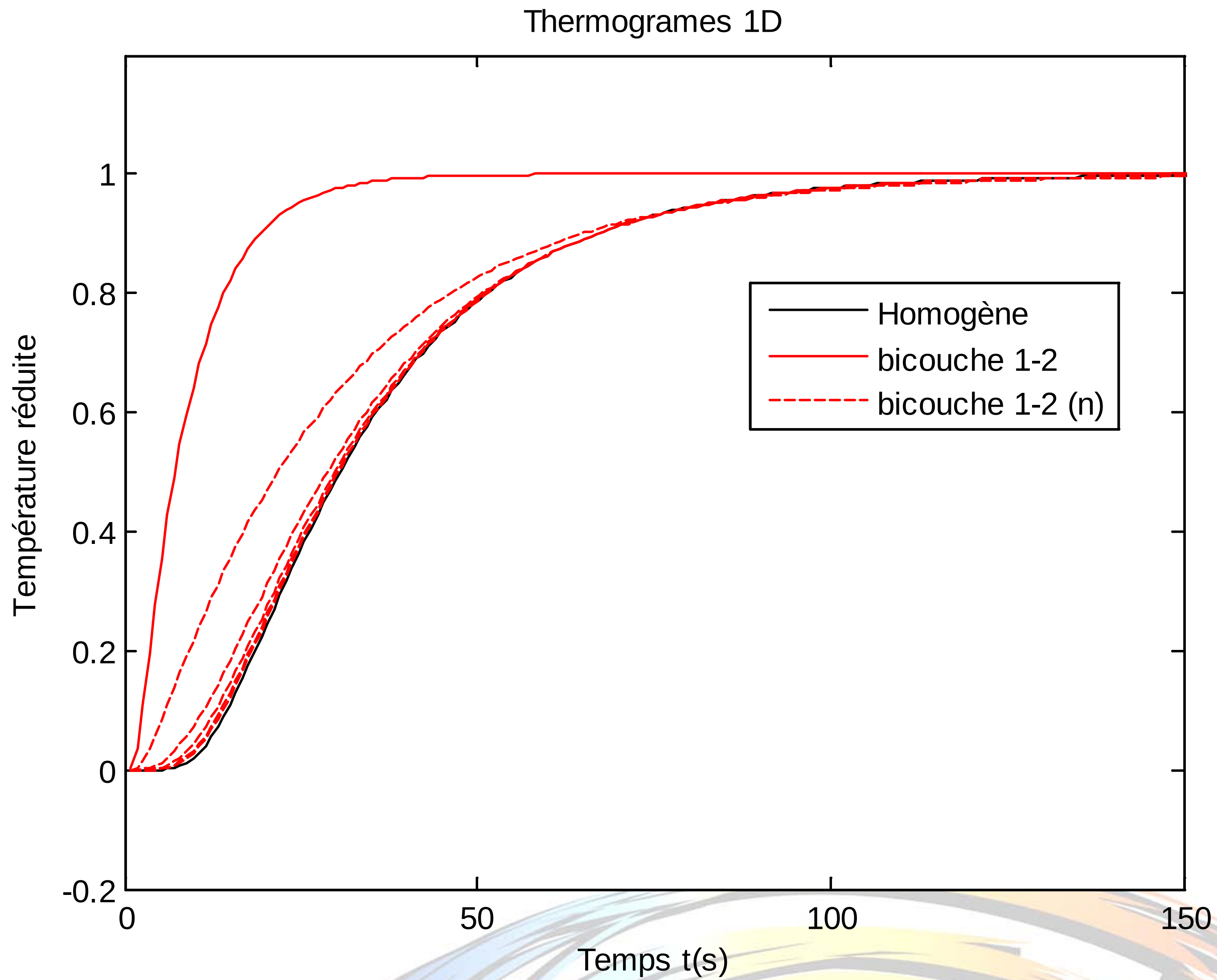
Estimation 1D par une méthode de type moindres carrés



Nancy-Université

$$\lambda_1 = 0.01\, W / m.°C \qquad \rho c_1 = 2.10^5 \; J / m^3.°C$$

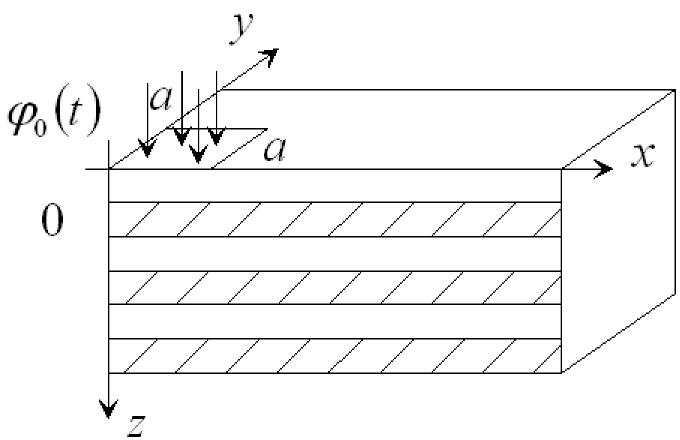
$$\lambda_2 = 10\, W / m.°C \qquad \rho c_2 = 2.10^6 \; J / m^3.°C$$



Nancy-Université

$4^{ème}$ *Cas : Régime transitoire, transferts 3D*

LE PROBLEME



$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}=\frac{1}{a_1}\frac{\partial T_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}=\frac{1}{a_2}\frac{\partial T_2}{\partial t}$$

à l'interface $\left| \begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{array} \right.$

en $z=0$ $\quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \varphi_0(t)$ $\quad x<a$ et $y<a$

$= 0$ ailleurs

en $z=l$ $\quad \frac{\partial T_2}{\partial z}=0$

à $t=0$ $\quad T_1 = T_2 = 0$

LA SOLUTION

- Transformée de Laplace sur *t*

- Transformées de Fourier sur *x* et *y*

- Représentation quadripolaire

- Empilement de N bicouches

$$\overline{T}(z,\alpha_n\alpha_m P)=\int_0^L\int_0^L\int_0^\infty T(z,x,y,t)\cos(\alpha_n x)\cos(\alpha_m y)\exp(-pt)dx\,dy\,dt$$

idem pour φ avec α *solution* de $\sin\alpha L=0$

$$\rightarrow\quad \overline{T}(l,\alpha_n,\alpha_m,p)=\frac{1}{C_{n,m}}\overline{\varphi}(0,\alpha_n,\alpha_m,p)$$

$$\rightarrow\quad \theta(l,x,y,p)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\overline{T}(l,\alpha_n,\alpha_m,p)\cos(\alpha_n x)\cos(\alpha_m y)}{N_{n,m}}$$

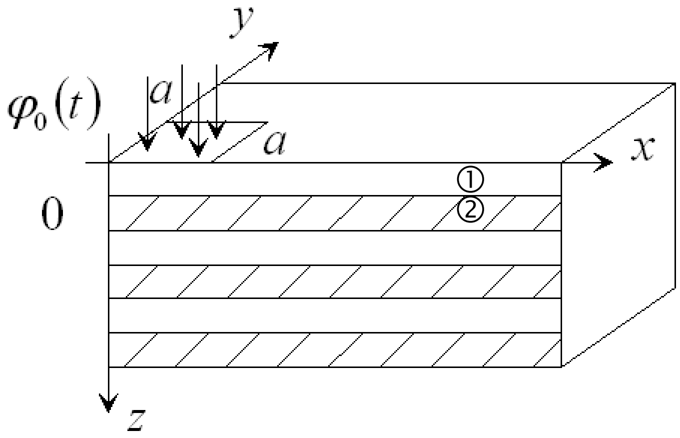
et $T(l,x,y,t)=L^{-1}[\theta(l,x,y,p)]$

Propriétés des matériaux :

LES RESULTATS

Milieu anisotrope avec : a_x=a_y et a_z

(couches de même capacité pour simplifier)



- Matériau ①: $\begin{cases} e_1 = 1\,mm \\ \rho c_1 = 2.10^6 \ J/m^3.°C \\ \lambda_1 = 0.1 \text{ ou } 1\,W/m.°C \end{cases}$

- Matériau ②: $\begin{cases} e_2 = 1\,mm \\ \rho c_2 = 2.10^6 \ J/m^3.°C \\ \lambda_2 = 10\,W/m.°C \end{cases}$

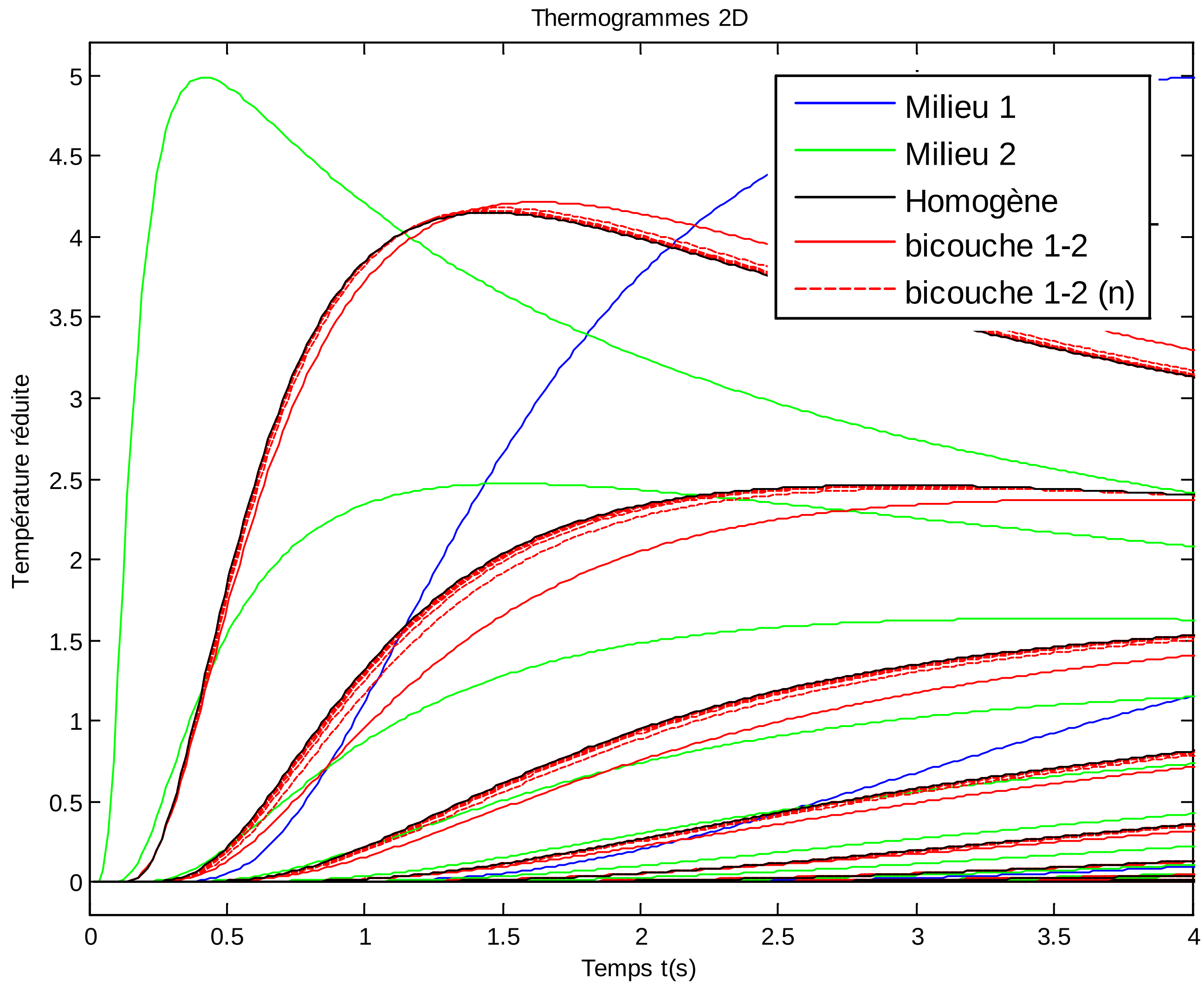
$$L = 20.e = 40mm$$

Le nombre de couches *n* est variable mais l'épaisseur totale du matériau est constante : $e = n(e_1 + e_2)$

$$\lambda_z = \frac{\lambda_1.\lambda_2}{\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)} \qquad \lambda_{x/y} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

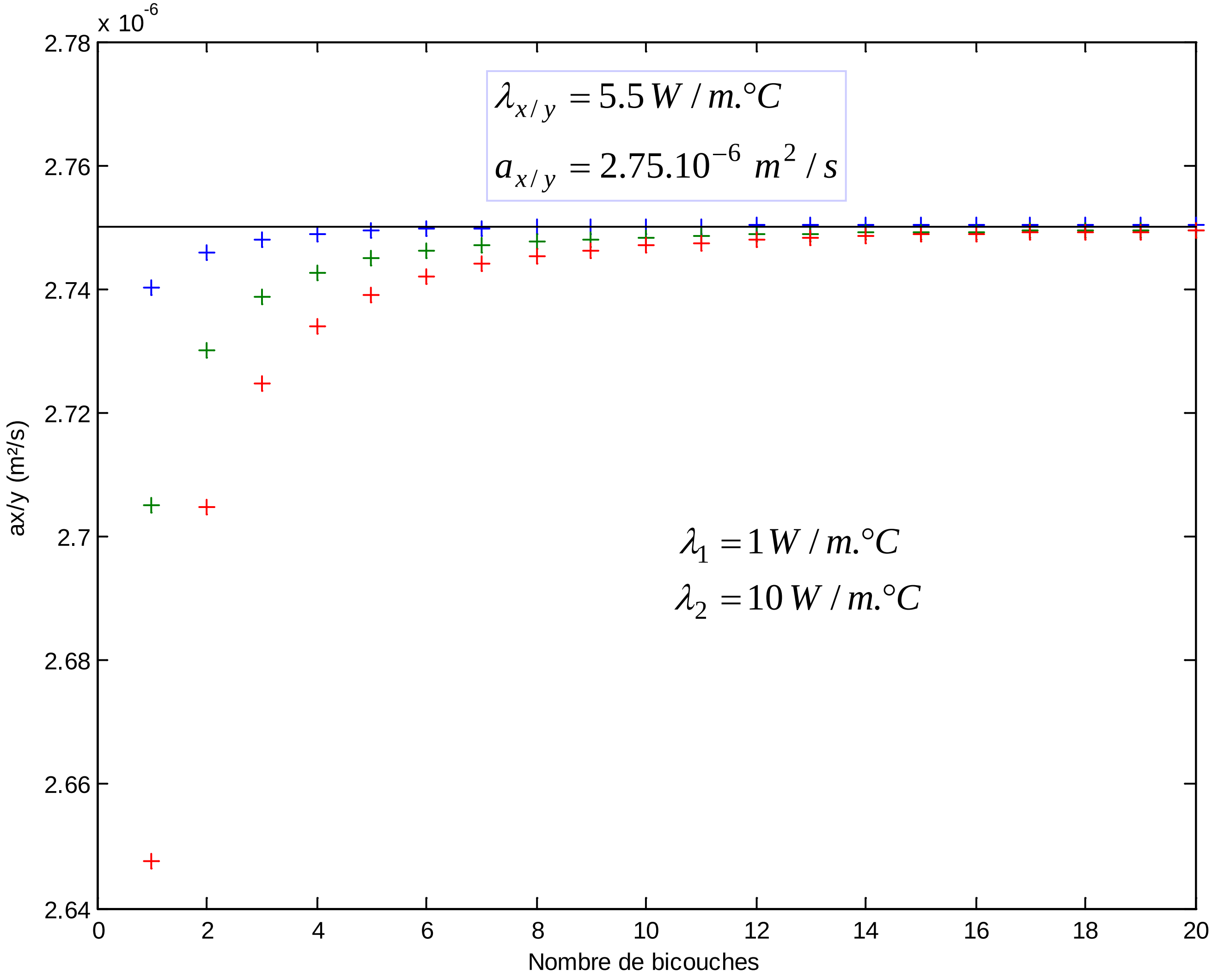
$$\lambda_1 = 1\,W/m.°C$$
$$\lambda_2 = 10\,W/m.°C$$

$$\lambda_{x/y} = 5.5\,W/m.°C$$
$$a_{x/y} = 2.75.10^{-6}\ m^2/s$$



Nancy-Université

Estimation 2D par une méthode de type moindres carrés
(1 valeur par harmoniques = ordre 2, 4 et 6)



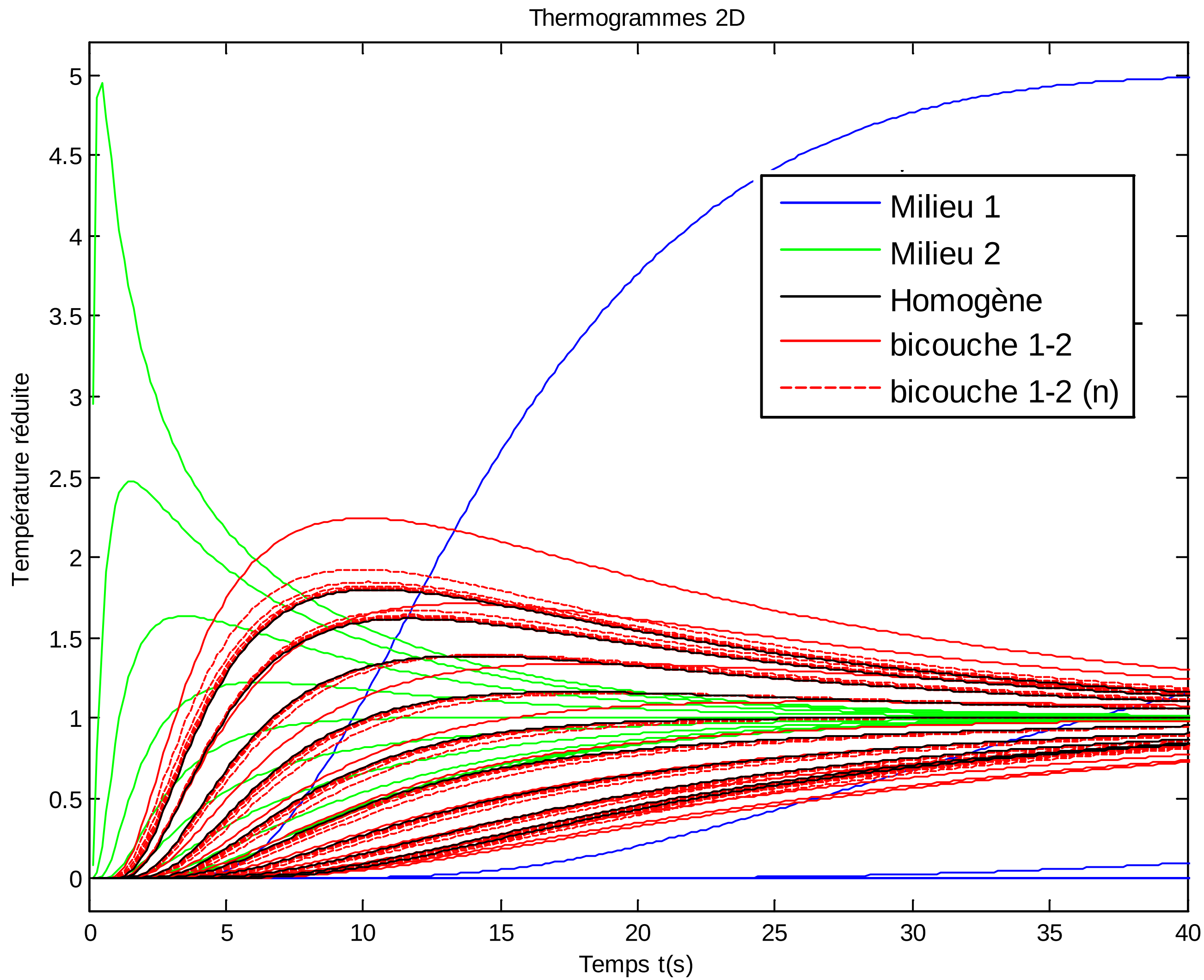
Nancy-U

$$\lambda_1 = 0.1\, W / m.°C$$

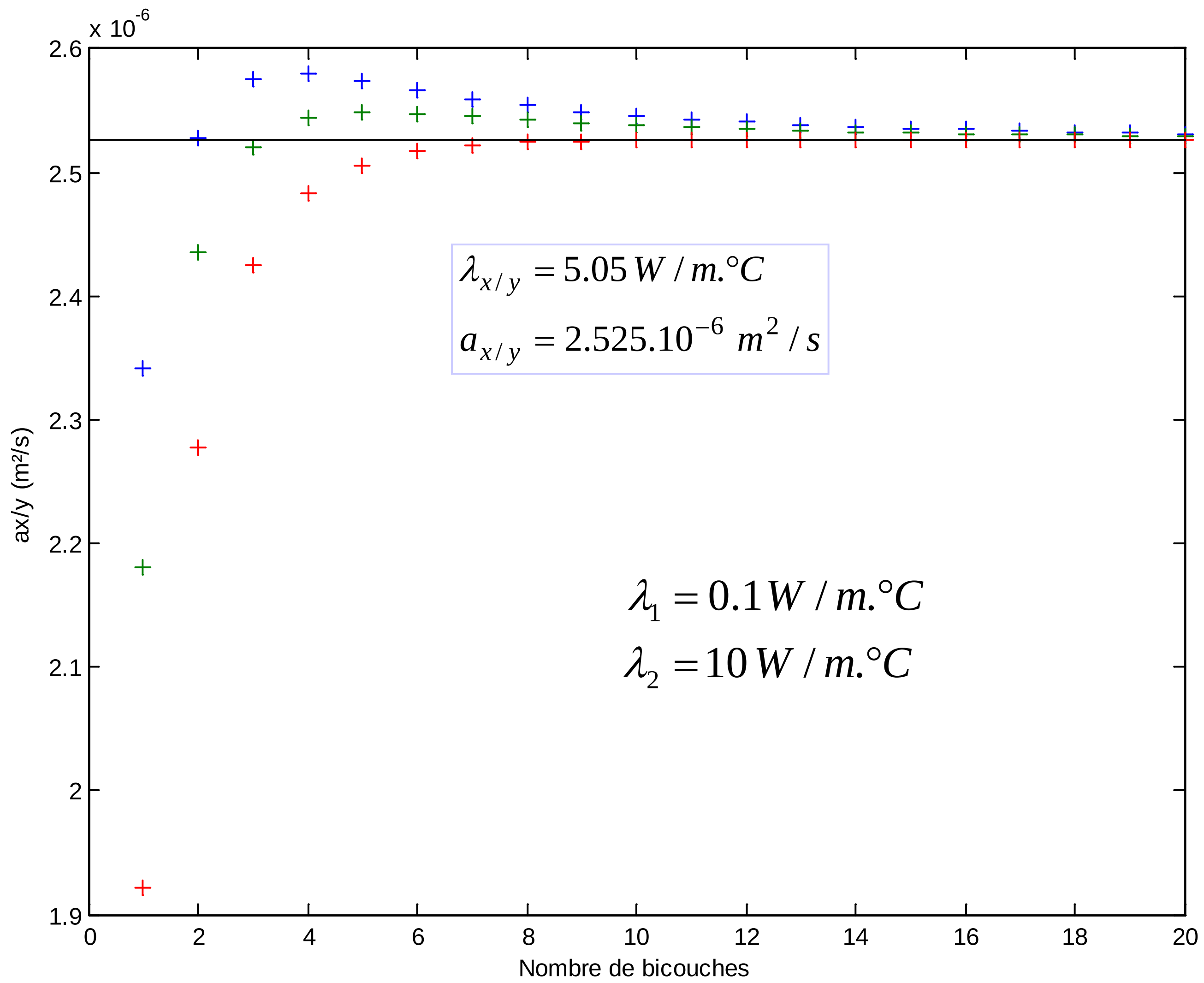
$$\lambda_2 = 10\, W / m.°C$$

$$\lambda_{x/y} = 5.05\, W / m.°C$$

$$a_{x/y} = 2.52.10^{-6}\ m^2 / s$$



Estimation 2D par une méthode de type moindres carrés
(1 valeur par harmoniques = ordre 2, 4 et 6)



CONCLUSION

ATTENTION !!!

Pas de règle évidente en fonction des conditions aux limites

Il faut calculer !

Thèse de Mouloud Amazouz (1987)