

Formulation Intégrale et Algorithmes de Monte Carlo à Collisions Nulles

M. Galtier^(a), S. Blanco^(b), M. El Hafi^(a), V. Eymet^(c), R. Fournier^(b)

(a) RAPSODEE - UMR 5302 - Albi

(b) LAPLACE - UMR 5213 - Toulouse

(c) LAB - UMR 5804 - Bordeaux

10 et 11 octobre 2012

6^e Journées d'Etudes en Rayonnement Thermique

Sommaire

Introduction aux ACN

- Monte Carlo et Milieux participants
- Historique des Algorithmes à Collisions Nulles
- Principe des ACN en formulation différentielle
- Et concrètement ?

Formulation et extension

- Description du cas d'étude
- De l'algorithme à collisions nulles "historique" ...
- ... à sa formulation intégrale
- ... à sa formulation intégrale
- Introduction de probabilités arbitraires
- Suppression de la contrainte sur \hat{k}

Généralisation

- Une autre équation de Fredholm
- Comparaison avec les ACN
- Les ACN appartiennent à une classe beaucoup plus grande

Conclusion

- Conclusion
- Quelques ordres de grandeur

Sommaire

Introduction aux ACN

Monte Carlo et Milieux participants
Historique des Algorithmes à Collisions Nulles
Principe des ACN en formulation différentielle
Et concrètement ?

Formulation et extension

Généralisation

Conclusion

Monte Carlo et Milieux participants

- En milieux participants, un terme d'atténuation apparaît :

$$\exp\left(-\int_0^\lambda d\sigma k_a(\sigma) + k_s(\sigma)\right) = \exp(-\tau(\lambda))$$

Ex : luminance $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ dans un milieu infini émettant/absorbant

- Formulation intégrale "Physique" du cas d'étude :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^\infty d\lambda k_a(\mathbf{x}-\lambda\boldsymbol{\omega}) \exp\left(-\int_0^\lambda d\sigma k_a(\mathbf{x}-\sigma\boldsymbol{\omega})\right) f^{eq}(\mathbf{x}-\lambda\boldsymbol{\omega})$$

- Méthodes de Monte Carlo : $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^\infty p_\Lambda(\lambda) w d\lambda$ avec :

$$p_\Lambda(\lambda) = k_a(\mathbf{x}-\lambda\boldsymbol{\omega}) \exp\left(-\int_0^\lambda d\sigma k_a(\mathbf{x}-\sigma\boldsymbol{\omega})\right) ; \quad w = f^{eq}(\mathbf{x}-\lambda\boldsymbol{\omega})$$

⇒ Inversion nécessaire de la cumulée de $p_\Lambda(\lambda)$: $\exp\left(-\int_0^\lambda d\sigma k_a(\mathbf{x}-\sigma\boldsymbol{\omega})\right) = \exp(-\tau(\lambda))$

- ↪ Si τ inversible : Aucun problème
- ↪ Si τ non inversible : Problème d'échantillonnage des λ (solutions imparfaites : maillage ou techniques numériques).

Historique des Algorithmes à Collisions Nulles

- Les ACN trouvent indépendamment leurs origines dans deux communautés :
 - Physique des Plasmas (*Skullerud, 1968*)
 - Neutronique (*Woodcock, 1965 & Coleman, 1968*)
- D'autres communautés vont les adopter :
 - Dynamique des fluides raréfiés (*Koura, 1986*)
 - Synthèse d'image (*Brown, 2003*) et Tomographie (*Rehfeld, 2008*)
- On rencontre ces techniques sous différentes dénominations.
- Technique peu employée à notre connaissance dans la communauté du transfert radiatif

Principe des ACN en formulation différentielle

- Equation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla f = -(k_a + k_s)cf + S + \int_{4\pi} k_s cf' p(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}'$$

- Principe** : introduction de nouvelles collisions (sans effets) dans l'ETR standard : les Collisions Nulles. Ces collisions fictives (de coefficient k_n) correspondent à des diffusions simples sans changement de direction ni d'énergie (d'où le δ).

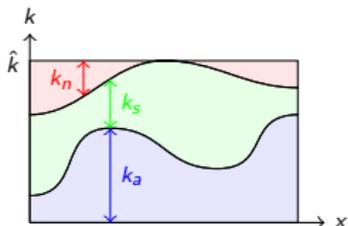
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla f = -(k_a + k_s + k_n)cf + S + \int_{4\pi} k_s cf' p(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' + \int_{4\pi} k_n cf' \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}'$$

- On notera désormais $\hat{k} = k_a + k_s + k_n$ le coefficient d'extinction modifié.

Et concrètement ?

Les ACN s'inscrivent dans les Méthodes de Monte Carlo \Rightarrow N réalisations aléatoires

- Définition du champ d'extinction modifié $\hat{k} = k_a + k_s + k_n$ majorant le champ d'extinction réel $k = k_a + k_s$ par l'ajout de collisions nulles (k_n).
Il doit être choisi de sorte à pouvoir inverser la nouvelle épaisseur optique : $\hat{\tau} = \int_0^\lambda d\sigma \hat{k}$



- Échantillonnage des libres parcours à partir du champ modifié \hat{k} (selon $p_T(\hat{\tau}) = e^{-\hat{\tau}}$).
- Évaluation du type de collision par le tir d'une valeur $r \in [0, 1]$ (selon $p_R(r)$ uniforme)
 - si $r < \frac{k_a}{k}$: Absorption \rightarrow définition du poids
 - si $\frac{k_a}{k} < r < \frac{k_a + k_s}{k}$: Diffusion \rightarrow nouveau libre parcours dans une nouvelle direction
 - si $r > \frac{k_a + k_s}{k}$: Collision Nulle \rightarrow nouveau libre parcours dans la même direction

Sommaire

Introduction aux ACN

Formulation et extension

Description du cas d'étude

De l'algorithme à collisions nulles "historique" ...

... à sa formulation intégrale

... à sa formulation intégrale

Introduction de probabilités arbitraires

Suppression de la contrainte sur \hat{k}

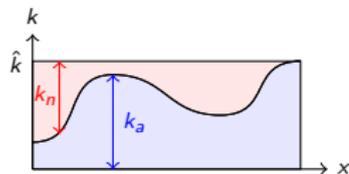
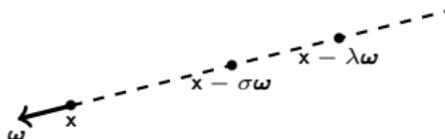
Généralisation

Conclusion

Description du cas d'étude

- Etude de la luminance $f(x, \omega)$ en un milieu infini émettant/absorbant.

$$f(x, \omega) = \int_0^{+\infty} d\lambda k_a(x-\lambda\omega) f^{eq}(x-\lambda\omega) e^{-\int_0^\lambda d\sigma k_a(x-\sigma\omega)}$$



- Si on était capable d'échantillonner les libres parcours, on ferait :

```

w_tot = 0;
foreach event i do
  | Beer sampling of λ;
  | w_tot = w_tot + w;
end
f̃_N = w_tot / N;
  
```

$$f(x, \omega) = \int_0^{+\infty} p_\Lambda(\lambda) d\lambda w$$

avec

$$p_\Lambda(\lambda) = k_a(x-\lambda\omega) e^{-\int_0^\lambda d\sigma k_a(x-\sigma\omega)}$$

$$w = f^{eq}(x-\lambda\omega)$$

De l'algorithme à collisions nulles "historique" ...

- On souhaite estimer $f(x, \omega)$ par ACN (estimateur : \tilde{f})

```

 $w_{tot} = 0;$ 
foreach event  $i$  do
   $j = 0; \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}; abs = false;$ 
  while  $abs = false$  do
    Beer sampling of  $\lambda_j$ ;
     $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - \lambda_j \boldsymbol{\omega};$ 
    Unif. sampling of  $r_{j+1}$ ;
    if  $r_{j+1} < \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{k(\mathbf{x}_{j+1})}$  then
       $abs = true;$ 
       $w_{tot} = w_{tot} + w_{j+1};$ 
    else
       $j = j + 1;$ 
    end
  end
 $\tilde{f}_N = w_{tot} / N;$ 

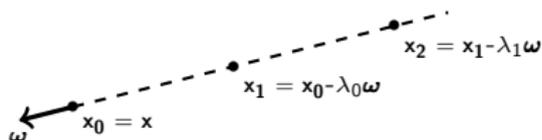
```

- Beer sampling :

$$p_{R_j}(\lambda_j) = \hat{k}(\mathbf{x}_j - \lambda_j \boldsymbol{\omega}) \exp\left(-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_j - \sigma_j \boldsymbol{\omega})\right)$$

- Uniform sampling : $p_{R_j}(r_j) = 1$

- $w_j = f^{eq}(\mathbf{x}_j)$



... à sa formulation intégrale

- Transposition directe de l'algorithme sous forme intégrale :

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}) = & \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 \int_0^1 \rho_{R_1}(r_1) dr_1 \left\{ \mathcal{H}\left(r_1 < \frac{k_a(\mathbf{x}_1)}{\hat{k}(\mathbf{x}_1)}\right) w_1 + \mathcal{H}\left(r_1 > \frac{k_a(\mathbf{x}_1)}{\hat{k}(\mathbf{x}_1)}\right) \right. \\
 & \times \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_1}(\lambda_1) d\lambda_1 \int_0^1 \rho_{R_2}(r_2) dr_2 \left\{ \mathcal{H}\left(r_2 < \frac{k_a(\mathbf{x}_2)}{\hat{k}(\mathbf{x}_2)}\right) w_2 + \mathcal{H}\left(r_2 > \frac{k_a(\mathbf{x}_2)}{\hat{k}(\mathbf{x}_2)}\right) \right. \\
 & \left. \left. \left. \times \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_2}(\lambda_2) d\lambda_2 \int_0^1 \rho_{R_3}(r_3) dr_3 \dots \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

- On a donc une expression de la forme :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 [P_1 w_1 + (1 - P_1) I_1]$$

Avec :

- $P_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j)}{\hat{k}(\mathbf{x}_j)}$
- $w_j = f^{eq}(\mathbf{x}_j)$
- $I_j = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_j}(\lambda_j) d\lambda_j [P_{j+1} w_{j+1} + (1 - P_{j+1}) I_{j+1}]$

- On peut donc écrire en toute généralité :

$$f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda_j \hat{k}(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_{j-\sigma_j} \boldsymbol{\omega})} \left[\frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) + \left(1 - \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})}\right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

... à sa formulation intégrale

- La formulation récursive ainsi établie

$$f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda_j \hat{k}(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_j - \sigma_j \boldsymbol{\omega})} \left[\frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) + \left(1 - \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} \right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

peut être réécrite comme une simple équation de Fredholm :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\int_0^{\lambda} d\sigma \hat{k}(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega})} \left[k_a(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) + (\hat{k}(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) - k_a(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega})) f(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

- Or les collisions nulles ne sont que des diffusions vers l'avant :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\int_0^{\lambda} d\sigma k_a(\mathbf{x} - \sigma \boldsymbol{\omega}) + k_n(\mathbf{x} - \sigma \boldsymbol{\omega})} \left[k_a(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) + k_n(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') f(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \right]$$

⇒ Formulation intégrale standard d'un cas purement absorbant et diffusant.

Introduction de probabilités arbitraires

- A partir de

$$f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda_j \hat{k}(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_j - \sigma_j \boldsymbol{\omega})} \left[\frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) + \left(1 - \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})}\right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

on peut introduire pour le $j + 1^{ieme}$ libre parcours une probabilité arbitraire non nulle P_{j+1} :

$$f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} P_{j+1}(\lambda_j) d\lambda_j \left[P_{j+1} \left(\frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} \frac{1}{P_{j+1}} f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) \right) + (1 - P_{j+1}) \left(\left(1 - \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})}\right) \frac{1}{1 - P_{j+1}} \right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

- Formalisme MMC : $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} \hat{\rho}_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 \left[P_1 w_1 + (1 - P_1) t_1 \right]$ avec :

$$w_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j)}{\hat{k}(\mathbf{x}_j)} \frac{1}{P_j} f^{eq}(\mathbf{x}_j) \prod_{m=1}^{j-1} \left(\frac{\hat{k}(\mathbf{x}_j) - k_a(\mathbf{x}_j)}{\hat{k}(\mathbf{x}_j)} \frac{1}{1 - P_j} \right) \quad \boxed{P_j = \text{arbitraire}}$$

⇒ On garde donc exactement le même algorithme, seules les probabilités et les poids changent.

Suppression de la contrainte sur \hat{k}

- Lorsque \hat{k} majorait le champ réel k_a , P_j était définie par :

$$P_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j)}{\hat{k}(\mathbf{x}_j)}$$

- Le champ \hat{k} devait donc majorer k_a en tout point \Rightarrow très limitant.
- On choisi désormais arbitrairement la valeur de P_j . Il n'est alors plus nécessaire que le champ d'extinction modifié \hat{k} majore le champ réel k_a .
- Une proposition :

$$P_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j)}{k_a(\mathbf{x}_j) + |\hat{k}(\mathbf{x}_j) - k_a(\mathbf{x}_j)|}$$

- Lorsque \hat{k} sera majorant, on gardera rigoureusement le même algorithme historique.
- Sinon, on aura un algorithme équivalent où seuls les poids seront modifiés (idéal pour des cas ponctuels ou le champ modifié n'est pas majorant).

Sommaire

Introduction aux ACN

Formulation et extension

Généralisation

Une autre équation de Fredholm

Comparaison avec les ACN

Les ACN appartiennent à une classe beaucoup plus grande

Conclusion

Une autre équation de Fredholm

- ETR sous forme différentielle (sans diffusion ni dépendance temporelle) :

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla f = -k_a f + k_a f^{eq}$$

- Par intégration, on obtient une nouvelle équation de Fredholm :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = f(\mathbf{x} - L\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \int_0^L d\lambda [k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) - k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})]$$

- On considère qu'il n'y a pas de condition aux frontières :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^L d\lambda \left[k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) - k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

- On pose des pdf et probabilités arbitraires :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^L p_\Lambda(\lambda) d\lambda \left[P(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) \left(\frac{k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega})}{p_\Lambda(\lambda) P(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega})} \right) + (1 - P(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega})) \left(- \frac{k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega})}{p_\Lambda(\lambda) (1 - P(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}))} \right) f(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

Une autre équation de Fredholm

- On peut reformuler la dernière équation

$$f(x, \omega) = \int_0^L \rho_\Lambda(\lambda) d\lambda \left[P(x-\lambda\omega) \left(\frac{k_a(x-\lambda\omega) f^{eq}(x-\lambda\omega)}{\rho_\Lambda(\lambda) P(x-\lambda\omega)} \right) + (1 - P(x-\lambda\omega)) \left(-\frac{k_a(x-\lambda\omega)}{\rho_\Lambda(\lambda)(1 - P(x-\lambda\omega))} \right) f(x-\lambda\omega, \omega) \right]$$

en une expression récursive

$$f(x_j, \omega) = \int_0^L \rho_\Lambda(\lambda_j) d\lambda_j \left[P_{j+1} \left(\frac{k_a(x_{j+1}) f^{eq}(x_{j+1})}{\rho_\Lambda(\lambda_j) P_{j+1}} \right) + (1 - P_{j+1}) \left(-\frac{k_a(x_{j+1})}{\rho_\Lambda(\lambda_j)(1 - P_{j+1})} \right) f(x_{j+1}, \omega) \right]$$

- On retrouve bien une formulation du type :

$$f(x, \omega) = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 \left[P_1 w_1 + (1 - P_1) I_1 \right]$$

avec

$$w_j = \frac{k_a(x_j) f^{eq}(x_j)}{\rho_\Lambda(\lambda_{j-1}) P_j} \prod_{m=1}^{j-1} \left[-\frac{k_a(x_m)}{\rho_\Lambda(\lambda_{m-1})(1 - P_m)} \right]$$

$$I_j = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_j}(\lambda_j) d\lambda_j \left[P_{j+1} w_{j+1} + (1 - P_{j+1}) I_{j+1} \right]$$

⇒ Les ACN interviennent également pour supprimer l'alternance de signe du poids

Comparaison avec les ACN

- Comparaison de l'expression récursive de $f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega})$ à partir de l'ETR sous forme diff. et à partir des ACN historiques. On pose $e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_j, \sigma_j; \boldsymbol{\omega})} = e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}\sigma}$

$$\int_0^L \rho_\Lambda(\lambda_j) d\lambda_j \left[P_{j+1} \left(\frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1}) f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1})}{\rho_\Lambda(\lambda_j) P_{j+1}} \right) + (1 - P_{j+1}) \left(-\frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\rho_\Lambda(\lambda_j)(1 - P_{j+1})} \right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

vs

$$\int_0^L \rho_\Lambda(\lambda_j) d\lambda_j \left[P_{j+1} \left(\frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1}) f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}\sigma}}{\rho_\Lambda(\lambda_j) P_{j+1}} \right) + (1 - P_{j+1}) \left(\frac{k_n(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}\sigma}}{\rho_\Lambda(\lambda_j)(1 - P_{j+1})} \right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

- Expression identique de type :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 \left[P_1 w_1 + (1 - P_1) I_1 \right]$$

- Avec la même définition de I_j :

$$I_j = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_j}(\lambda_j) d\lambda_j \left[P_{j+1} w_{j+1} + (1 - P_{j+1}) I_{j+1} \right]$$

- Seuls des poids w_j différent :

$$\frac{k_a(\mathbf{x}_j) f^{eq}(\mathbf{x}_j)}{\rho_\Lambda(\lambda_{j-1}) P_j} \prod_{m=1}^{j-1} \left[-\frac{k_a(\mathbf{x}_m)}{\rho_\Lambda(\lambda_{m-1})(1 - P_m)} \right]$$

vs

$$\frac{k_a(\mathbf{x}_j) f^{eq}(\mathbf{x}_j) e^{-\int_0^{\lambda_{j-1}} d\sigma_j \hat{k}\sigma}}{\rho_\Lambda(\lambda_{j-1}) P_j} \prod_{m=1}^{j-1} \left[\frac{k_n(\mathbf{x}_m) e^{-\int_0^{\lambda_{m-1}} d\sigma \hat{k}\sigma}}{\rho_\Lambda(\lambda_{m-1})(1 - P_m)} \right]$$

Les ACN appartiennent à une classe beaucoup plus grande

$$w_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j) f^{eq}(\mathbf{x}_j) e^{-\int_0^{\lambda_j-1} d\sigma_j \hat{k}_\sigma}}{\rho_\Lambda(\lambda_{j-1}) P_j} \prod_{m=1}^{j-1} \left[\frac{k_n(\mathbf{x}_m) e^{-\int_0^{\lambda_{m-1}} d\sigma \hat{k}_\sigma}}{\rho_\Lambda(\lambda_{m-1})(1 - P_m)} \right]$$

- On a montré que l'introduction de k_n intervient pour :
 - permettre d'échantillonner les libres parcours en milieux hétérogènes
 - corriger l'alternance de signe présente dans l'équation naturelle de Fredholm tirée de l'ETR sous forme différentielle.
 - A partir de ce constat, on peut donc inscrire les ACN historiques dans une famille bien plus large, dans laquelle il est désormais possible de jouer sur :
 - les pdfs
 - les probabilités (type de collision)
 - les poids
 - En outre, chacune de ces modifications peut être faite indépendamment des autres
- ⇒ Atout certain pour les approches d'échantillonnage par importance (ex : approches de variance nulle).

Conclusion

- Les ACN peuvent être vus comme une simple **technique d'échantillonnage des libres parcours**.
- Ils permettent de traiter des **cas hétérogènes sans user de maillage** ou de lourdes techniques numériques.
- On conserve le caractère de **calcul de référence** des Méthodes de Monte-Carlo.
- Quelques **manipulations de formulation intégrale** nous permettent de nous affranchir de contraintes souvent critiquées par les utilisateurs des ACN.
- D'autres travaux d'intégrales font rentrer **les ACN dans une famille de MMC beaucoup plus grande** pour lesquelles il est possible de jouer sur tous les paramètres (pdf, probabilités, poids...).
- Les **approches de variance nulle et les études de sensibilités paramétriques** peuvent ainsi être menées avec succès par les ACN.

Quelques ordres de grandeur

- Calcul sonde dans une configuration 3D parallélépipédique, où les champs hétérogènes de k_a , k_s et T sont donnés dans le milieu via 8 positions de référence puis interpolés. Les parois sont elles aussi décrites par des champs de température et de réflectivité non-uniformes.

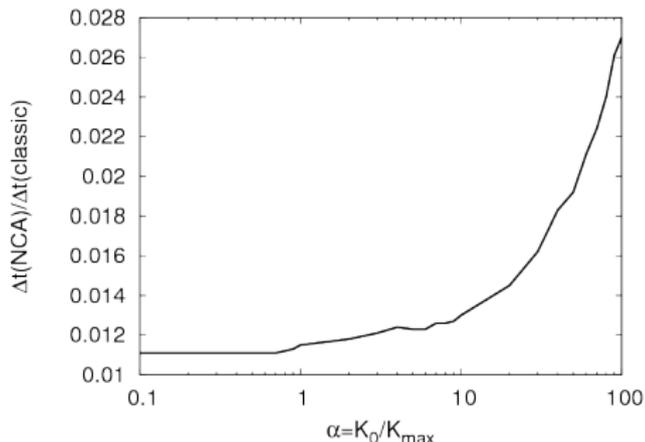


FIGURE : Evolution du ratio temps de calcul ACN / temps de calcul algorithme classique en fonction de alpha, le rapport entre k_0 (champ d'extinction modifié uniforme) et la valeur max de du champ d'extinction réel dans le volume.

Quelques ordres de grandeur

- Calcul sonde dans une configuration 3D parallélépipédique, où les champs hétérogènes de k_a , k_s et T sont donnés dans le milieu via 8 positions de référence puis interpolés. Les parois sont elles aussi décrites par des champs de température et de réflectivité non-uniformes.

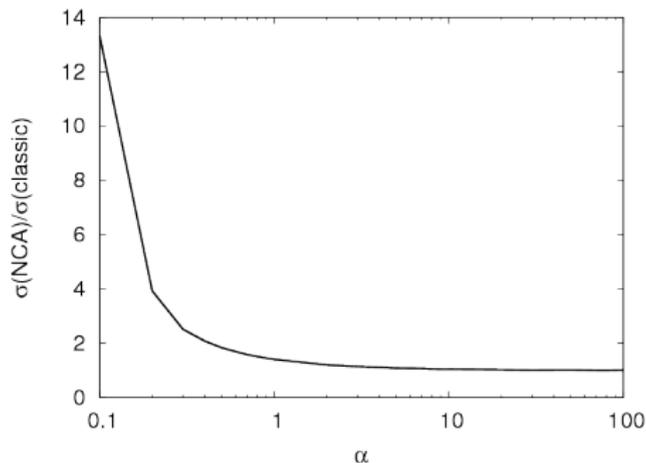


FIGURE : Rapport des écart-types ACN/ algorithme classique, en fonction du même alpha.