

Identification de réponses impulsionnelles et construction de capteurs virtuels en transfert conductif et/ou advectif linéaire dans les systèmes matériels hétérogènes et invariants en temps

Denis Maillet

Université de Lorraine & CNRS

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMETA)

Journée SFT: «Développements récents en approches analytiques et/ou hybrides et d'identification en vue de la caractérisation et de la résolution de problèmes complexes de diffusion »

Paris, 20 juin 2019

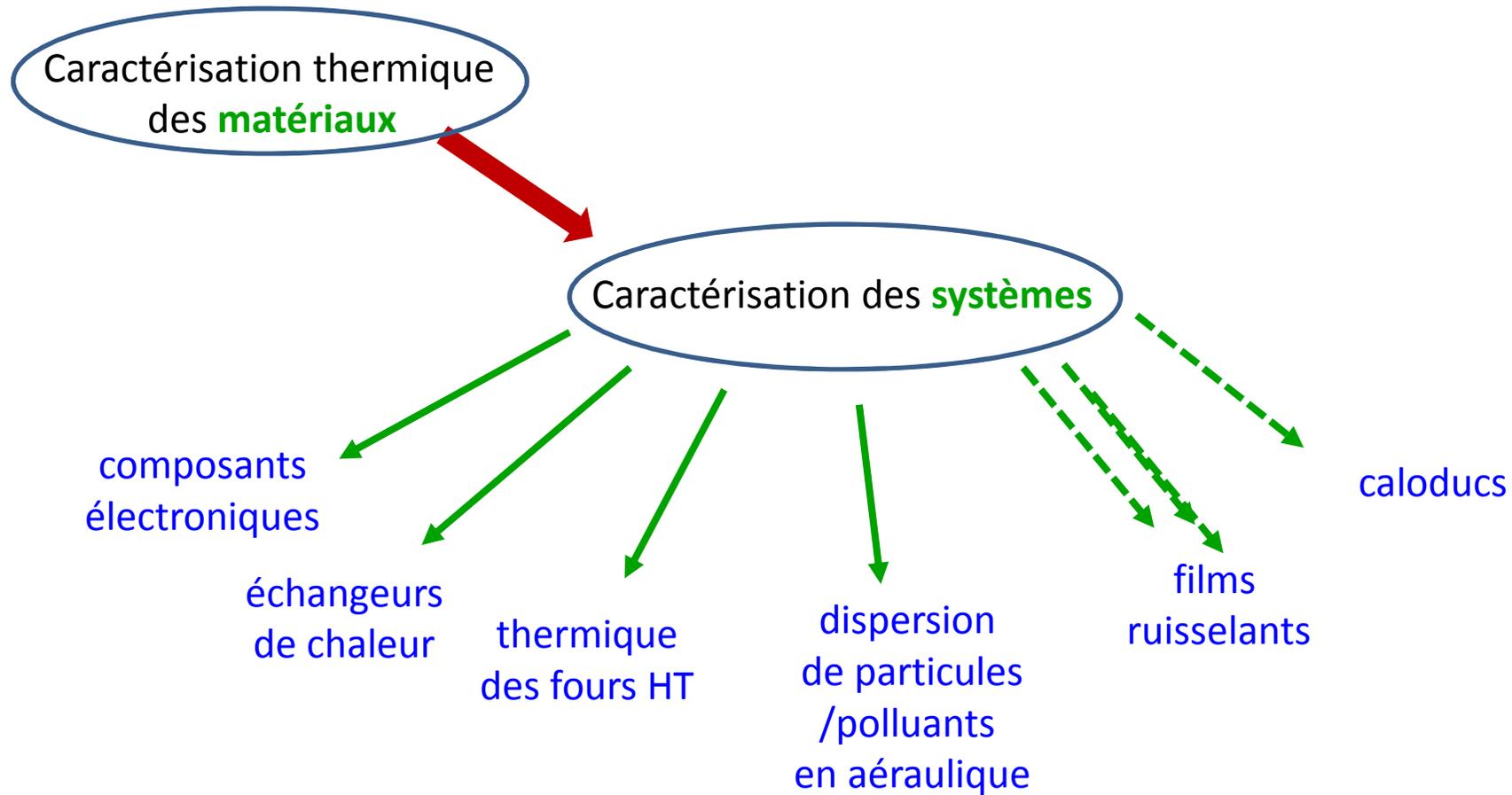


Plan de l'exposé

- 1. Introduction**
- 2. Transformée de Laplace et équation de la chaleur instationnaire «LIT »**
- 3. Techniques d'estimation de fonction de transfert: réduction de modèle ou identification**
- 4. Réponse forcée des systèmes Linéaires à coefficients Invariants en Temps (LIT) 3D à mono-excitation séparable: cas des modèles advectifs et diffusifs**
- 5. Application à la caractérisation thermique des échangeurs de chaleur**
- 6. Conclusions et perspectives**

1. Introduction

Intérêt des modèles convolutifs



moyennant certaines hypothèses si les transferts sont non-linéaires et/ou couplés....

2. Transformée de Laplace et équation de la chaleur instationnaire «LIT »

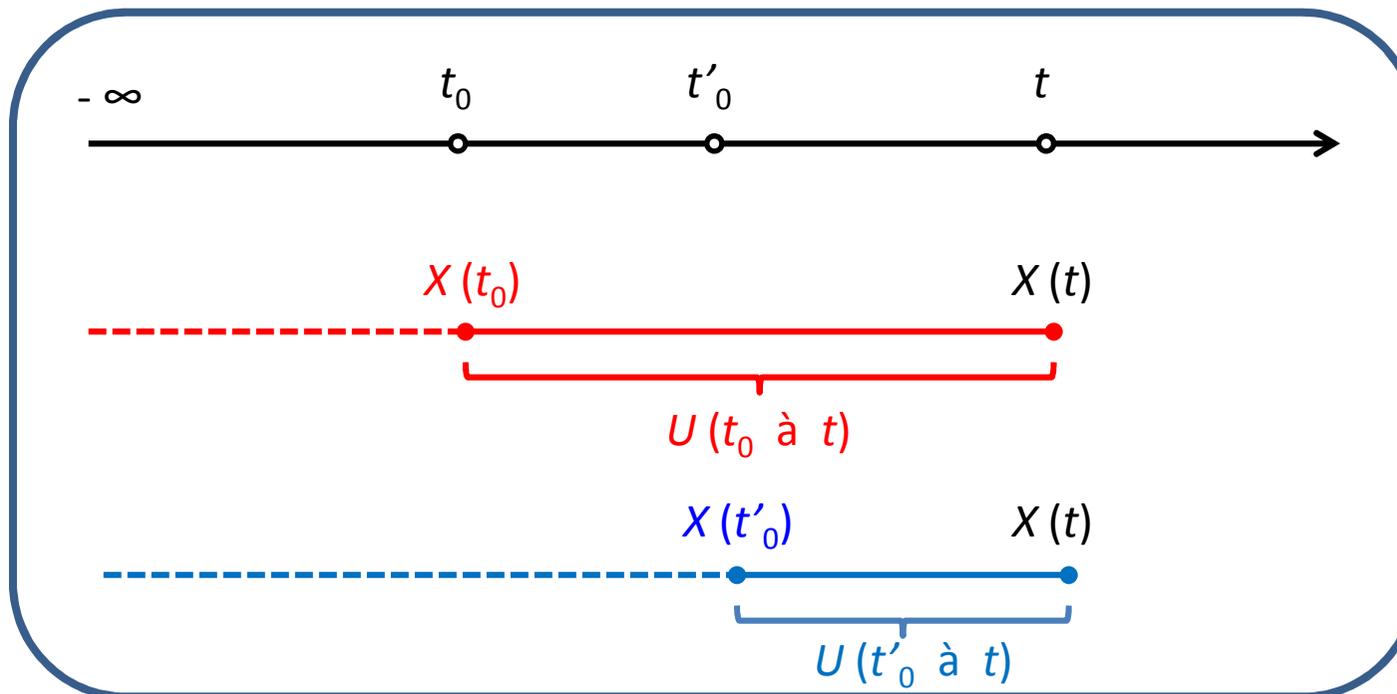
2 approches usuelles en **dynamique des systèmes** :

- Analyse de Fourier: décomposition du signal sur base de fonctions périodiques multifréquences
- Analyse de Laplace: intègre la notion de **CAUSALITÉ** → existence d'un **temps initial t_0** ARBITRAIRE

$X(t)$: Etat du système à instant t = conséquence excitations passées

$U(t)$: Excitations du système à l'instant t

$X(t) =$ Fonction ($t, t_0 ; X(t_0), U(t_0 \text{ à } t)$, paramètres structurels)



Exemple mathématique



Modèle du petit corps en thermique (0D)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + a y = b u ; a \text{ et } b : \text{ constantes} \\ y(t=0) = y_0 \end{cases}$$

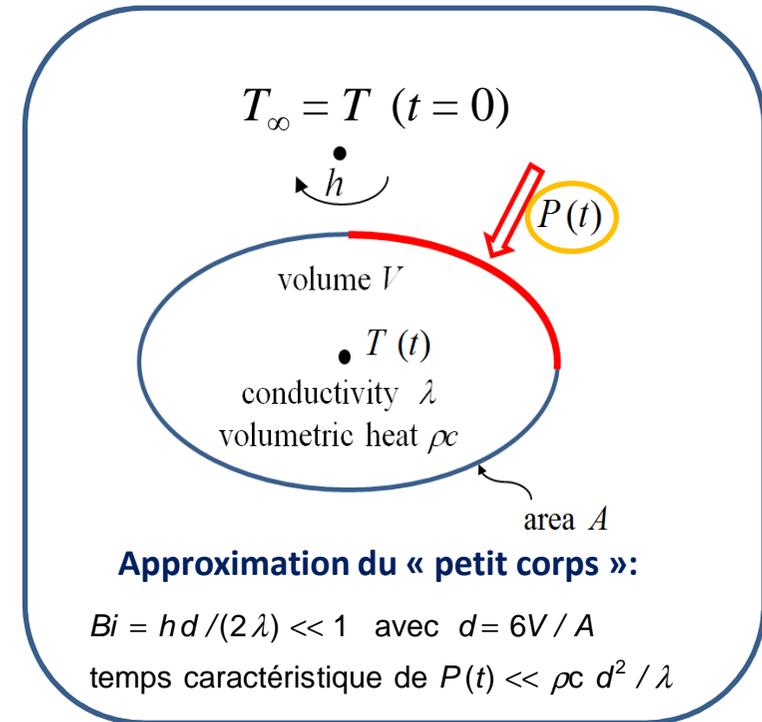
$$\bar{y}(p) = \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-p t) y(t) dt$$

variable de Laplace

Propriété 1 :

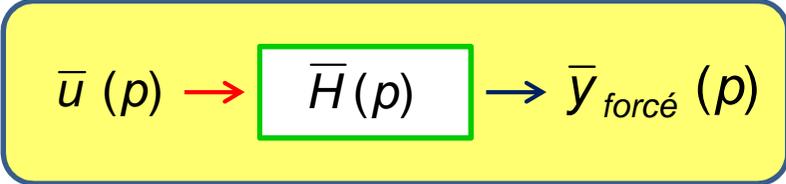
$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = p \bar{y} - y_0$$

$$\bar{y}(p) = \frac{b}{p+a} \bar{u}(p) + \frac{1}{p+a} y_0 = \bar{y}_{\text{forcé}}(p) + \bar{y}_{\text{relax}}(p)$$



$$\bar{y}_{forcé}(p) = \bar{H}(p) \bar{u}(p)$$


 Fonction de transfert



$$\bar{u}(p) \rightarrow \bar{H}(p) \rightarrow \bar{y}_{forcé}(p)$$

Propriété 2 : $\mathcal{L}^{-1} [\bar{H}(p) \bar{u}(p)] = H(t) * u(t) \equiv \int_0^t H(t-t') u(t') dt' = \int_0^t H(t') u(t-t') dt'$

Produit de convolution

$$y_{forcé}(t) = H(t) * u(t) = \int_0^t H(t-t') u(t') dt'$$

 **Sortie**
Réponse
(conséquence)

 **Réponse**
Impulsionnelle
(fonction de Green)

 **Entrée**
Excitation
(cause)

Forme vectorielle /matricielle d'un produit de convolution

Domaine temporel continu:

$$y(t) = H(t) * u(t)$$

$$M(z) \equiv \Delta t \begin{bmatrix} z_1 & & & & & \\ z_2 & z_1 & & & & 0 \\ z_3 & z_2 & z_1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ z_m & z_{m-1} & z_{m-2} & \cdots & z_1 & \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \vdots \\ y(t_m) \end{pmatrix}$$

valeurs instantanées (échantillonnage)

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

valeurs moyennées sur chaque intervalle temporel (paramétrisation en fonctions constantes par morceaux, puis quadrature)

$$z_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} z(t) dt \approx \frac{1}{2} (z(t_{i-1}) + z(t_i))$$

pour $z(t) = H(t)$ ou $u(t)$

$M(z)$: matrice de Toeplitz triangulaire inférieure

Réponse impulsionnelle $H(t) \geq 0 \rightarrow$ coefficients de $M(H)$ sont **non-negatifs**

$$y = M(u) H = M(H) u$$

Commutativité

Modèle pour:

- 1) Identification modèle réduit
- 2) Estimation de source ou de pseudo-source

Fonctions de transfert: modèle 1D

Equation de la chaleur $\left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right.$

Condition initiale $\left\{ \theta = 0 \text{ at } t = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq e \right.$

$$\varphi = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(p) \\ \bar{q}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_2(p) \\ \bar{\varphi}_2(p) \end{bmatrix}$$

matrice QP

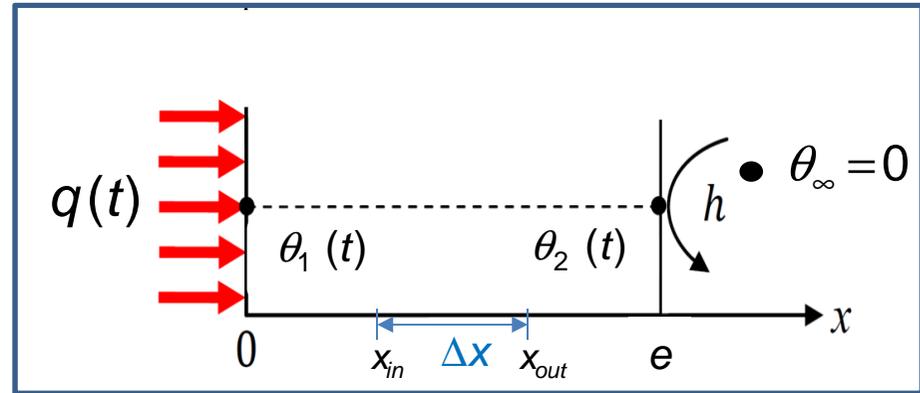
$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_2(p) \\ \bar{\varphi}_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_2(p) \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrice QP

Solution dans espace de Laplace \rightarrow

Forme: $\bar{y} = \bar{H} \bar{u}$ avec $u(t) = q(t)$
source

mais aussi: $\bar{y} = \bar{H} \bar{u}$ avec $u(t) = \theta_1(t)$
pseudo-source



réponse

réponse

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(p) \\ \bar{q}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_2(p) \\ 0 \end{bmatrix}$$

excitation

$$\bar{\varphi}_2(p) = h \bar{\theta}_2(p)$$

réponse

3 équations et 3 inconnues

$$\bar{\theta}_1 = \frac{A_T}{C_T} \bar{q} ; \bar{\theta}_2 = \frac{1}{C_T} \bar{q} ; \bar{\varphi}_2 = \frac{h}{C_T} \bar{q}$$

impédance
 $H = Z$

impédance
 $H = Z$

transmittance
 $H = W$

$$\bar{\theta}_2 = \frac{1}{A_T} \bar{\theta}_1 ; \bar{\varphi}_2 = \frac{h}{A_T} \bar{\theta}_1$$

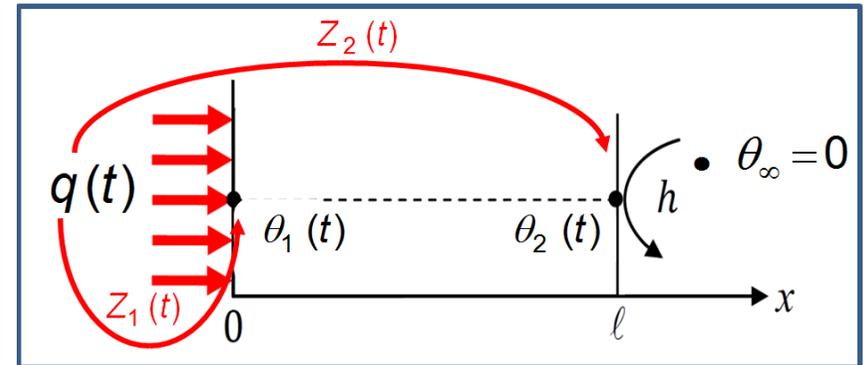
transmittance
 $H = W$

transmittance
 $H = Y$

Cas spécifique (impédance):

$$u \equiv q ; y \equiv \theta (\theta_1 \text{ or } \theta_2) ; H \equiv Z (Z_1 \text{ or } Z_2)$$

$$\bar{\theta} = \bar{Z} \bar{q} \Leftrightarrow \theta(t) = \int_0^t Z(t-t') q(t-t') dt'$$



Question: réciproque vraie ?

$$\bar{q} = \bar{Y} \bar{\theta} \text{ avec } \bar{Y} = 1/\bar{Z} \quad ?$$

$$q(t) = \int_0^t Y(t-t') \theta(t-t') dt' \quad ?$$



2^{ème} principe de la thermodynamique:

$$Z(t) \geq 0 \quad (\text{réponse impulsionnelle})$$

Propriété 3 :

$$\frac{d\bar{Z}}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\int_0^\infty \exp(-p t) Z(t) dt \right) = -p \bar{Z}(p) \leq 0 \Rightarrow \frac{d\bar{Y}}{dp} = \frac{d(1/\bar{Z})}{dp} \geq 0$$

Resultat: une **admittance thermique** $Y(t)$ (conséquence en source de puissance d'une réponse en température) **n'existe pas**

Cette puissance, ici une densité de flux, est la solution d'un problème **inverse (mal-posé)**

Propriété de causalité:

Source de puissance (cause) **précède** toute variation de **température** (conséquence) dans le système

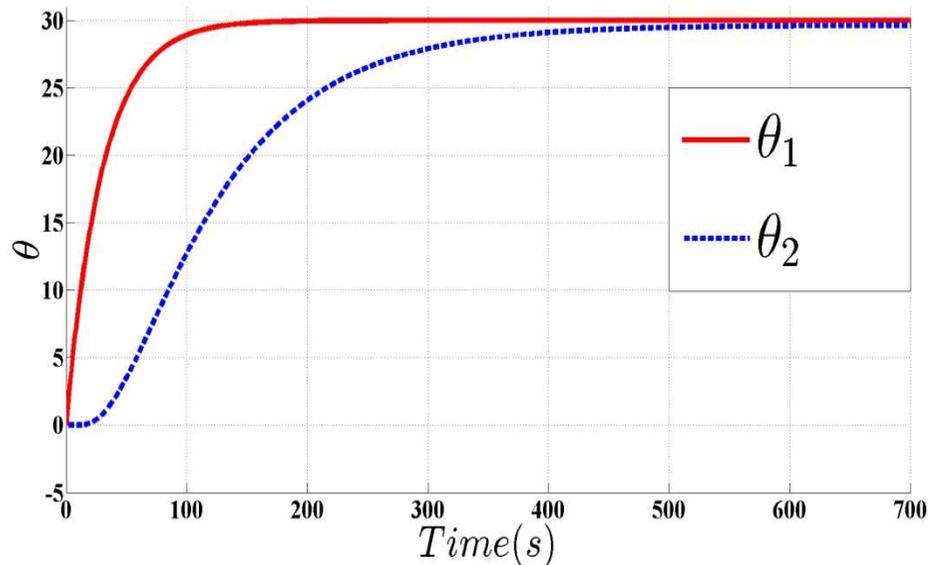
3. Techniques d'estimation de fonction de transfert: réduction de modèle ou identification

$$\theta_1(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \theta_1^{ss} \quad \text{avec} \quad \tau = 30 \text{ s} \quad ; \quad \theta_1^{ss} = 30 \text{ }^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad \Delta t = 0.5 \text{ s}$$

| t_f | e | h | λ | ρc |
|-------|------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| (s) | (mm) | (W.m ⁻² .K ⁻¹) | (W.m ⁻¹ .K ⁻¹) | (kJ.m ⁻³ .K ⁻¹) |
| 700 | 50 | 10 | 43 | 3666 |

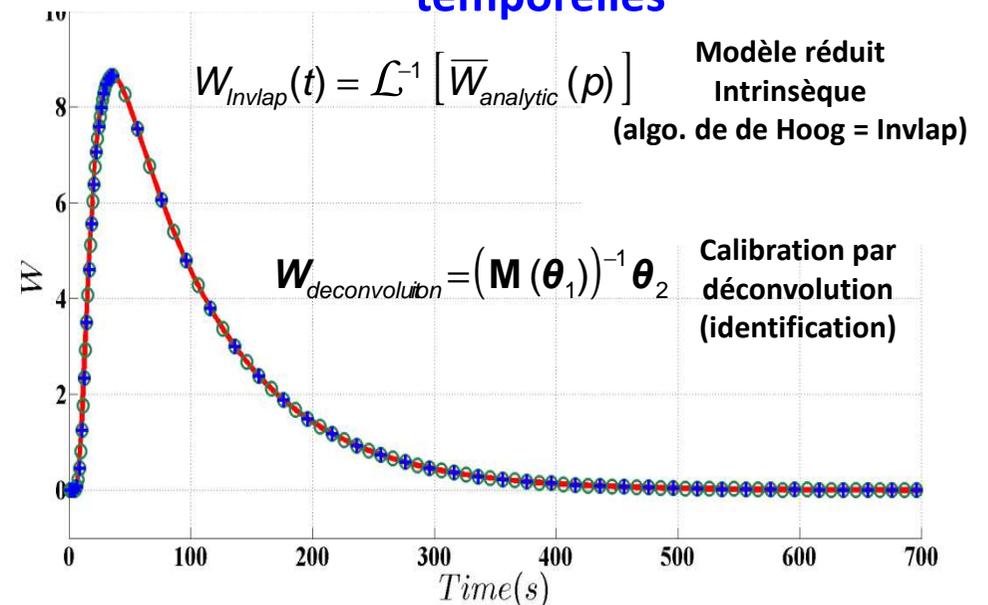
Comparison: W analytique et W identifié à partir de profils synthétiques (COMSOL)

Sorties en température du modèle détaillé (COMSOL)



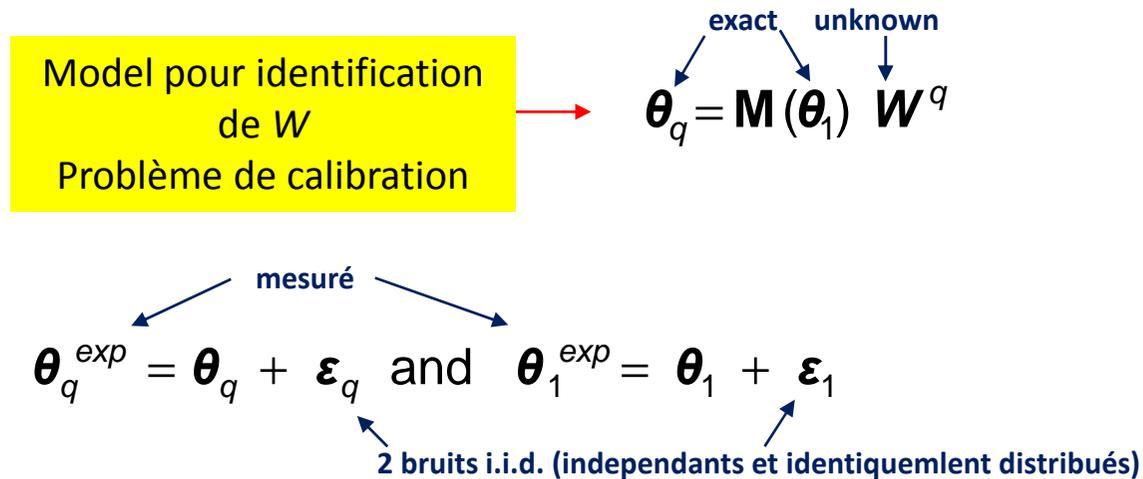
Profils de temperature (COMSOL)

Validation croisée sur les transmittances temporelles



W Analytique et identifié

Estimation de fonction de transfert: réduction de modèle ou **identification (mesures)**



- Moindres carrés ordinaires (linéaires) : $\hat{W}^q = \left(\mathbf{M}(\theta_1^{exp}) \right)^{-1} \theta_q^{exp}$

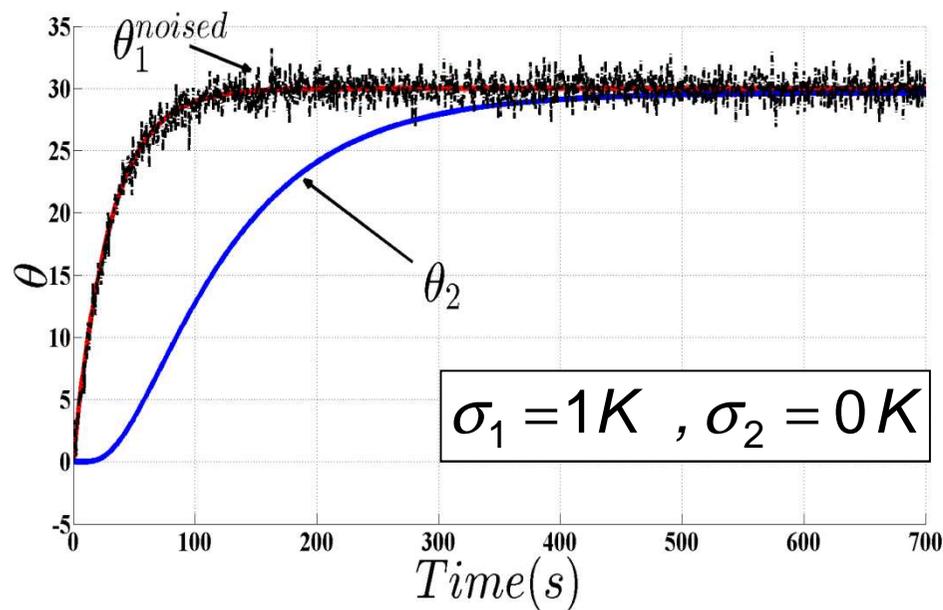
Problème inverse « mal-posé »:
Inversion nécessite une **regularisation**
Ici: SVD tronquée ou Tikhonov d'ordre 0

- avec le principe de non-contradiction (discrepancy principle, Morozov)

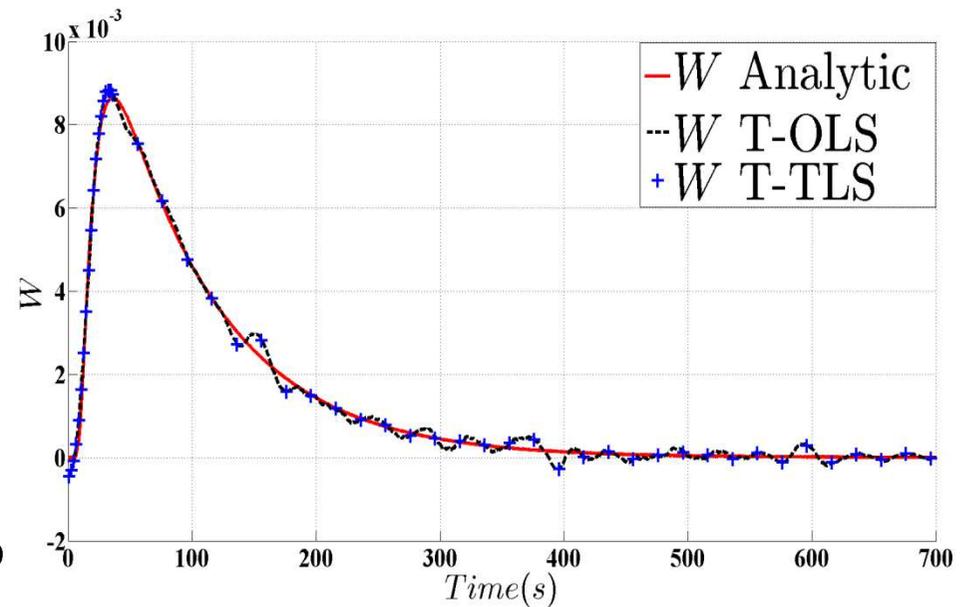
Effets du bruit sur la calibration (déconvolution)

Comparaison: W analytique et W identifié à partir de profils synthétiques (COMSOL) et bruitage

θ_1 bruitée



Profils de temperature (COMSOL)

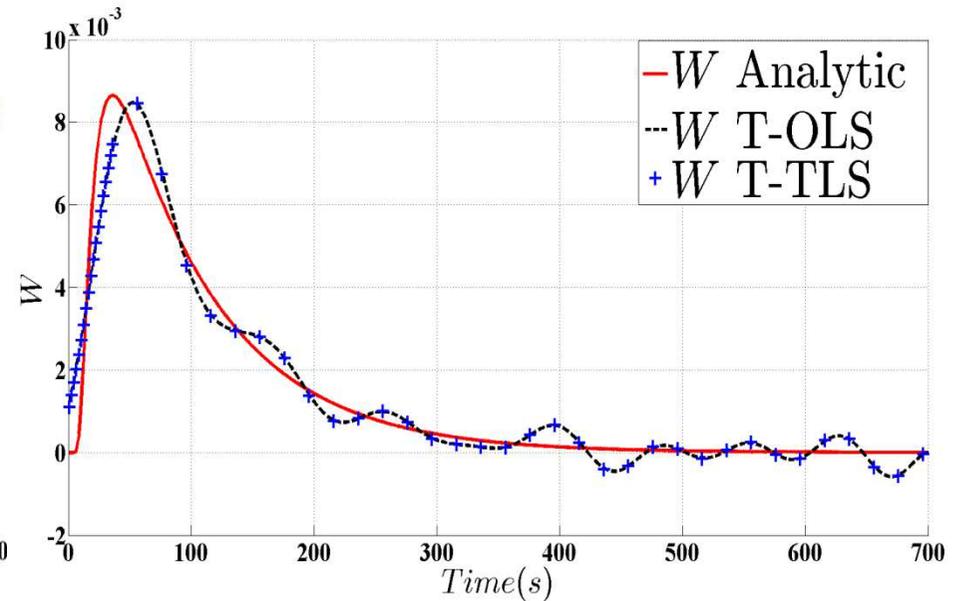
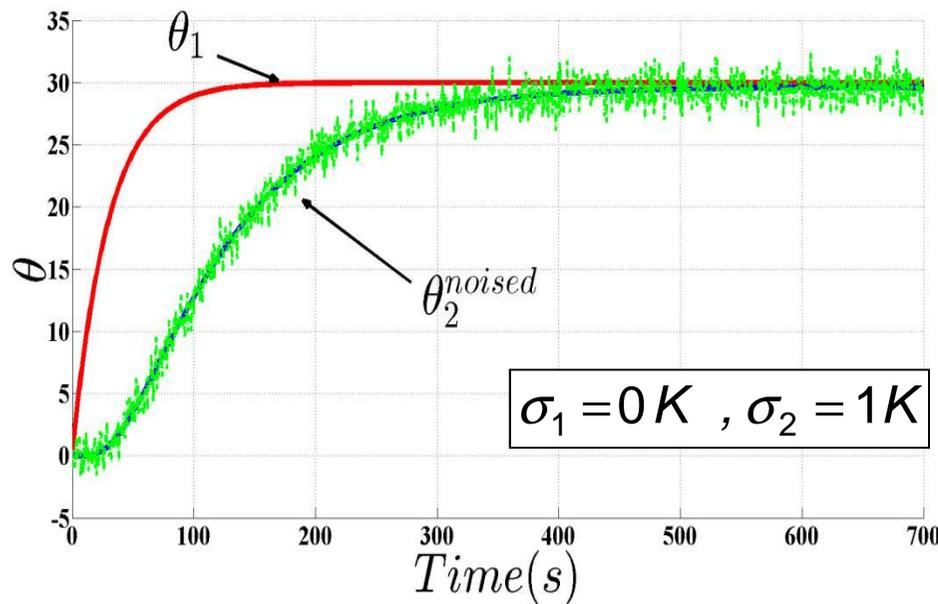


W analytique et identifié (avec regularisation)

Rapport bruit/signal: $\left\| \theta_1^{noised} - \theta_1^{exact} \right\| / \left\| \theta_2^{noised} \right\| = 3.41 \%$

Comparaison: W analytique et W identifié à partir de profils synthétiques (COMSOL) et bruitage

θ_2 bruitée



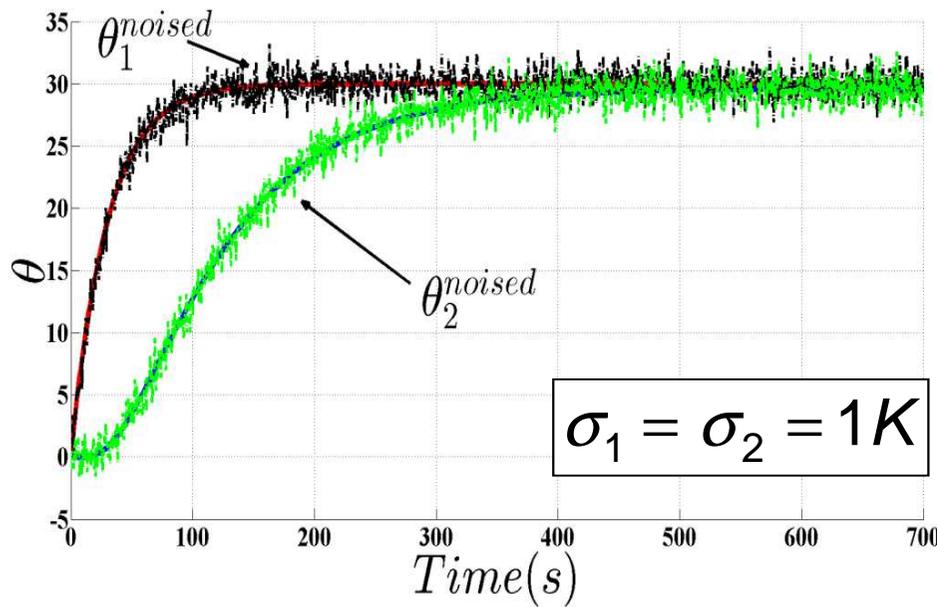
Profils de temperature (COMSOL)

W analytique et identifié (avec regularisation)

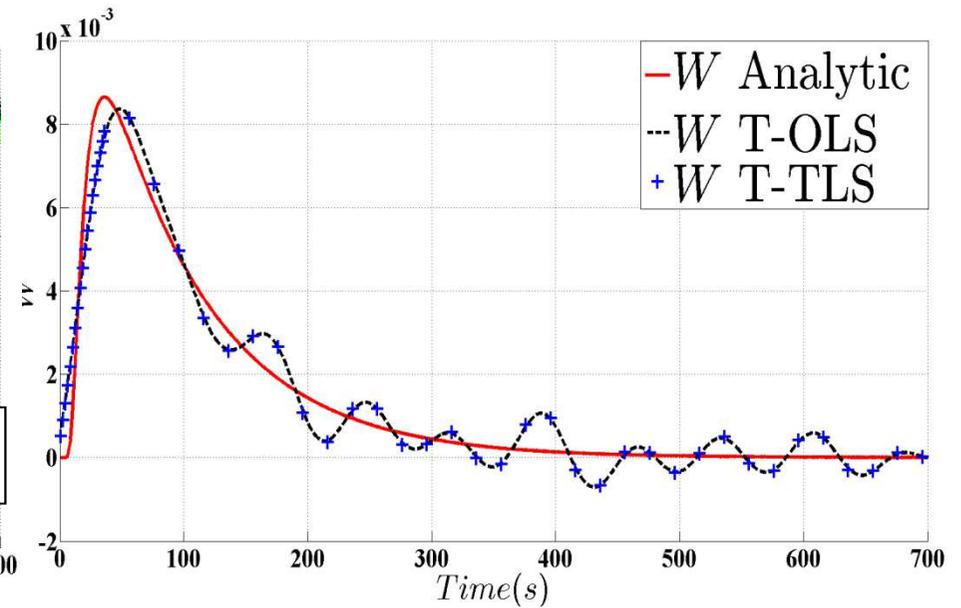
Rapport bruit/signal: $\left\| \theta_2^{noised} - \theta_2^{exact} \right\| / \left\| \theta_2^{noised} \right\| = 3.90 \%$

Comparaison: W analytique et W identifié à partir de profils synthétiques (COMSOL) et bruitage

θ_1, θ_2 bruitées



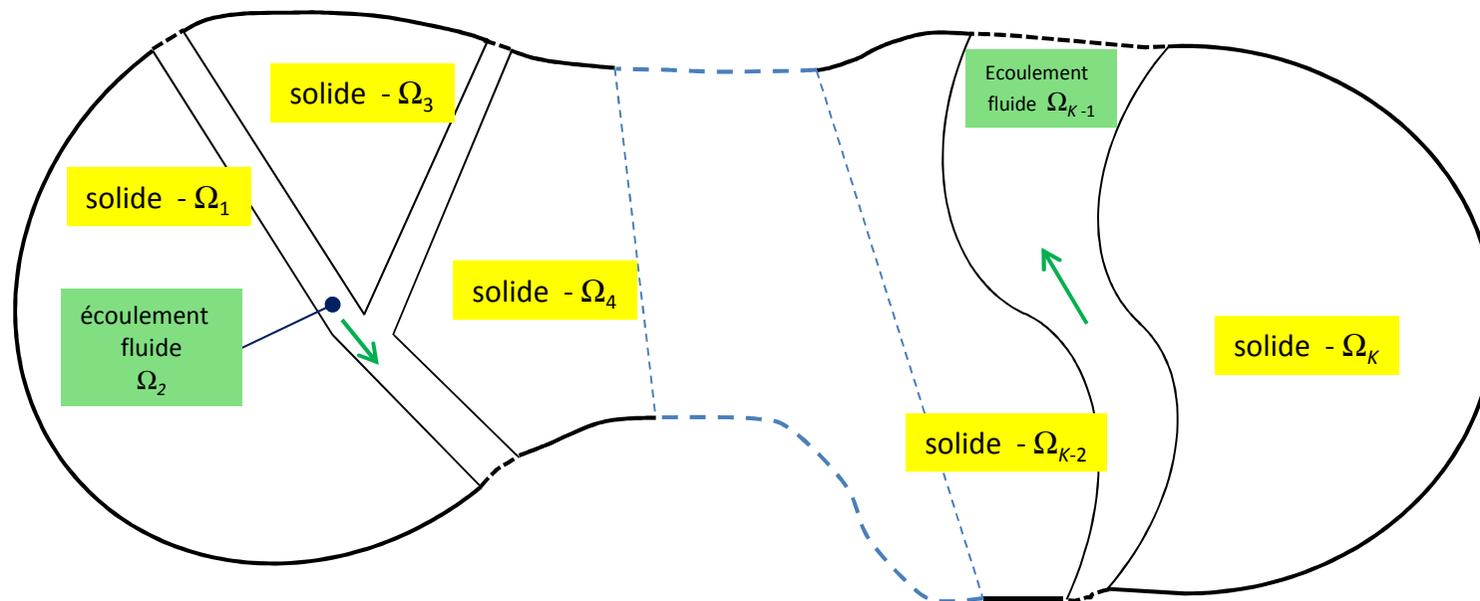
Profils de temperature (COMSOL)



W analytique et identifié
(avec regularisation)

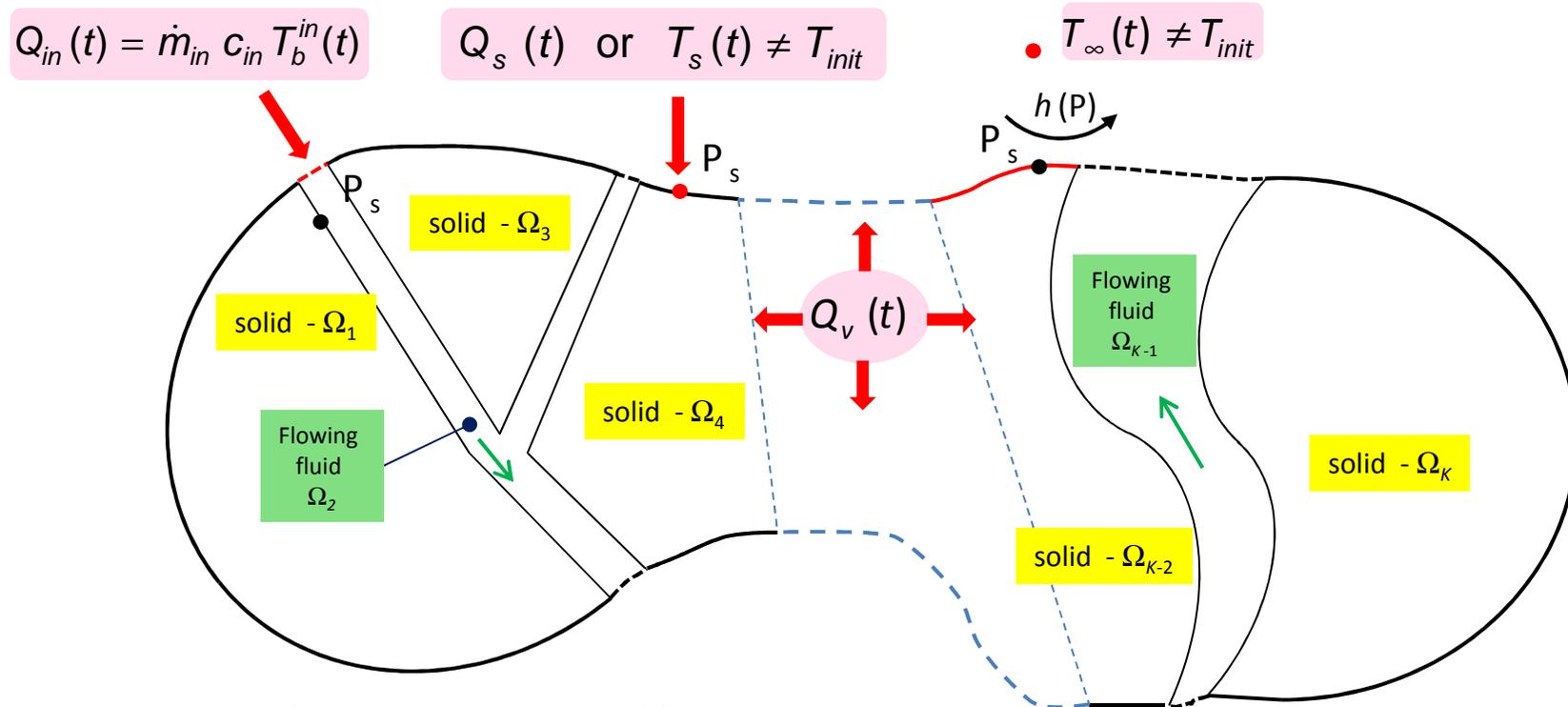
4. Réponse forcée des systèmes Linéaires à coefficients Invariants en Temps (LIT) 3D à mono-excitation séparable: cas des modèles advectifs et diffusifs

Système matériel **multicomposant** = K domaines **solides** ou **fluides**



Hypothèses: **propriétés thermophysiques** et **champ de vitesse constants dans le temps**

Champ de température initial **uniforme** ou en **régime permanent**
 + une seule excitation thermique **séparable**



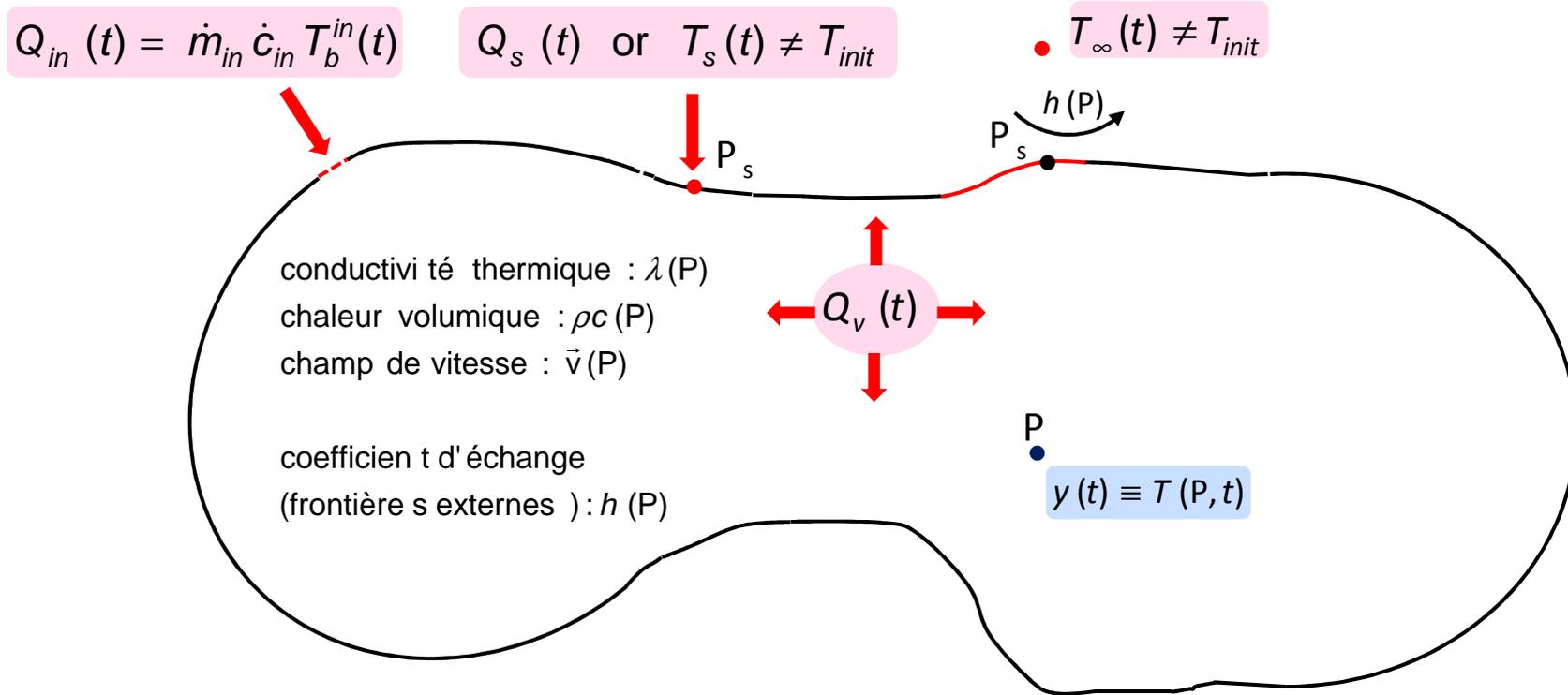
Partie temporelle de l'excitation thermique $u(t)$
 (démarré à l'instant $t = 0$) :

- puissance thermique volumique $Q_v(t)$
- source de chaleur ou de température surfacique $Q_s(t)$ or $T_s(t)$
- variation de la température du fluide $T_\infty(t) \neq T_{init}$
- variation de la température à l'entrée d'un fluide $T_b^{in}(t)$

Support géométrique de l'excitation immobile:

- point
- ligne
- surface
- volume

Changement de perspective: un seul **fluide hétérogène** dans un **seul domaine** (dans partie solide : vitesse nulle)

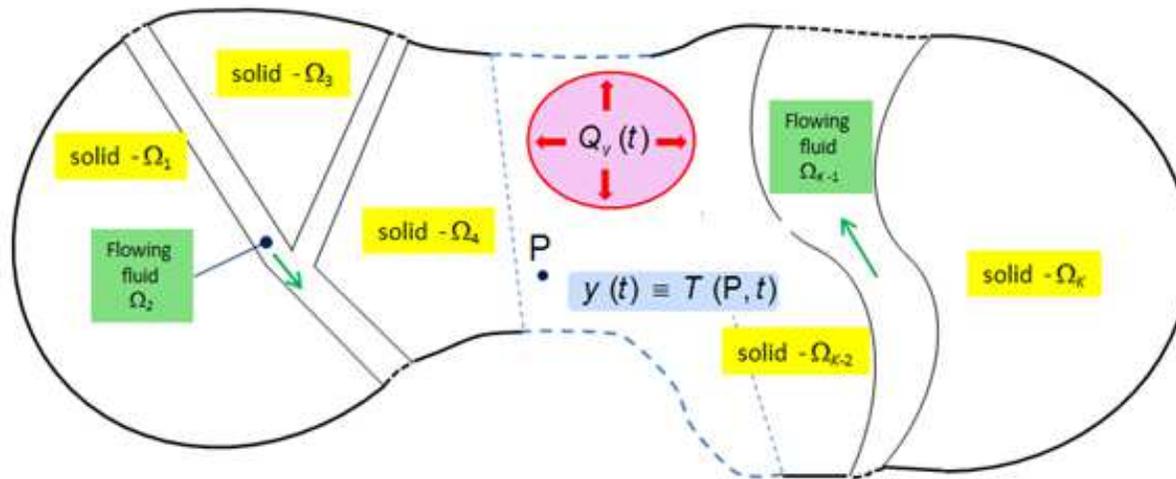


Excitation thermique transitoire séparable:

Réponse en point quelconque P :

$$u(t) \Rightarrow y(t) \equiv T(P, t)$$

Recap



Système physique:

Ensemble de solides **ET** fluide(s):

Convection forcée 3D
avec vitesses constantes
(**en temps** mais **pas en espace**)

P = point **QUELCONQUE**
du système

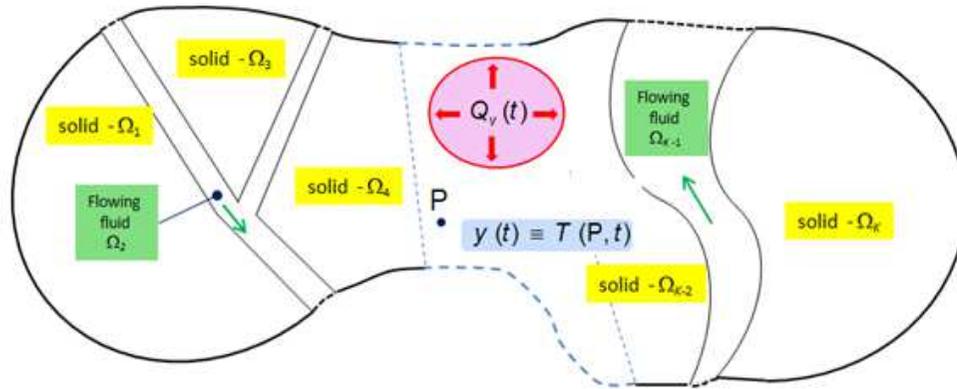
Une seule excitation thermique $u(t)$ attachée à un support fixe

Hypothèses : Equation de la chaleur en transitoire + conditions limites à coefficients invariants en temps time-invariant + champ de température initial **soit uniforme soit en régime permanent**

→le système d'équations est **Lineaire** et aussi **Invariant en Temps** (LIT)

$$\boxed{\rho c(P) \frac{\partial T}{\partial t}(P, t)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u}(P) \cdot \vec{\nabla} T(P, t)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda(P) \vec{\nabla} T(P, t))} + \boxed{\frac{Q_v(t)}{V_{\text{source}}} f(P)}$$

Transitoire
Advection
Conduction
Source volumique



Variation de température en **tout** point P:

$$\theta (P, t) = T (P, t) - T_{init} (P)$$

Sa transformée de Laplace :

$$\bar{\theta} (P, p) = \int_0^{\infty} \exp (-p t) \theta (P, t) dt$$

Variable de Laplace

$$\boxed{\rho c(P) \frac{\partial T}{\partial t} (P, t)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u} (P) \cdot \vec{\nabla} T (P, t)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda (P) \vec{\nabla} T (P, t))} + \boxed{\frac{Q_v (t)}{V_{source}} f(P)}$$

Transitoire
Advection
Conduction
Source volumique

Conséquence : Equation de la chaleur dans le domaine de Laplace transformé (**pas de dérivée temporelle**)

$$\boxed{\rho c(P) p \bar{\theta} (P, p)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u} (P) \cdot \vec{\nabla} \bar{\theta} (P, p)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda (P) \vec{\nabla} \bar{\theta} (P, p))} + \boxed{\frac{\bar{Q}_v (p)}{V_{source}} f(P)}$$

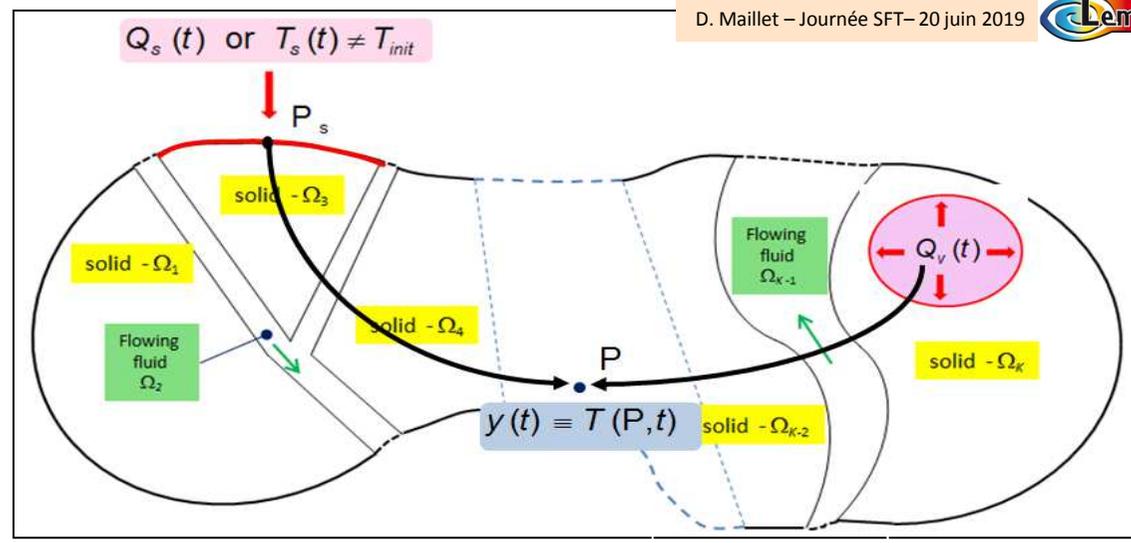
Transitoire
Advection
Conduction
Source volumique

Système linéaire à une seule excitation

- Temperature ou densité de flux
- ⇒ réponse en tout point P du système matériel
- = produit simple (domaine de Laplace)

$$\bar{y}(P, p) = \bar{H}(P, p) \bar{u}(p)$$

ou produit de convolution (en temps)



réponse ←

excitation →

$$y(P, t) = H(P, t) * u(t) = \int_0^t H(P, t-t') u(t') dt'$$

Excitation $u(t)$:
 $u(t) = Q_v(t) - Q_v^{init}$ ou $Q_s(t) - Q_s^{init}$
 ou $T_s(t) - T_{init}(P_s)$
 ou $T_\infty(t) - T_\infty^{init}$
 ou $T_b^{in}(t) - T_b^{in,init}$

Fonction de transfert

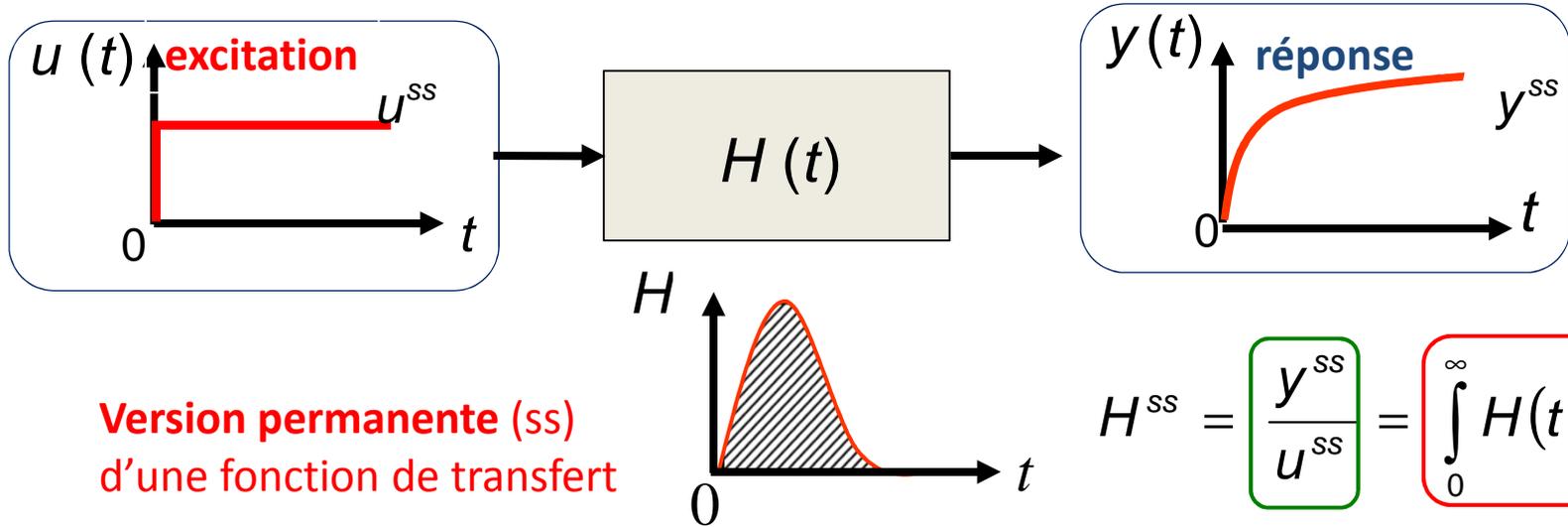
$H(P, t)$

« init » = champ de température initial uniforme ou régime permanent préexistant

Réponse $y(t)$ en tout point P :
 $y(t) = \theta(P, t) = T(P, t) - T_{init}(P)$
 ou variation de la densité de flux locale dans direction quelconque $\varphi_x(P, t)$

| Excitation u | Response y | Transfer function H |
|---|---|--------------------------------------|
| Power source Q (watts) | Temperature difference θ (kelvins) | Impedance Z ($K.J^{-1}$) |
| Temperature difference θ (kelvins) | Temperature difference θ (kelvins) | Transmittance W (s^{-1}) |
| Power source Q (watts) | Rate of heat flow Φ (watts) | Transmittance W (s^{-1}) |
| Temperature difference θ (kelvins) | Rate of heat flow Φ (watts) | Admittance Y ($W.K^{-1}.s^{-1}$) |

$$y(P, t) = H(P, t) * u(t) = \int_0^t H(P, t-t') u(t') dt'$$



$$H^{ss} = \frac{y^{ss}}{u^{ss}} = \int_0^{\infty} H(t) dt$$

Valeurs asymptotiques Distribution temporelle

Démonstration:

$u \equiv \Delta Q^{ss}$ (excitation = échelon de puissance thermique entre 2 régimes permanents)

$y \equiv \Delta T(P, t)$ (réponse = variation de température/1er régime)
 $\Rightarrow H \equiv Z$ (impédance thermique)

$$\Rightarrow \bar{u}(p) = \Delta Q^{ss} / p$$

$$\Rightarrow \Delta \bar{T}(p) = \bar{Z}(p) \Delta Q^{ss} / p$$

$$\Rightarrow p \Delta \bar{T}(p) = \bar{Z}(p) \Delta Q^{ss}$$

Propriété 4 (transformée de Laplace):

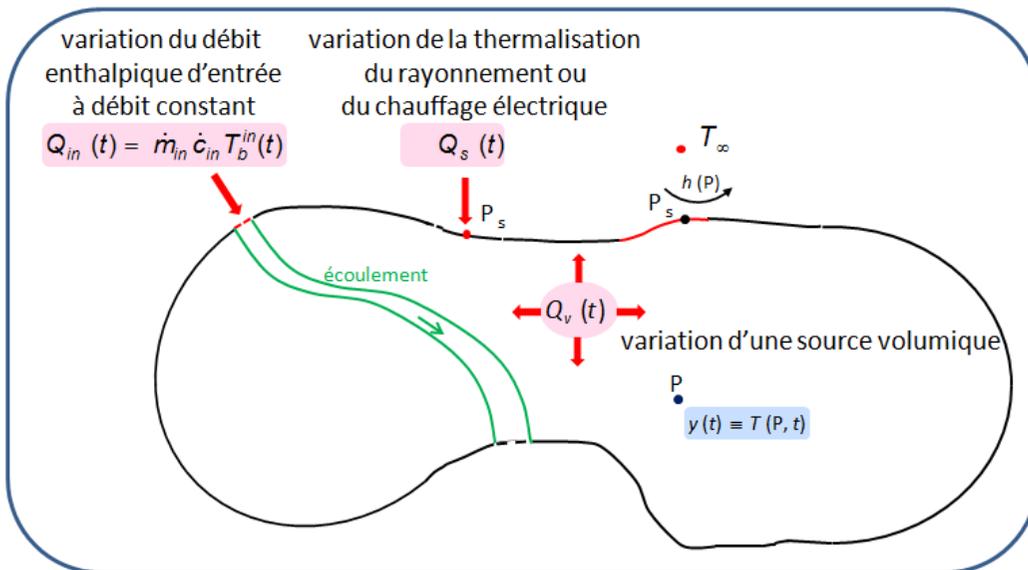
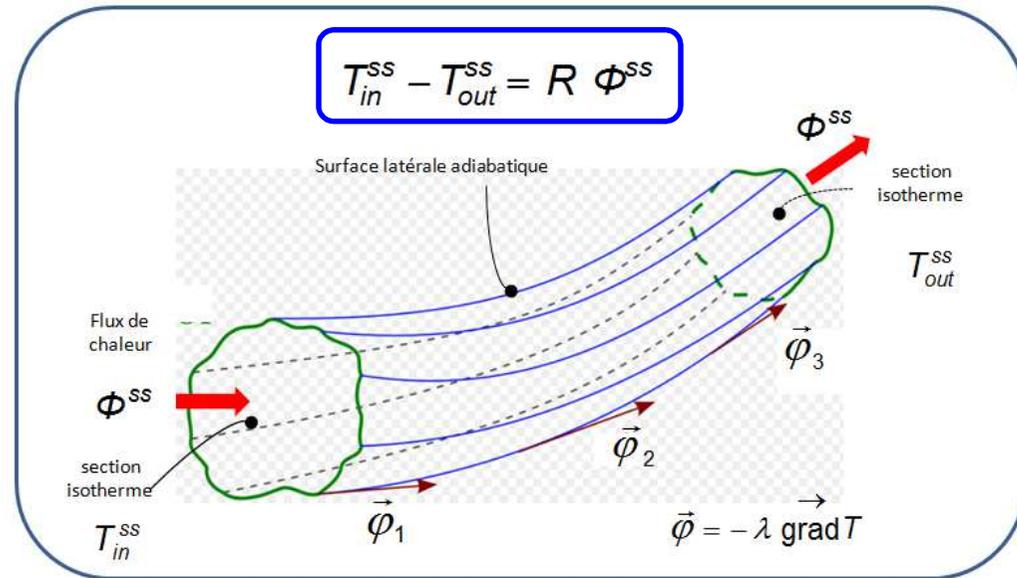
$$\lim_{p \rightarrow 0} (p \Delta \bar{T}(p)) = \Delta T(t \rightarrow +\infty) \Rightarrow \Delta T^{ss} = \bar{Z}(0) \Delta Q^{ss}$$

Notion de résistance thermique en permanent

Hypothèses:

Il existe un tube de flux entre 2 surfaces isothermes

Φ^{ss} : flux



Impédances = dérivées partielles/sources \rightarrow superposition

Résistance généralisée: pas de tube de flux, pas d'isotherme

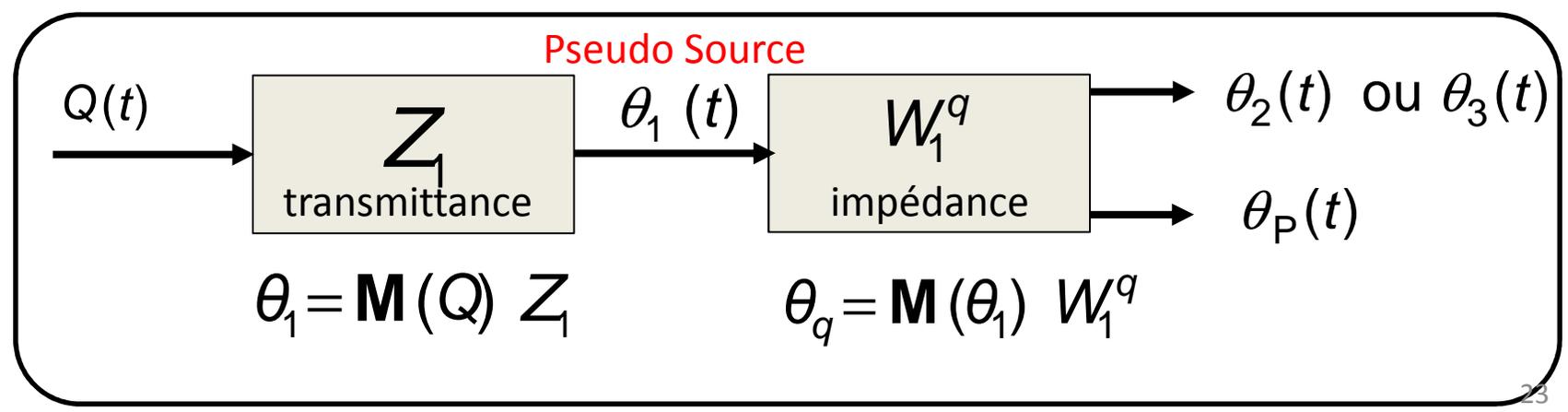
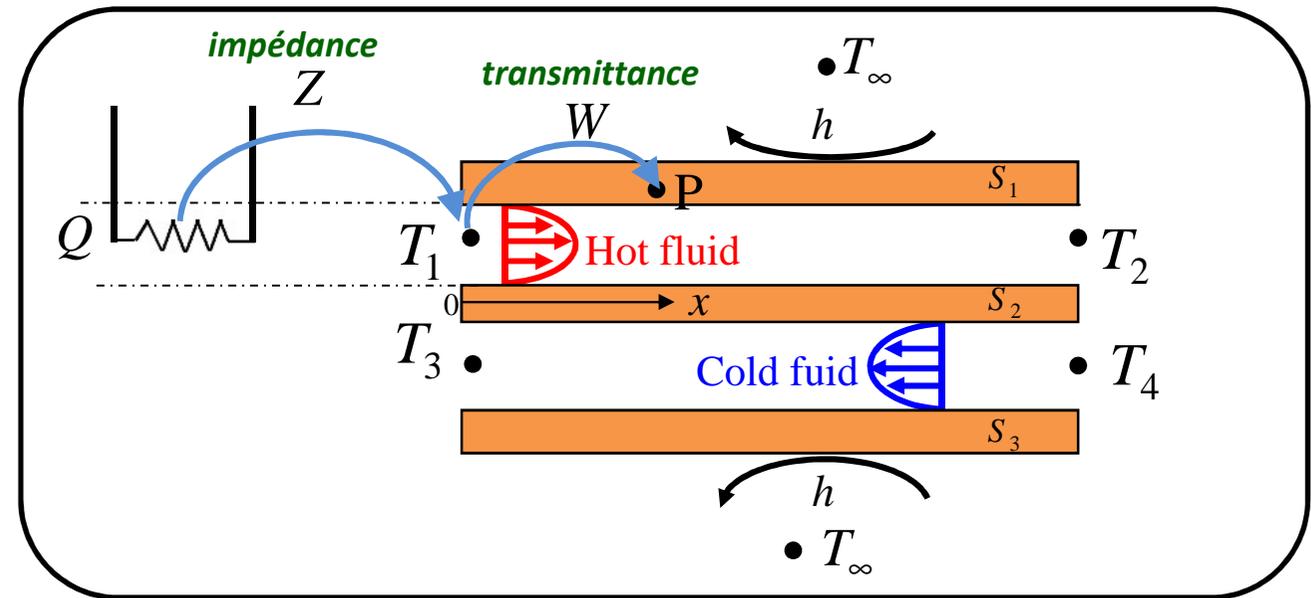
Q^{ss} : source (= cause)

$$T_2^{ss} - T_1^{ss} = Z^{ss} (Q_2^{ss} - Q_1^{ss})$$

variation de puissance thermique (watts) (conversion thermodynamique à partir d'une énergie autre que thermique) entre 2 régimes permanents

5. Application à la caractérisation thermique des échangeurs de chaleur

Façon pratique de changer la température d'entrée d'un fluide à débit fixé

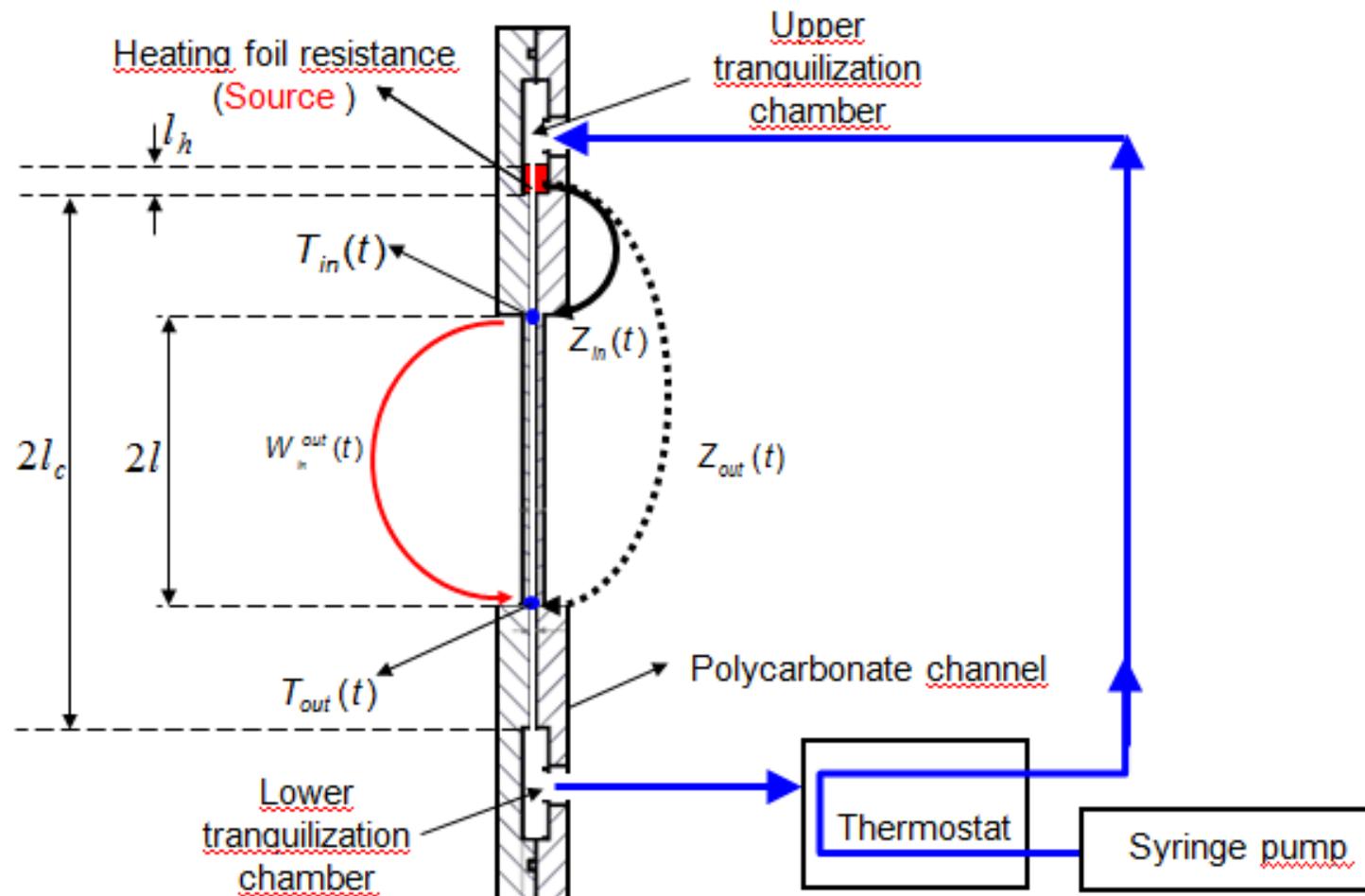


Estimation expérimentale de l'impédance/transmittance d'un demi-échangeur

Identification (calibration à partir de mesures)

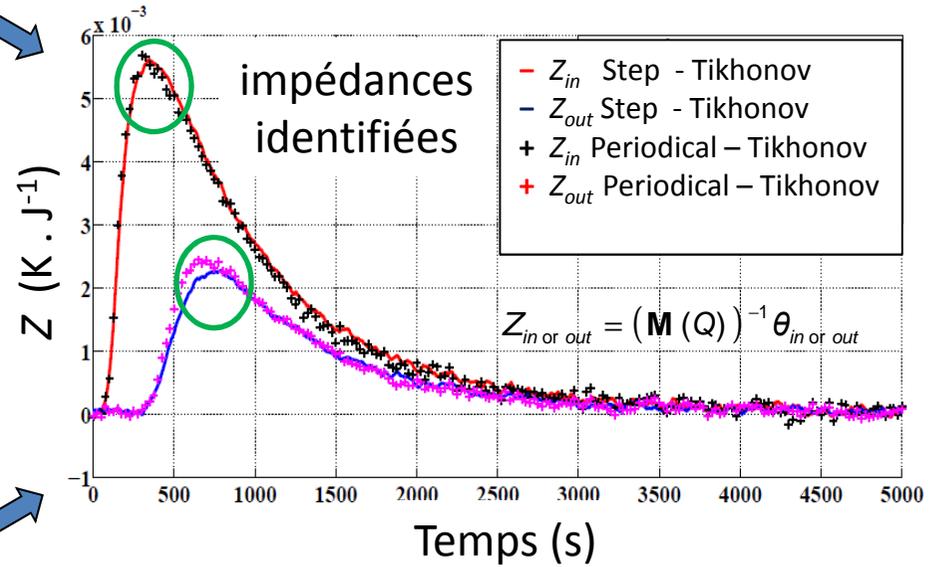
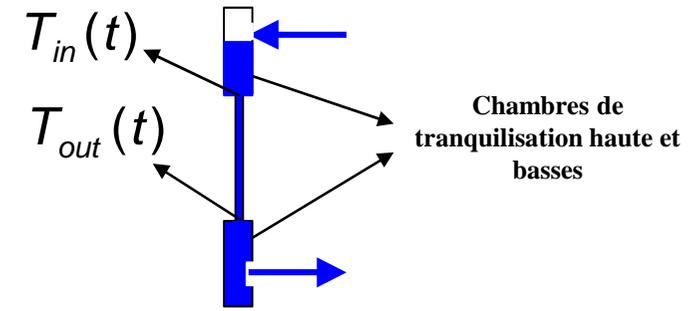
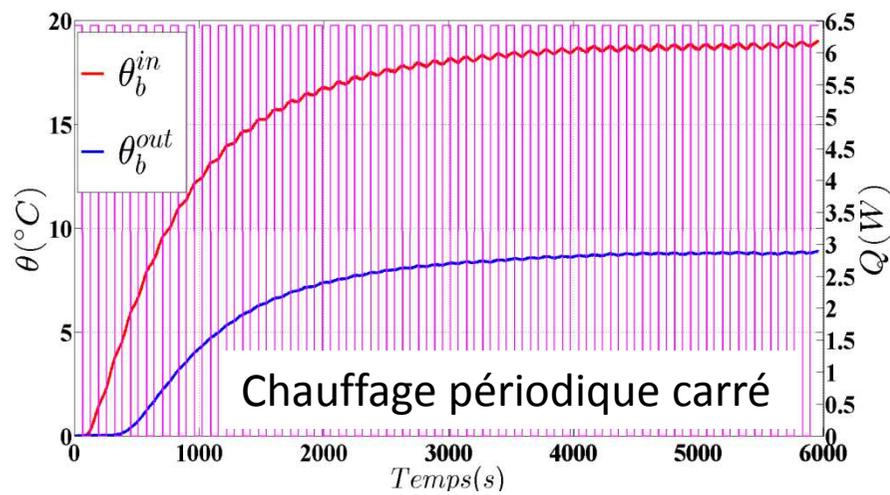
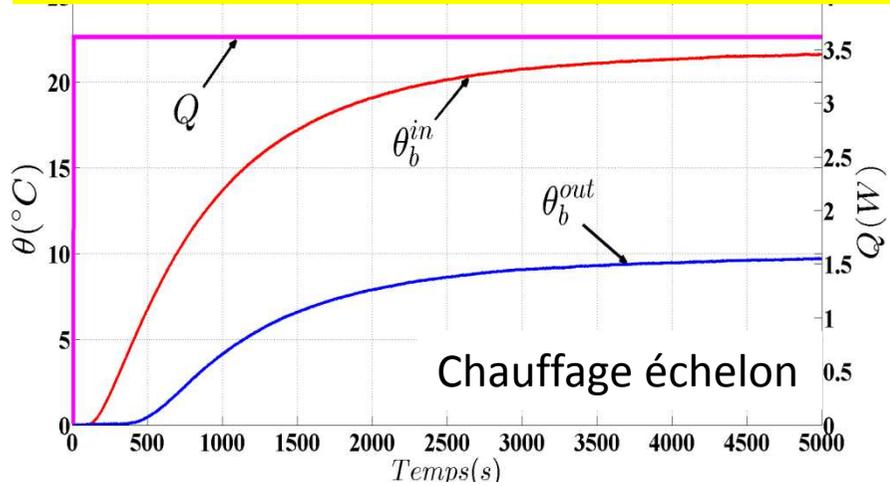
Réponse : thermocouples
 $d = 50.8 \mu\text{m}$

| $e_1 = e_2(\text{mm})$ | $e_f(\text{mm})$ | $2l(\text{mm})$ | $2l_c(\text{mm})$ | $w(\text{mm})$ | $l_h(\text{mm})$ |
|------------------------|------------------|-----------------|-------------------|----------------|------------------|
| 2 | 1 | 65 | 120 | 50 | 10 |



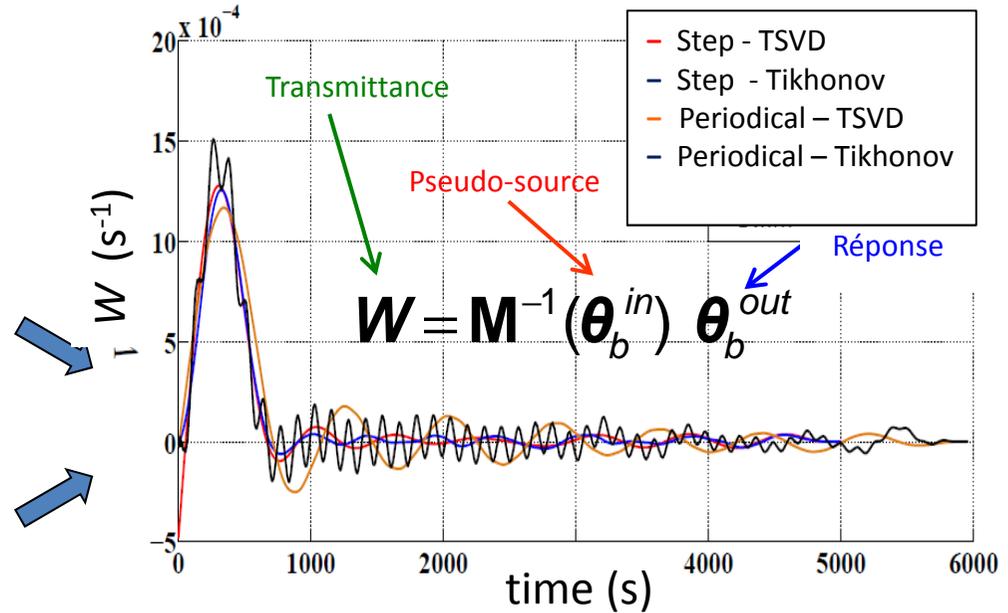
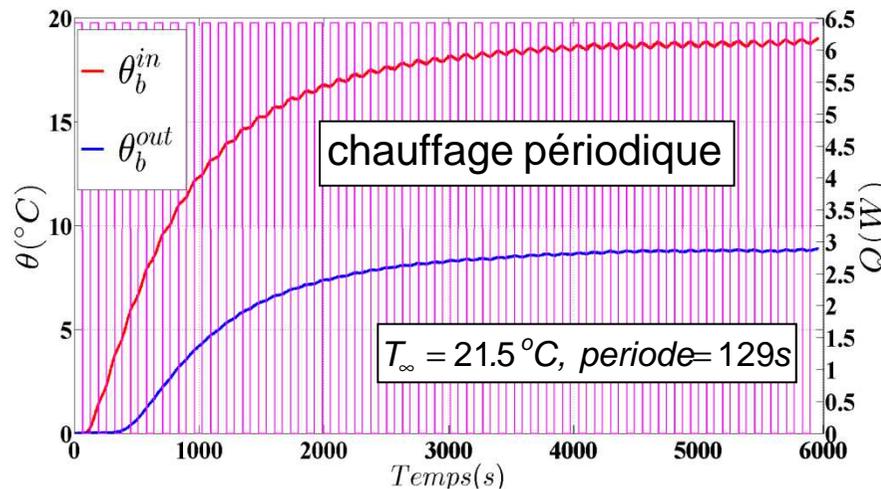
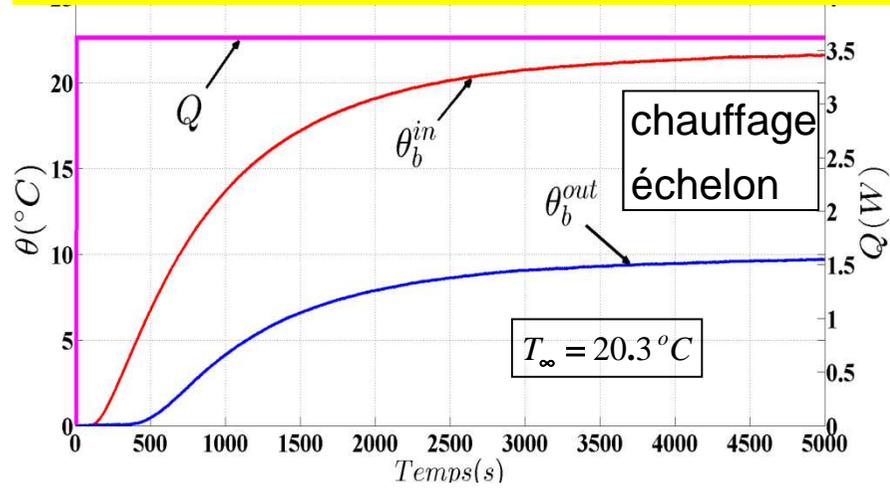
Identification d'une impédance (calibration à partir de mesures)

Comparaison des Z identifiés : chauffage en échelon ou périodique



Identification d'une transmittance (calibration à partir de mesures)

Comparaison des W identifiés : chauffage en échelon ou périodique



Oscillations après premier pic et aux temps longs, niveau zero difficile à restituer

Estimation d'une transmittance W (entrée et sortie bruitées) plus difficile qu'une impédance Z (seule sortie bruitée)

6. Conclusions et perspectives

- ❑ Modèles thermiques instationnaires convolutifs intéressant pour applications où coexistent **conduction et advection** (**pas de variation de vitesse** dans le temps, **pas de “vieillissement”** du système physique. Ils modélisent les réponses de types **linéaires et forcées** (pas de relaxation d’un champ de température non établi).
- ❑ **Une fonction de transfert** par **source individuelle** (différence de température, puissance thermique volumique, ...) qui est soit une **transmittance** (réponse en kelvin à une source en kelvin) soit une **impedance** (réponse en kelvin à une source en watts) ou encore une **admittance** (réponse en flux, watts, à une source en kelvin)
- ❑ Ces fonctions sont estimables soit à l’issue d’une expérience de calibration, avec **régularisation** éventuelle en présence de bruit (une déconvolution est un problème mal-posé).
- ❑ Application **aux échangeurs de chaleur** pour la construction de **capteurs virtuels** (estimation de températures internes) ou pour la **détection externe de l’encrassement**. L’intégration temporelle des fonctions de transfert permet de caractériser les régimes thermiques permanents.
- ❑ **Les fonctions de transfert $H(t)$** sont une **bonne alternative à l’emploi non réaliste** de corrélations portant sur **$h(t)$** ou **$Nu(t)$** . Ceci est aussi valable pour les “fonctions de transfert” spatiales qui doivent remplacer les corrélations du type **$h(x)$** ou **$Nu(x)$** qui ne prennent pas en compte les **transferts conjugués** (présence des parois de volume non négligeable), voir:

*A. Degiovanni, B. Rémy, **An alternative to heat transfer coefficient: a relevant model of heat transfer between a developed fluid flow and a non-isothermal wall in the transient regime**, International Journal of Thermal Sciences , Volume 102, April 2016, Pages 62–77.*

Merci de votre attention !