

Utilisation de modèles réduits par modes de Branche pour l'identification de sources thermiques : application au freinage

Y. Rouizi, O. Quéméner, S. Carmona

Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry



- 1. Problématique**
- 2. Réduction de modèle**
- 3. Identification temporelle de source de chaleur**
- 4. Identification spatio-temporelle de source de chaleur**

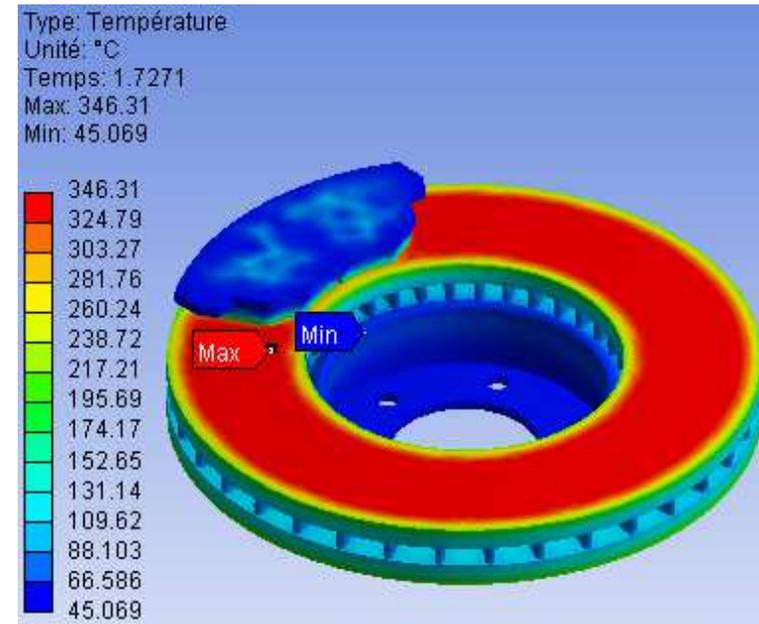
Problématique du freinage

- Le flux est difficile à déterminer

$$\varphi_g = \mu p v$$

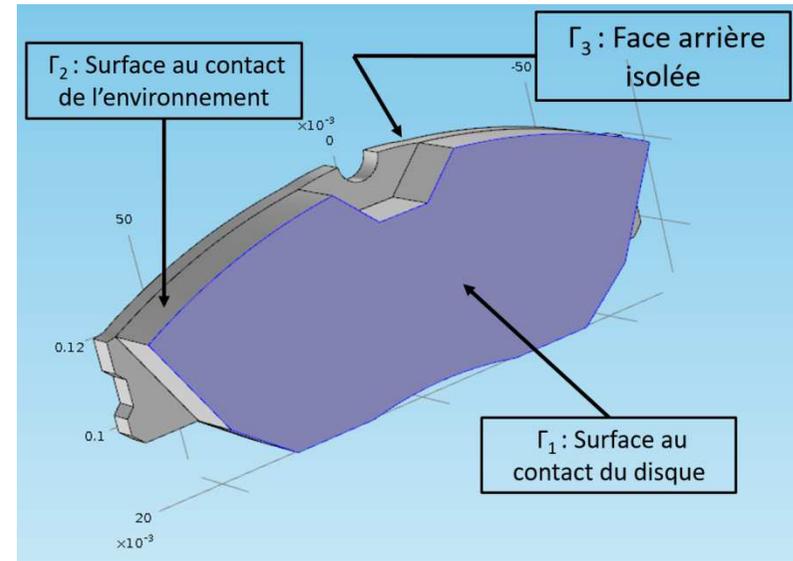
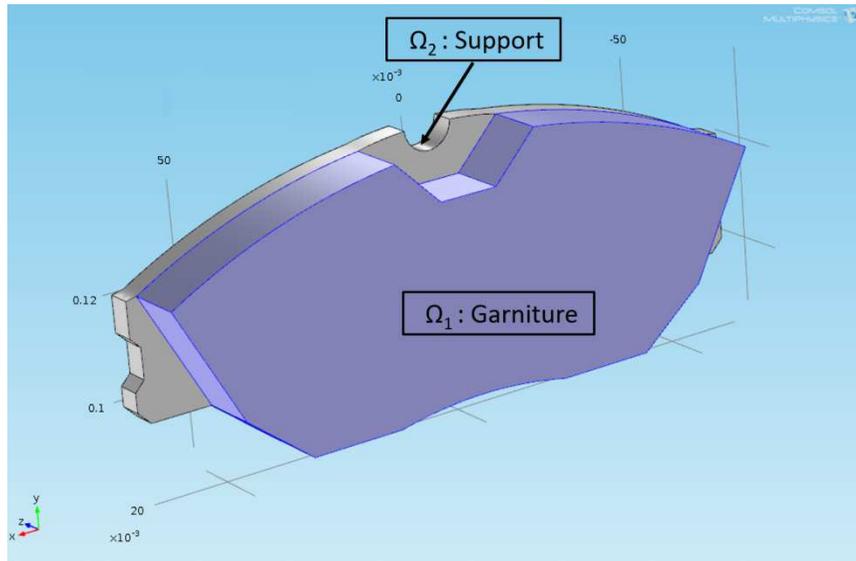
↳ Analyse des états de surface
(expérimental)

- Usure des composants



**Utilisation de
problèmes inverses**

Problématique du freinage



$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0 & ; \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) \\ \forall M \in \Gamma_1, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi(x, y, t) \\ \forall M \in \Gamma_2, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -hT \\ \forall M \in \Gamma_3, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0 \\ \forall M \in \Omega, t = 0 & ; \quad T = T_0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{CT} = \mathbf{AT} + \mathbf{U}(t) \\ N_{mesh} \times N_{mesh} \end{array}$$

Principe de la méthode de la réduction

Le principe de la BERM (Branch Eigenmodes Reduction Method) repose sur deux étapes :

1. Calcul d'une base complète $\mathbf{V}^{(T)}$, sur laquelle il est possible d'effectuer une décomposition rigoureuse du champ de température

$$T(M, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^{(T)}(M) x_i^{(T)}(t)$$

2. L'obtention d'une base réduite $\tilde{\mathbf{V}}^{(T)}$, afin de diminuer fortement l'ordre du modèle tout en permettant un calcul satisfaisant du champ de température

$$T(M, t) \simeq \sum_{i=1}^{\tilde{n}^{(T)}} \tilde{V}_i^{(T)}(M) \tilde{x}_i^{(T)}(t)$$

Principe de la méthode de la réduction

- L'objectif est de calculer un ensemble de vecteurs qui vont former une base pour le problème thermique posé :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & , \quad k \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i^{(T)}) = z_i^{(T)} c \hat{V}_i^{(T)} \\ \forall M \in \Gamma & , \quad \mathbf{A} \text{ définir} \end{cases}$$

Principe de la méthode de la réduction

- L'objectif est de calculer un ensemble de vecteurs qui vont former une base pour le problème thermique posé :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & , \quad k \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i^{(T)}) = z_i^{(T)} c \hat{V}_i^{(T)} \\ \forall M \in \Gamma & , \quad k \vec{\nabla} \hat{V}_i^{(T)} \cdot \vec{n} = -z_i^{(T)} \zeta^{(T)} \hat{V}_i^{(T)} \end{cases}$$

- La particularité de la base de Branche est qu'elle fait intervenir dans sa condition aux limites la valeur propre $z_i^{(T)}$.
- Base indépendante de toutes conditions aux limites du problème thermique posé.
- Le paramètre $\zeta^{(T)}$ [J.m²K⁻¹] est coefficient qui permet le respect des dimensions de l'équation de la condition aux limites.

Principe de la méthode de la réduction

- L'objectif est de calculer un ensemble de vecteurs qui vont former une base pour le problème thermique posé :

$$\begin{cases} \forall M \in \Omega & , & k \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i^{(T)}) = z_i^{(T)} c \hat{V}_i^{(T)} \\ \forall M \in \Gamma & , & k \vec{\nabla} \hat{V}_i^{(T)} \cdot \vec{n} = -z_i^{(T)} \zeta^{(T)} \hat{V}_i^{(T)} \end{cases}$$

- La particularité de la base de Branche est qu'elle fait intervenir dans sa condition aux limites la valeur propre $z_i^{(T)}$.
- Le choix de ce nombre de Steklov est obtenu à partir de l'expression variationnelle du problème aux valeurs propres

$$\int_{\Omega} k \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} \hat{V}_i^{(T)} \partial\Omega = -z_i^{(T)} \left(\int_{\Omega} c g \hat{V}_i^{(T)} d\Omega + \int_{\Gamma} \zeta^{(T)} g \hat{V}_i^{(T)} d\Gamma \right)$$

Principe de la méthode de la réduction

- En partant de la formulation variationnelle du problème posé

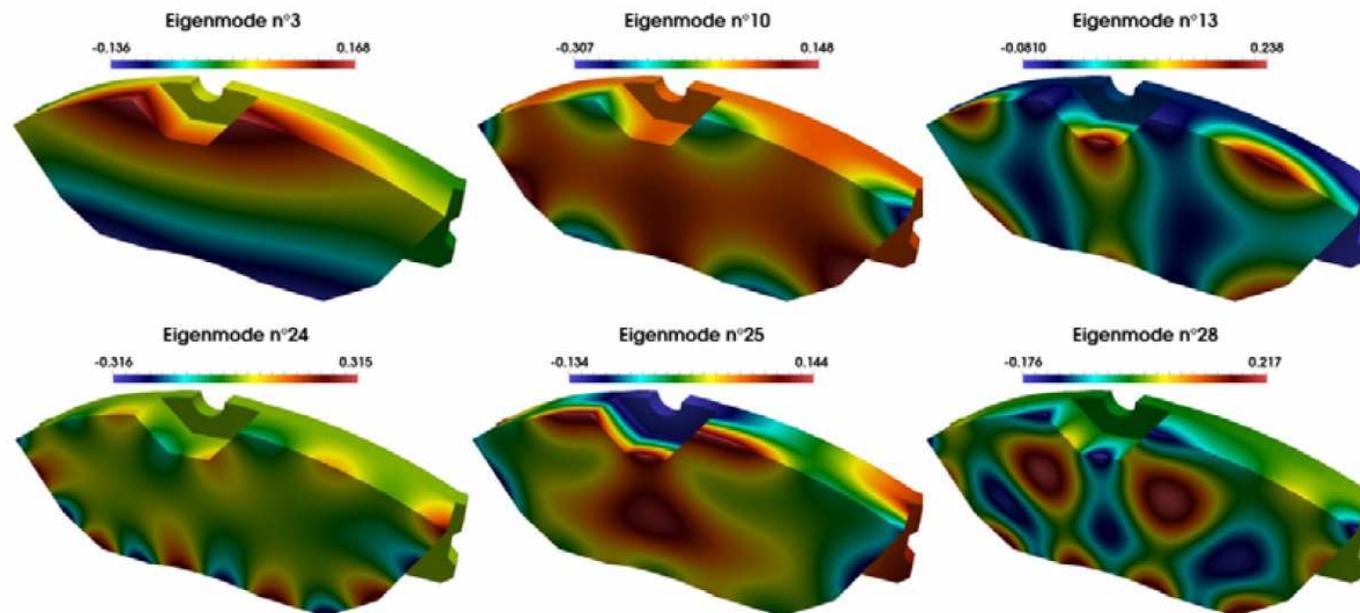
$$\int_{\Omega} c g \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} k \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} T d\Omega - \int_{\Gamma_2} g h T d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \varphi(M, t) g d\Gamma$$

$$C \dot{T} = A T + U(t)$$

$$\tilde{V}^{(\mathbf{T})t} C \tilde{V}^{(\mathbf{T})} \dot{\tilde{X}}^{(\mathbf{T})} = \tilde{V}^{(\mathbf{T})t} A \tilde{V}^{(\mathbf{T})} \tilde{X}^{(\mathbf{T})} + \tilde{V}^{(\mathbf{T})t} U$$

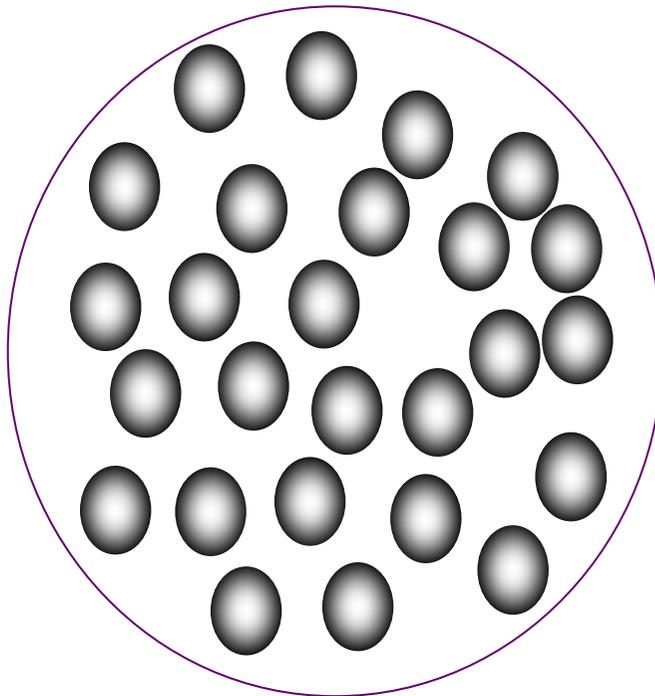
Principe de la méthode de la réduction

- Dans le cas de géométries complexes nécessitant une discrétisation spatiale caractérisée par un nombre de degrés de liberté N , le nombre de vecteur propre n'est plus infini mais égal à N .

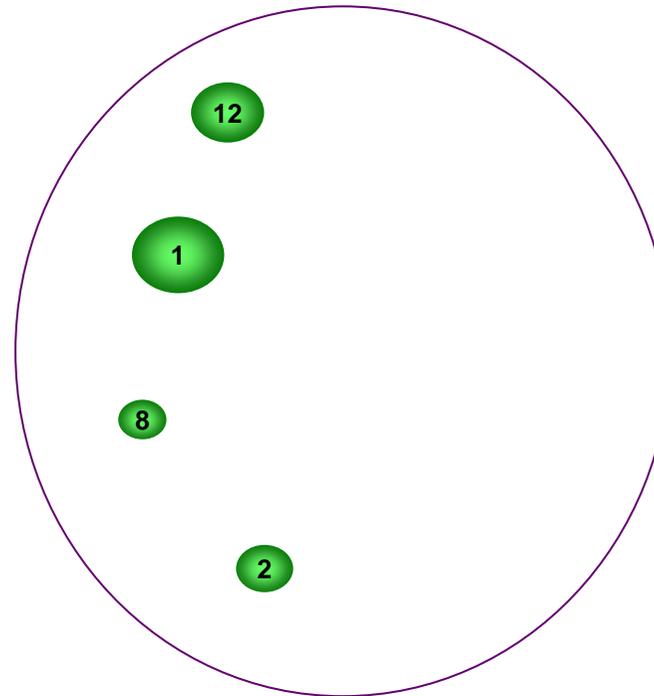


Principe de la réduction

Base complète



Base tronquée

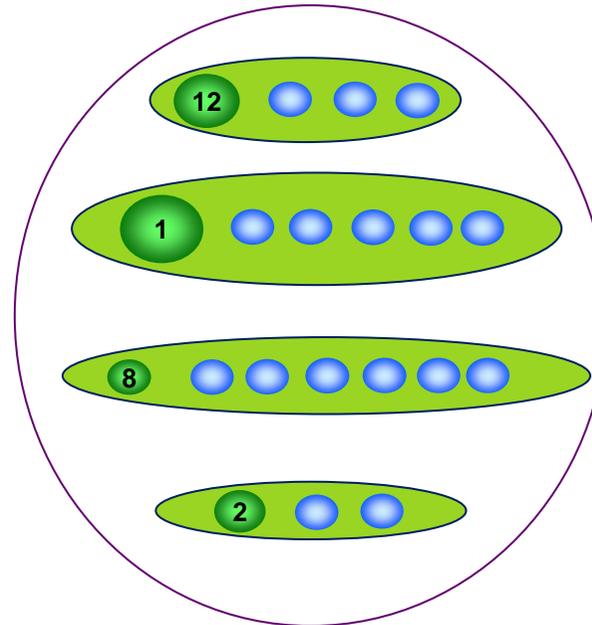
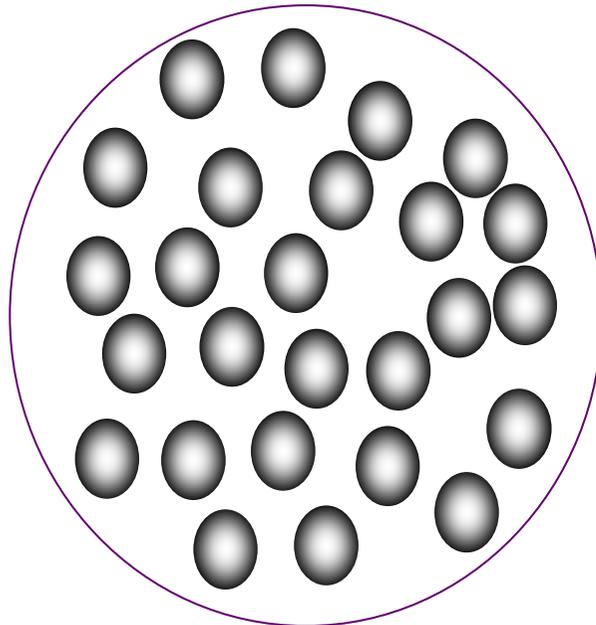


Principe de la réduction

Base complète



Base amalgamée



- Tous les modes sont utilisés une seule fois

$$\tilde{V}_i = V_{i,1} + \sum_{p=2}^{\tilde{N}_i} \alpha_{i,p} V_{i,p}$$

- Processus rapide
- Nécessite la connaissance des états de référence \mathbf{X}_{ref}

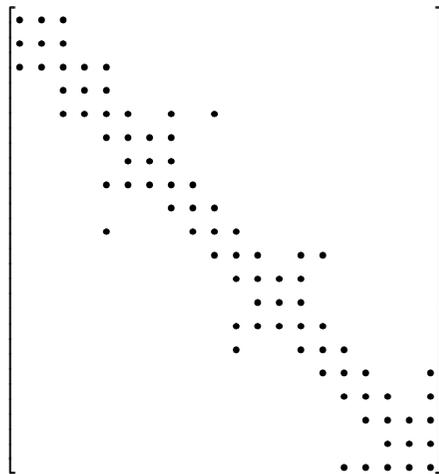
$$\mathbf{T}_{ref} = \mathbf{V}\mathbf{X}_{ref}$$

Principe de la réduction

Projection du champ de température :
$$\mathbf{T}(t) = \sum_{i=1}^{N_{mesh}} \mathbf{V}_i \mathbf{x}_i(t) \quad \mathbf{T} \approx \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{A} \mathbf{T} + \mathbf{B} \mathbf{U}$$

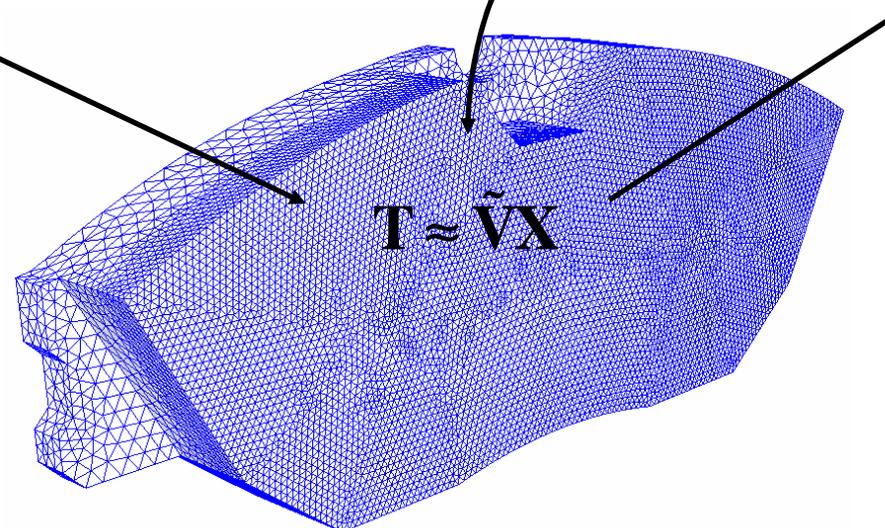
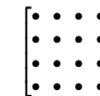
$$[N_{mesh} \times N_{mesh}]$$



$$N_{mesh} = 67\,353$$

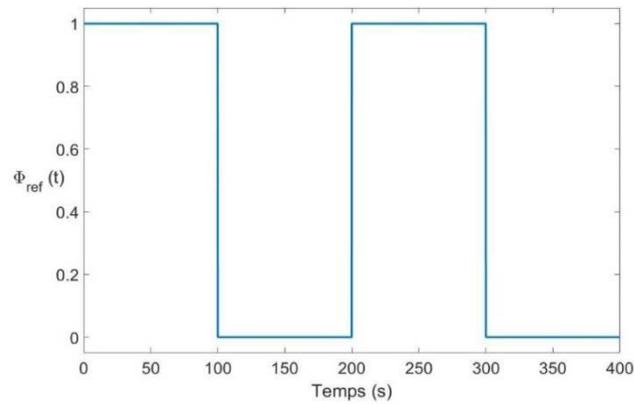
$$\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{B}_r \mathbf{U}$$

$$\tilde{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{n}}$$

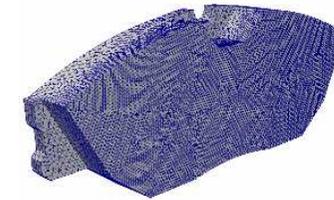
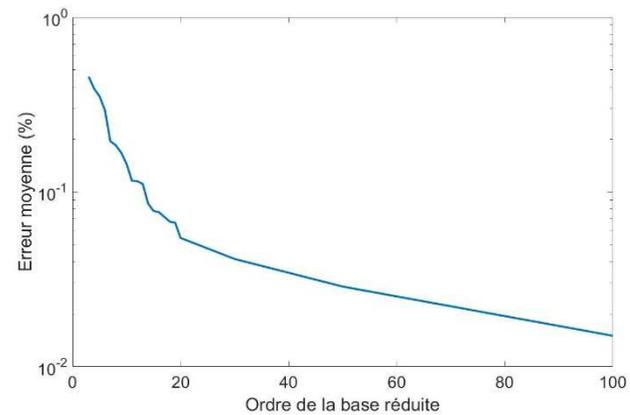


Résultats de la réduction

Cas de référence (amalgame)

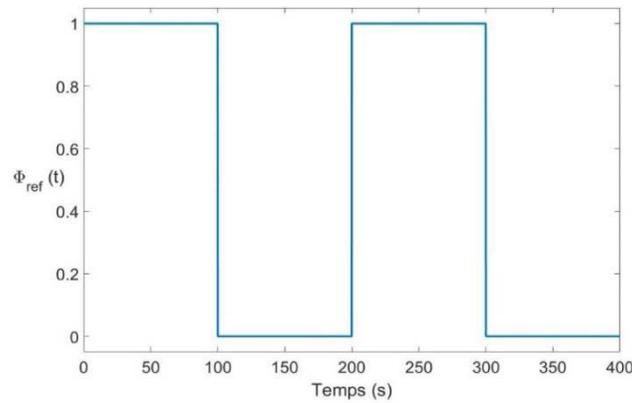


Erreur de réduction

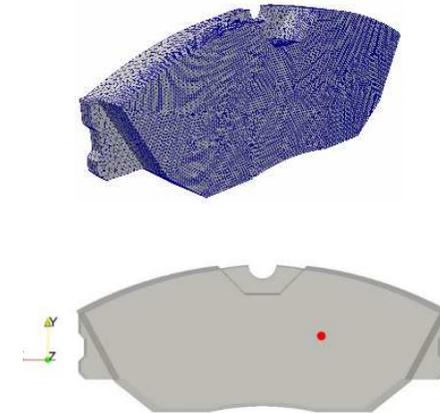
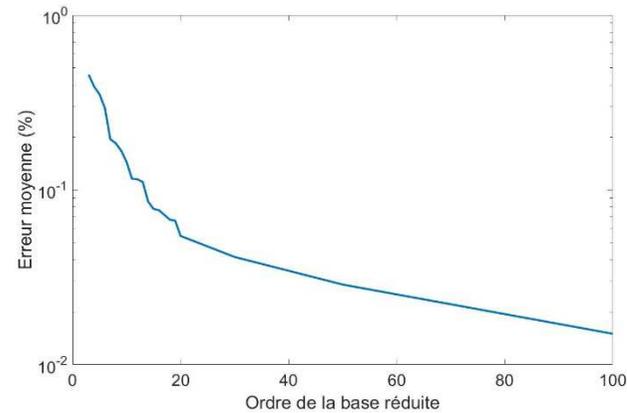


Résultats de la réduction

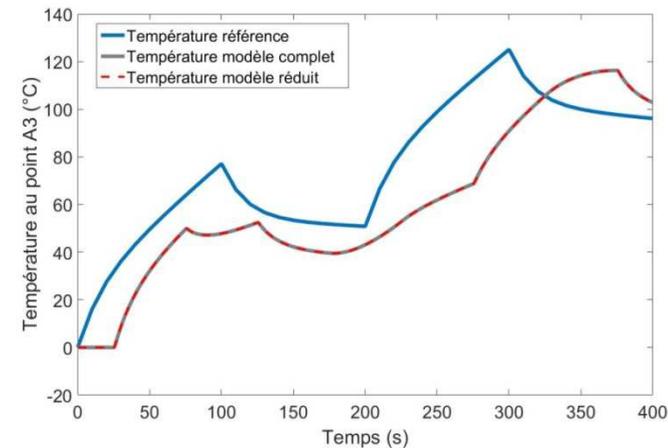
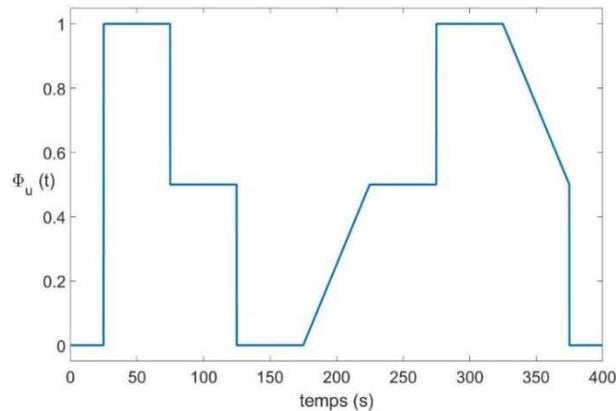
Cas de référence (amalgame)



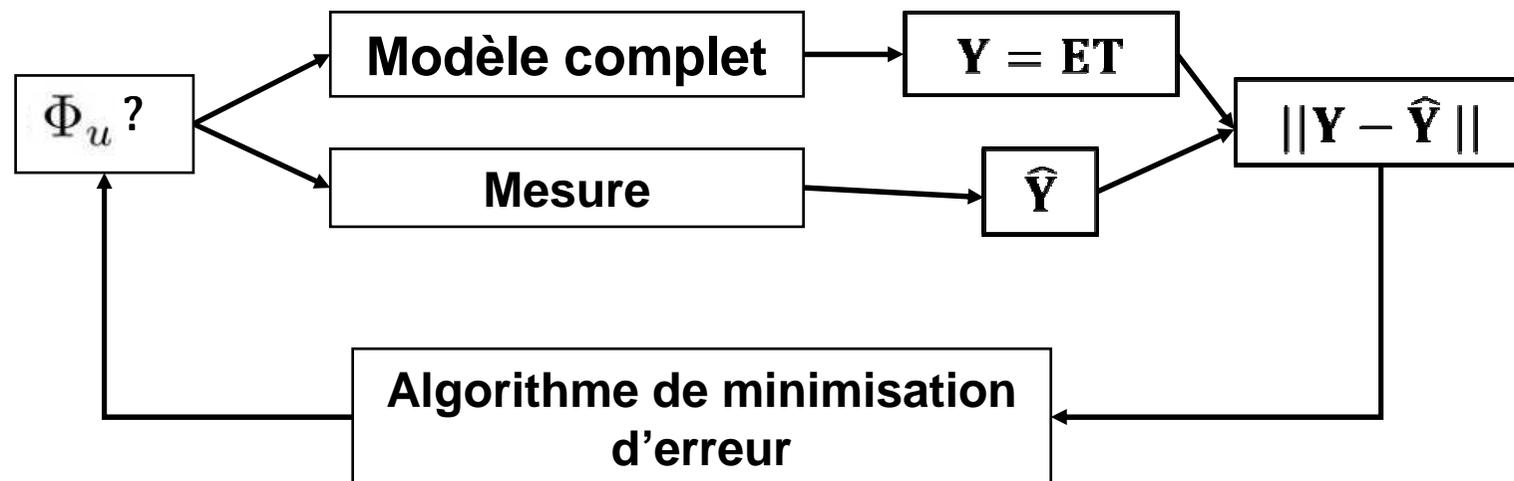
Erreur de réduction



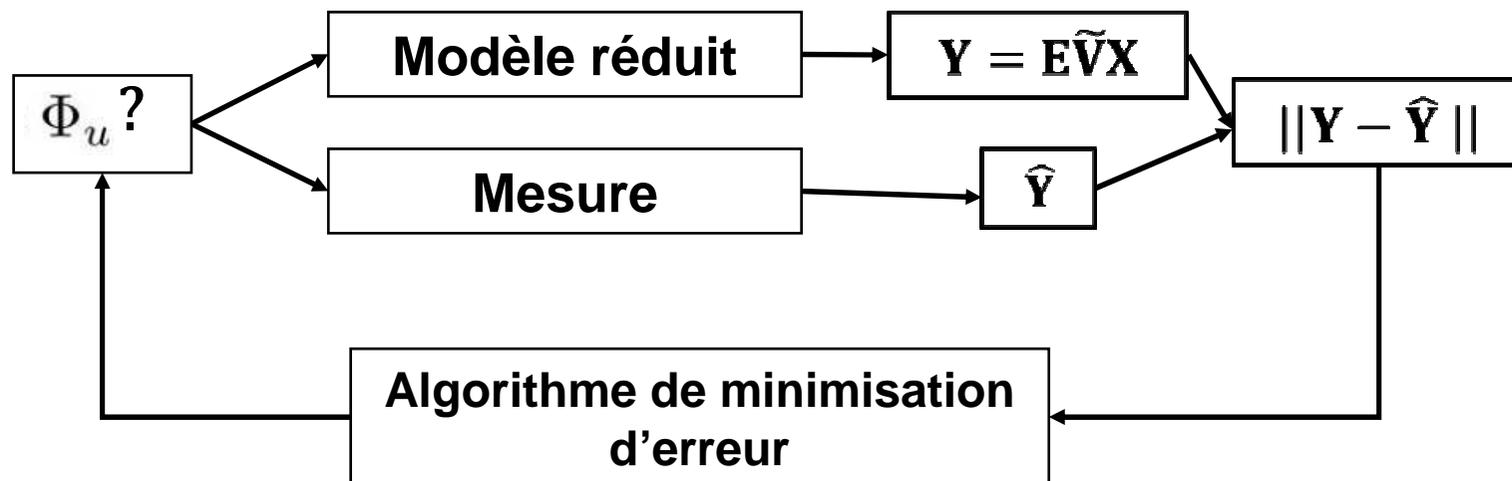
Résultats du problème direct (MR=100)



Résolution de problème inverse



Résolution de problème inverse



Principe de la méthode de l'Adjoint

Minimisation d'une fonctionnelle

$$J(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \|\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t)\|^2 + \epsilon \|\mathbf{U}(t)\|^2 dt$$

Utilisation du Lagrangien

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{U}) + \int_0^\tau \boldsymbol{\lambda}(t) \left(-\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{B}_r \mathbf{U} \right)$$

Dérivées nulles du Lagrangien

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 \rightarrow \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{B}_r \mathbf{U} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{X}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} = 0 \rightarrow -\mathbf{C}_r^t \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \mathbf{A}_r^* \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{E}^t (\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t))$$

Avec un gradient conjugué

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{U}} = 0 \rightarrow \nabla J = \epsilon \mathbf{U} + \mathbf{B}_r^t \tilde{\mathbf{V}} \boldsymbol{\lambda}$$

$$\hat{\mathbf{U}}^{k+1} = \hat{\mathbf{U}}^k + \rho^k d^k$$

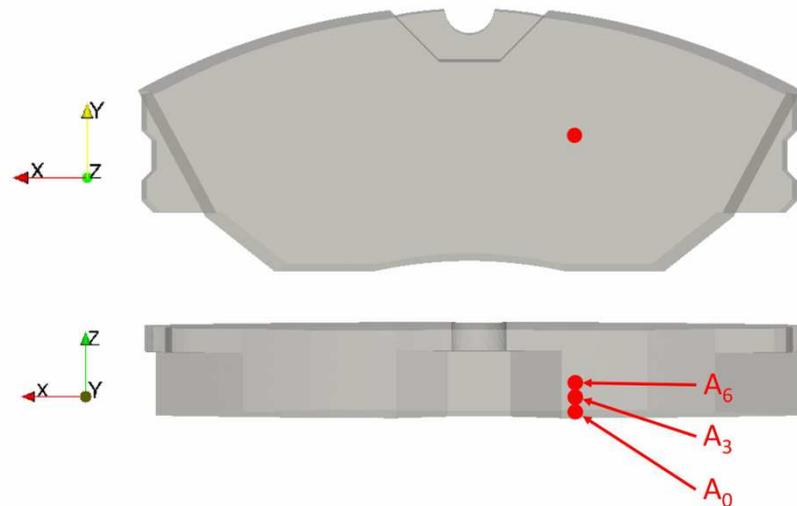
$$\begin{cases} d^k = -\nabla \mathcal{J}^k & k = 0 \\ d^k = -\nabla \mathcal{J}^k + \gamma^k d^{k-1} & k > 0 \end{cases}$$

$$\gamma^k = \frac{\|\nabla \mathcal{J}^k\|^2}{\|\nabla \mathcal{J}^{k-1}\|^2}$$

$$\rho^k = -\alpha \frac{\langle \nabla J(\mathbf{U}^k), d^k \rangle}{\langle \nabla J(\mathbf{U}^k + \alpha d^k), d^k \rangle - \langle \nabla J(\mathbf{U}^k), d^k \rangle}$$

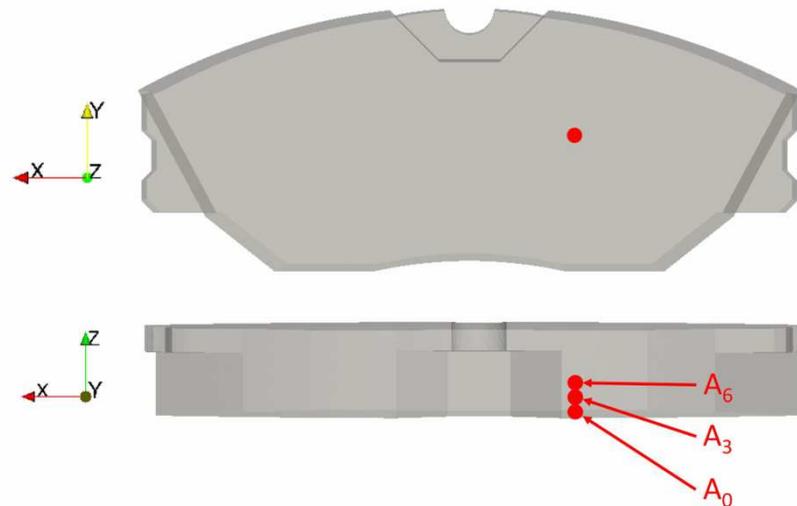
1^{ère} application :

1. En connaissant la répartition spatiale, estimer l'évolution temporelle de la densité de flux.
 - En partant d'un point de mesure A_3 situé à 3mm.

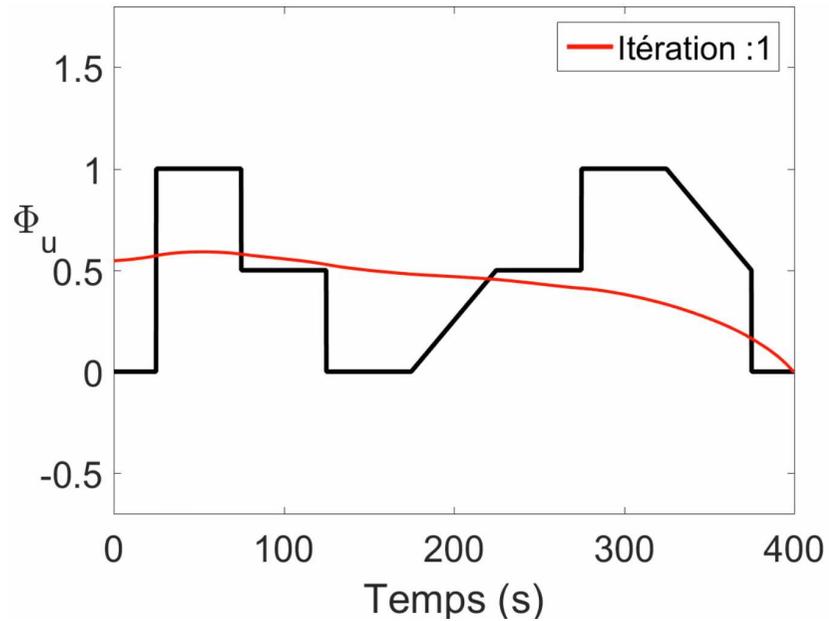


1^{ère} application :

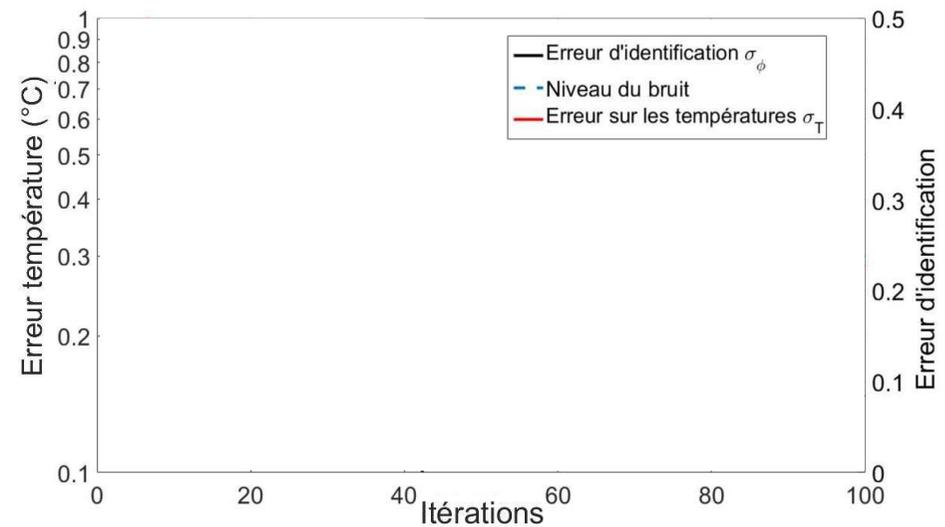
1. En connaissant la répartition spatiale, estimer l'évolution temporelle de la densité de flux.
 - En partant d'un point de mesure A_3 situé à 3mm.
 - Mesure obtenue par le modèle complet.
 - En additionnant un bruit blanc de mesure de 0.3°C .



Evolution du flux identifié



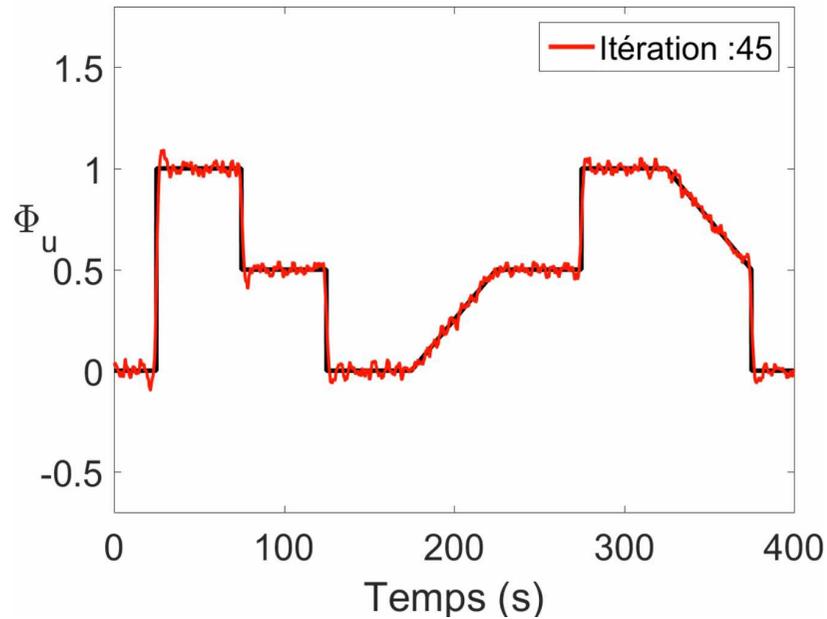
Evolution des erreurs



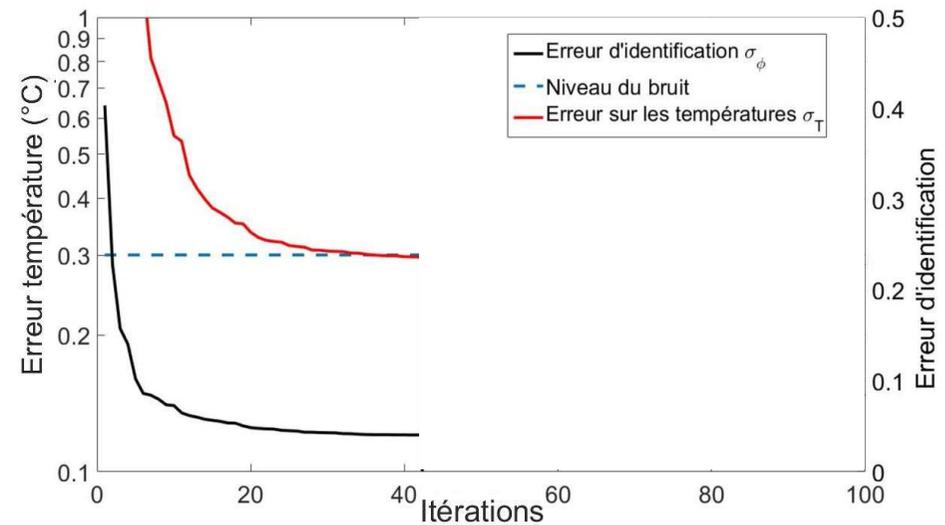
$$\overline{\sigma_T}^{Id} = \sqrt{\frac{J(\mathbf{U}^k)}{N_t}} < \sigma_T^{crit} = \sigma_B$$

$$\frac{J(\mathbf{U}^{k-50}) - J(\mathbf{U}^k)}{J(\mathbf{U}^k)} < 1\%$$

Evolution du flux identifié



Evolution des erreurs



Critères d'arrêt : Erreur sur les températures

$$\overline{\sigma_T}^{Id} = \sqrt{\frac{J(\mathbf{U}^k)}{N_t}} < \sigma_T^{crit} = \sigma_B$$

Vitesse de convergence

$$\frac{J(\mathbf{U}^{k-50}) - J(\mathbf{U}^k)}{J(\mathbf{U}^k)} < 1\%$$

2^{ème} application :

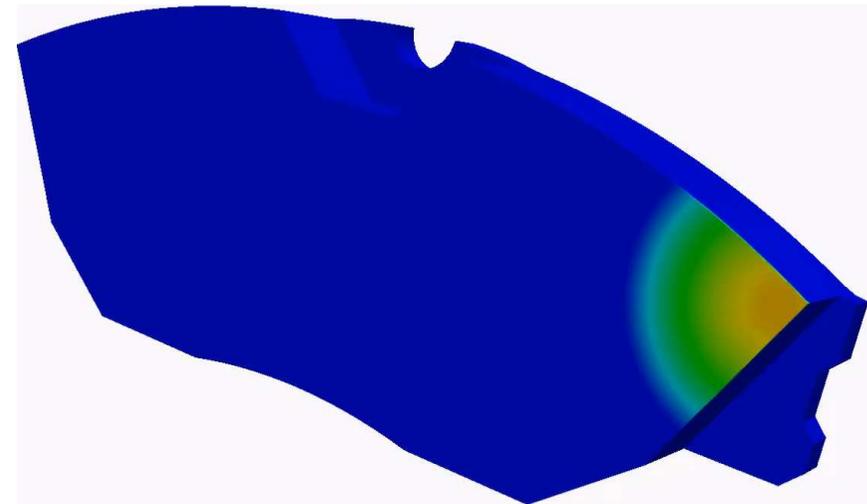
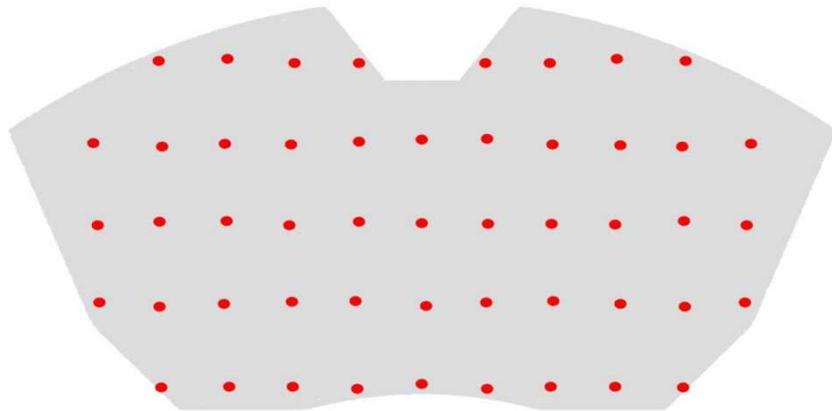
1. Estimer l'évolution spatio-temporelle de la densité de flux (5849 ddl).

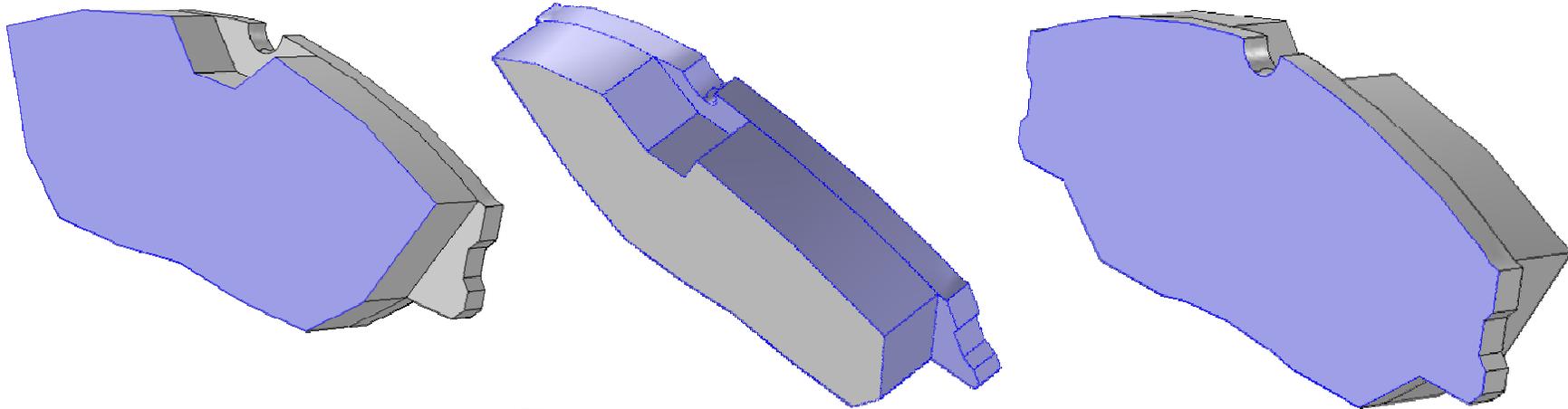
- **En partant d'une grille de points de mesure située à 3mm.**
- **En additionnant un bruit blanc de mesure de 0.3°C.**

2^{ème} application :

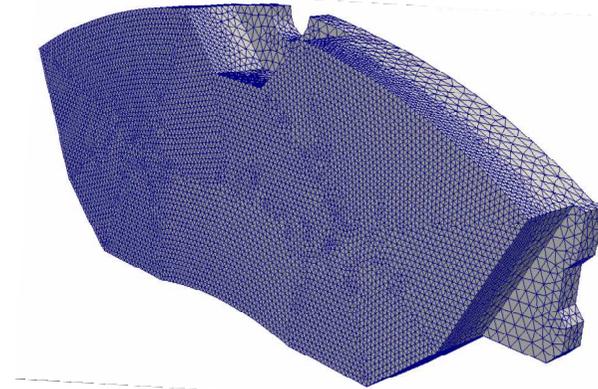
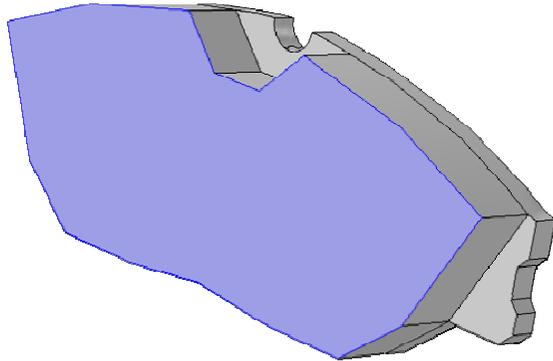
1. Estimer l'évolution spatio-temporelle de la densité de flux (5849 ddl).

- En partant d'une grille de points de mesure située à 3mm.
- En additionnant un bruit blanc de mesure de 0.3°C.
- Paramétriser la densité de flux sur une base modale réduite.





$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0 & ; \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) \\ \forall M \in \Gamma_1, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi(x, y, t) \\ \forall M \in \Gamma_2, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -hT \\ \forall M \in \Gamma_3, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0 \\ \forall M \in \Omega, t = 0 & ; \quad T = T_0 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \varphi(x, y, t) = \sum_{k=1}^N x_k^{(\varphi)}(t) V_k^{(\varphi)}(x, y) \\ \varphi(x, y, t) = \sum_{k=1}^{n(\varphi)} x_k^{(\varphi)}(t) \tilde{V}_k^{(\varphi)}(x, y) \end{array}$$



$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall M \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0 & ; \quad c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) \\ \forall M \in \Gamma_1, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \varphi(x, y, t) \\ \forall M \in \Gamma_2, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = -hT \\ \forall M \in \Gamma_3, t > 0 & ; \quad k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = 0 \\ \forall M \in \Omega, t = 0 & ; \quad T = T_0 = 0 \end{array} \right.$$

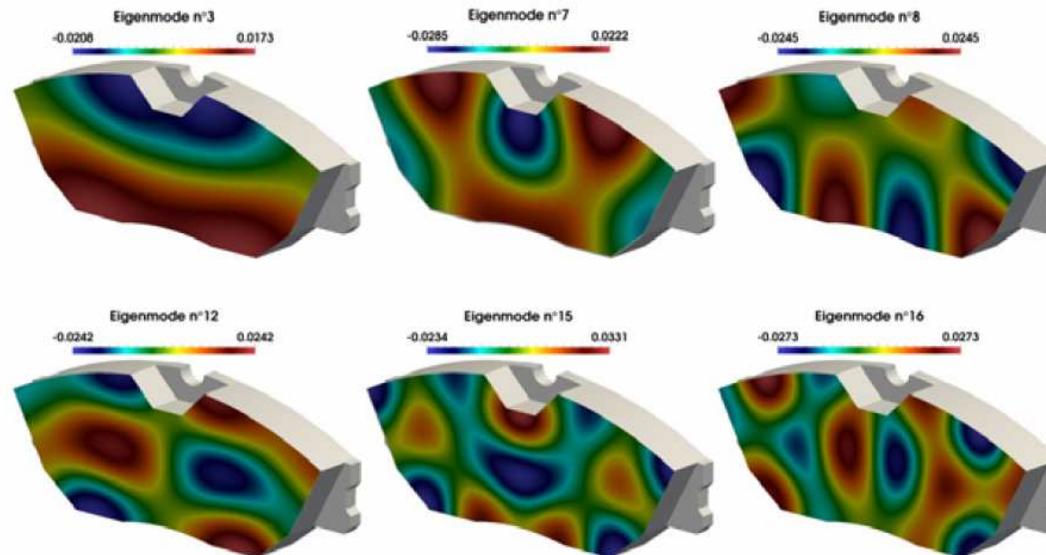
$$C\dot{T} = AT + \sum_{k=1}^{\tilde{n}(\varphi)} W \tilde{V}_k^{(\varphi)} \tilde{x}_k^{(\varphi)}$$

$$L\dot{X}^{(T)} = M\tilde{X}^{(T)} + D\tilde{X}^{(\varphi)}$$

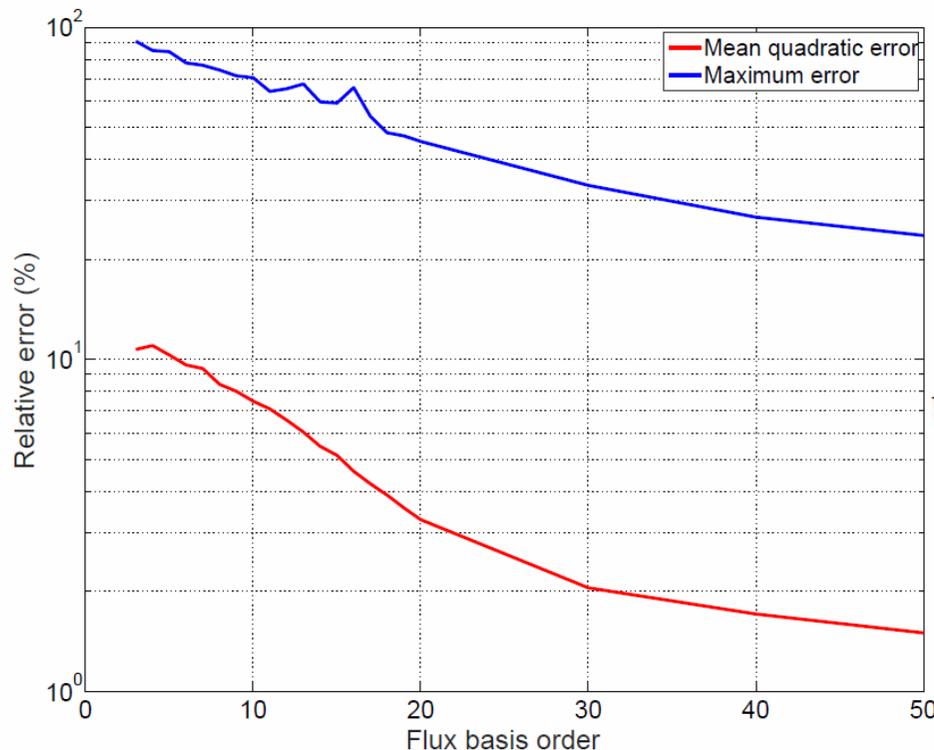
$$D = \tilde{V}^{(T)t} W \tilde{V}^{(\varphi)}$$

- Construction de la base en flux :

$$\begin{cases} \forall M \in \Gamma_1 & : & a \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \hat{V}_i^{(\varphi)}) = z_i \hat{V}_i^{(\varphi)} \\ \forall M \in \gamma & : & a \vec{\nabla} \hat{V}_i^{(\varphi)} \cdot \vec{n} = -z_i \zeta^{(\varphi)} \hat{V}_i^{(\varphi)} \end{cases}$$



- Réduction de la base en flux : la procédure d'amalgame permet à partir des champs de référence φ_{ref} d'obtenir une base réduite $\tilde{V}^{(\varphi)}$

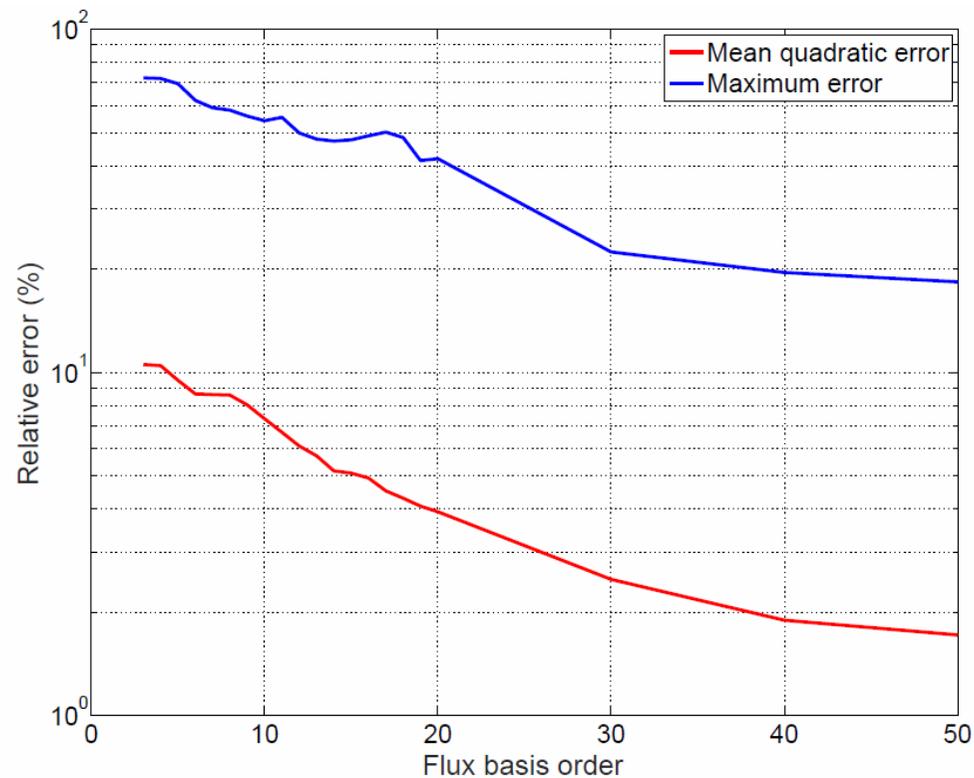


$$\bar{\sigma}_{\varphi}^R = \frac{1}{N_t} \frac{1}{\int_{\Gamma_1} d\Gamma} \frac{1}{\max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ \forall M \in \Gamma_1}} |\varphi^i(M)|} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Gamma_1} \left| \varphi_i(M) - \sum_{k=1}^{\tilde{n}^{(\varphi)}} \tilde{x}_k^{(\varphi)i} \tilde{V}_k^{\varphi}(M) \right| d\Gamma$$

$$\sigma_{\varphi_{max}}^R = \max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ \forall M \in \Gamma_1}} \left| \varphi_i(M) - \sum_{k=1}^{\tilde{n}^{(\varphi)}} \tilde{x}_k^{(\varphi)i} \tilde{V}_k^{\varphi}(M) \right|$$

With 30 modes, the mean quadratic error $\bar{\sigma}_{\varphi}^R = 2\%$, and the maximum error $\sigma_{\varphi_{max}}^R = 32\%$

- Analyse de la base réduite pour φ_1 :



$$\bar{\sigma}_{\varphi}^R = \frac{1}{N_t} \frac{1}{\int_{\Gamma_1} d\Gamma} \frac{1}{\max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ \forall M \in \Gamma_1}} |\varphi^i(M)|} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Gamma_1} \left| \varphi_i(M) - \sum_{k=1}^{\tilde{n}(\varphi)} \tilde{x}_k^{(\varphi)i} \tilde{V}_k^{\varphi}(M) \right| d\Gamma$$

$$\sigma_{\varphi_{max}}^R = \max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ \forall M \in \Gamma_1}} \left| \varphi_i(M) - \sum_{k=1}^{\tilde{n}(\varphi)} \tilde{x}_k^{(\varphi)i} \tilde{V}_k^{\varphi}(M) \right|$$

Principe de la méthode de l'Adjoint

Minimisation d'une fonctionnelle

$$J(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \| \mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t) \|^2 dt$$

Utilisation du Lagrangien

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{X}}^{(\mathbf{T})}, \boldsymbol{\lambda}) = J(\mathbf{U}) + \int_0^\tau \boldsymbol{\lambda}(t) \left(-\mathbf{L} \frac{d\tilde{\mathbf{X}}^{(\mathbf{T})}}{dt} + \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}}^{(\mathbf{T})} + \mathbf{D} \tilde{\mathbf{X}}^{(\varphi)} \right) dt$$

Dérivées nulles du Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \dot{\tilde{\mathbf{X}}}^{(\mathbf{T})} &= \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}}^{(\mathbf{T})} + \mathbf{D} \tilde{\mathbf{X}}^{(\varphi)} \\ -\mathbf{L} \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} &= \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{V}}^{(\mathbf{T})t} \mathbf{E}^t \left(\mathbf{Y}(t) - \hat{\mathbf{Y}}(t) \right) \end{aligned}$$

Avec un gradient conjugué

$$\nabla J = \mathbf{B}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\lambda}$$

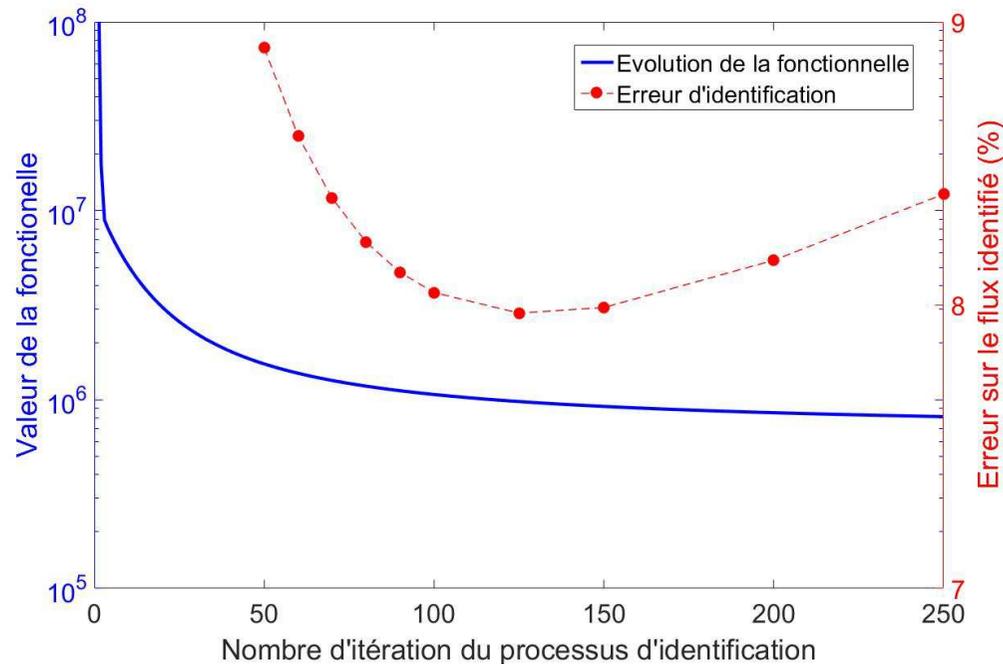
$$\hat{\mathbf{X}}^{(\varphi)^{k+1}} = \hat{\mathbf{X}}^{(\varphi)^k} + \rho^k d^k$$

$$\begin{cases} d^k = -\nabla \mathcal{J}^k & k = 0 \\ d^k = -\nabla \mathcal{J}^k + \gamma^k d^{k-1} & k > 0 \end{cases}$$

$$\gamma^k = \frac{\| \nabla \mathcal{J}^k \|^2}{\| \nabla \mathcal{J}^{k-1} \|^2}$$

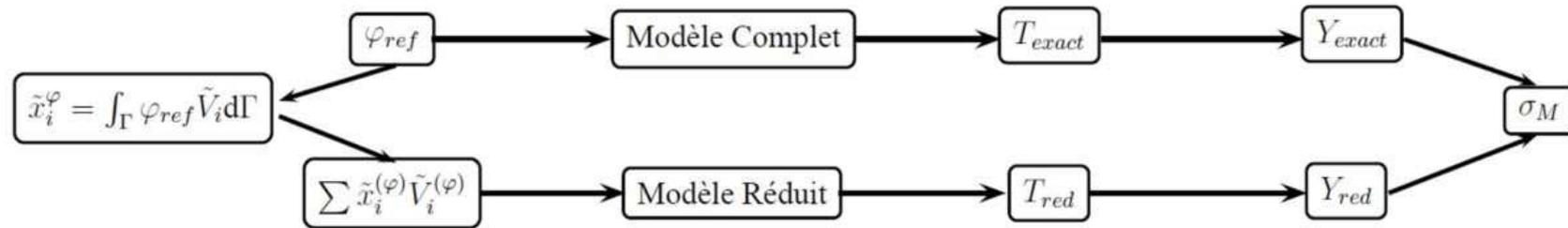
$$\rho^k = -\alpha \frac{\langle \nabla J \left(\hat{\mathbf{X}}^{(\varphi)^k} \right), d^k \rangle}{\langle \nabla J \left(\hat{\mathbf{X}}^{(\varphi)^k} + \alpha d^k \right), d^k \rangle - \langle \nabla J \left(\hat{\mathbf{X}}^{(\varphi)^k} \right), d^k \rangle}$$

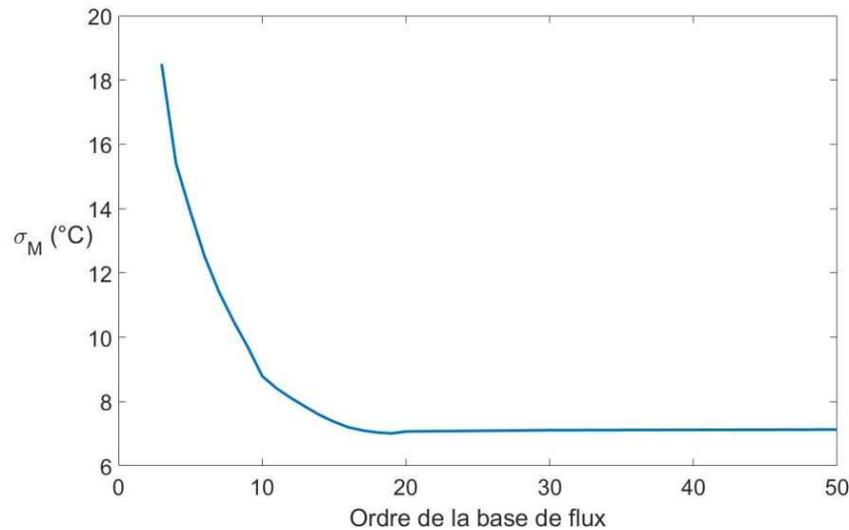
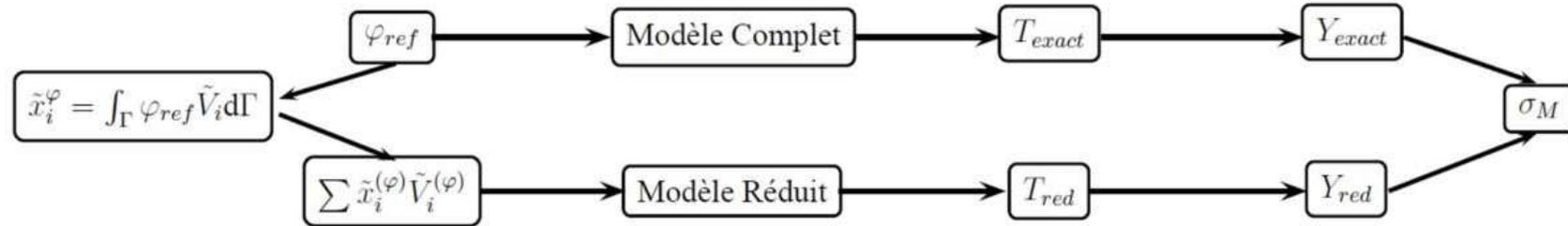
- Estimation de la densité de flux φ_1 :



$$\overline{\sigma}_T^{Id} = \sqrt{\frac{J(\mathbf{U}^k)}{N_t}}$$

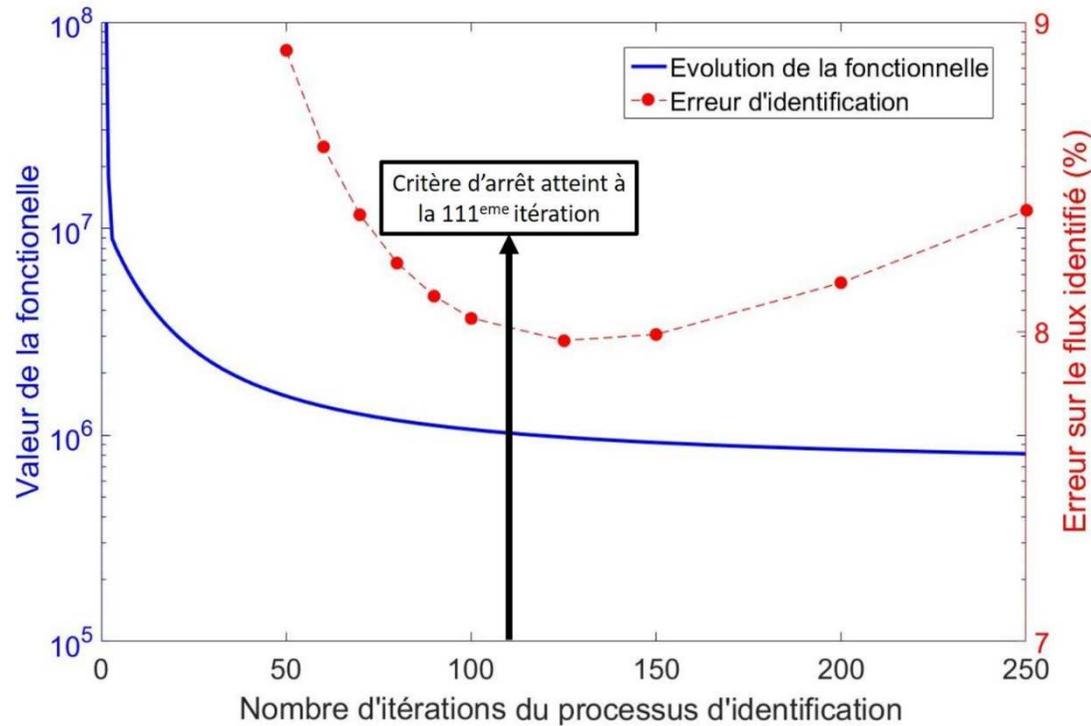
$$\overline{\sigma}_\varphi^{Id} = \frac{1}{N_t} \frac{1}{\int_{\Gamma_1} d\Gamma} \frac{1}{\max_{\substack{i \in \{1, N_t\} \\ \forall M \in \Gamma_1}} |\varphi^i(M)|} \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Gamma_1} |\varphi^i(M) - \hat{\varphi}^i(M)| d\Gamma$$





Ainsi l'erreur du modèle dépend de l'ensemble des paramètres utilisés:

- Le choix du scénario de référence ;
- l'ordre de la base réduite en température;
- l'ordre de la base réduite en densité de flux;
- la position et le nombre des capteurs de température



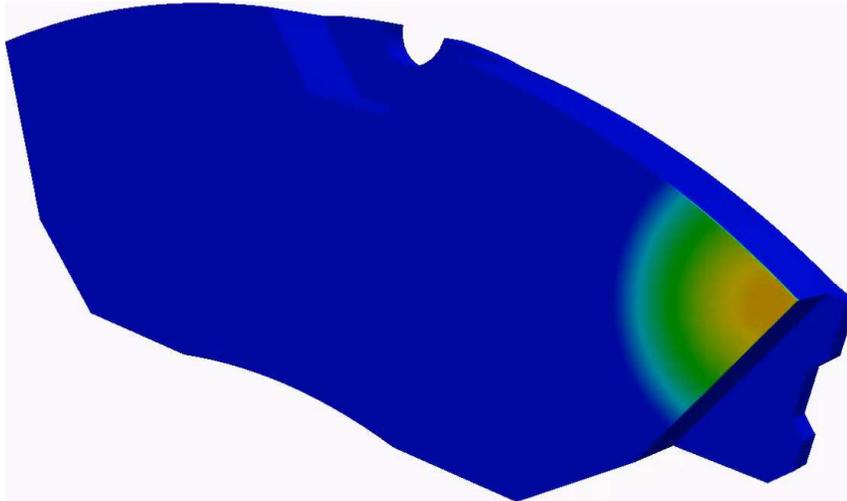
$$\overline{\sigma}_T^{Id} = \sqrt{\frac{J(\mathbf{U}^k)}{N_t}} < \sigma_T^{crit} = \sigma_M + \sigma_B$$

Nombre de fonctions de paramétrisation : $n^{(\varphi)} = 30$

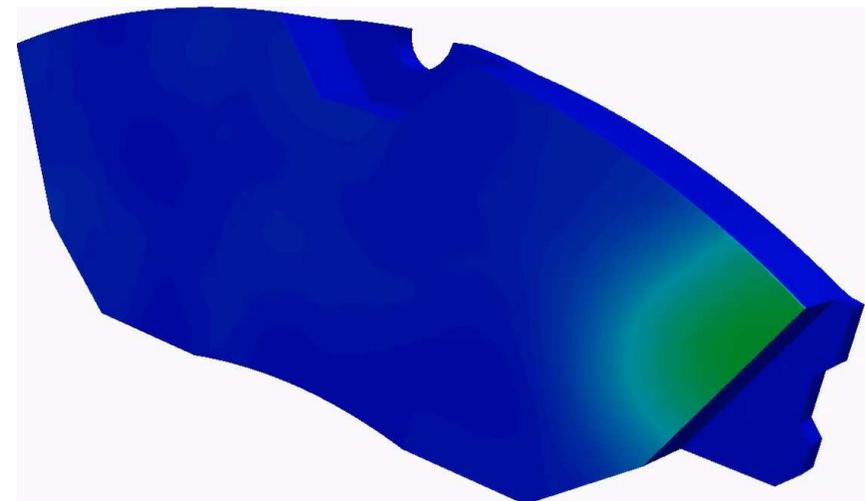
Erreur d'identification sur les 5849 nœuds de la frontière : 7,88 %

Temps de calcul : 115 s pour 111 itérations

Flux exact



Flux identifié

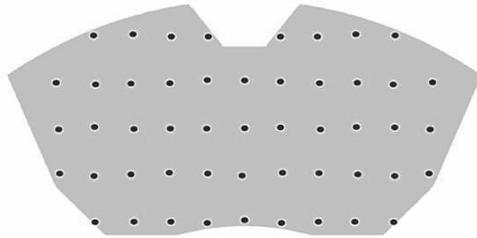


Nombre de fonctions de paramétrisation : $n^{(\varphi)} = 30$

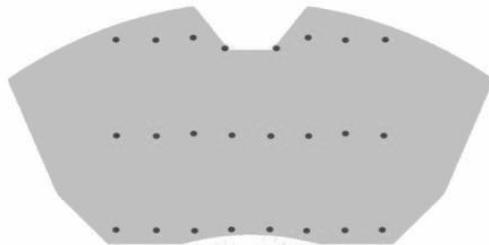
Erreur d'identification sur les 5849 nœuds de la frontière : 7,88 %

Temps de calcul : 115 s pour 111 itérations

50 points

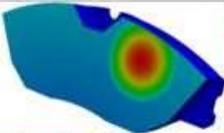
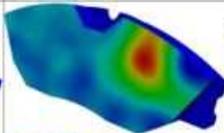
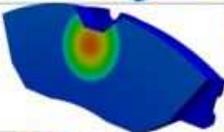
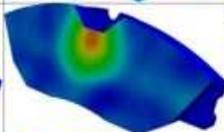
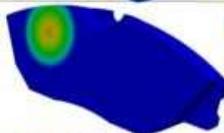
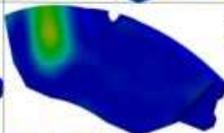
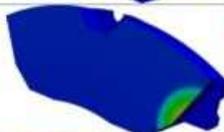
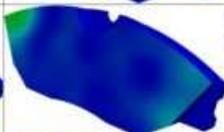
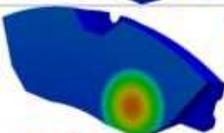
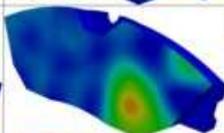
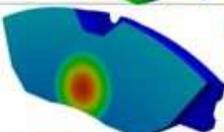
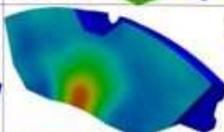
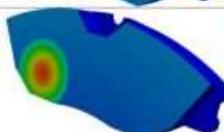
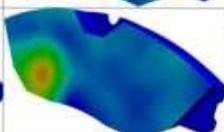


24 points

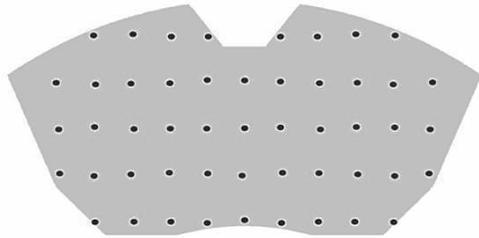


12 points

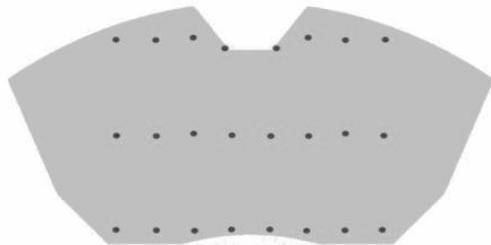


Cas 1	Flux exact	Flux identifié 50 capteurs	Flux identifié 24 capteurs	Flux identifié 12 capteurs
t=50				
t=100				
t=150				
t=200				
t=250				
t=300				
t=350				

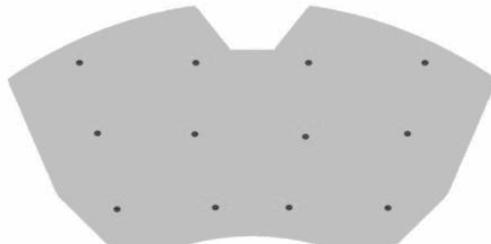
50 points



24 points



12 points



Cas 1	Flux exact	Flux identifié 50 capteurs	Flux identifié 24 capteurs	Flux identifié 12 capteurs
t=50				
t=100				
t=150				
t=200				
t=250				
t=300				
t=350				

Conclusions

- **Intérêt des modèles réduits dans un processus d'identification**
 - ✓ Utilisable pour tous types de problèmes
 - ✓ Facilement adaptable
 - ✓ Permet le calcul en temps réel
- **Premiers résultats prometteurs pour la paramétrisation du flux**
- **Améliorer la procédure d'amalgame en intégrant la phase de réduction dans la procédure inverse.**

**Utilisation de modèles réduits par modes de
Branche pour l'identification de sources
thermiques :
application au freinage**

**Merci de votre
attention**

