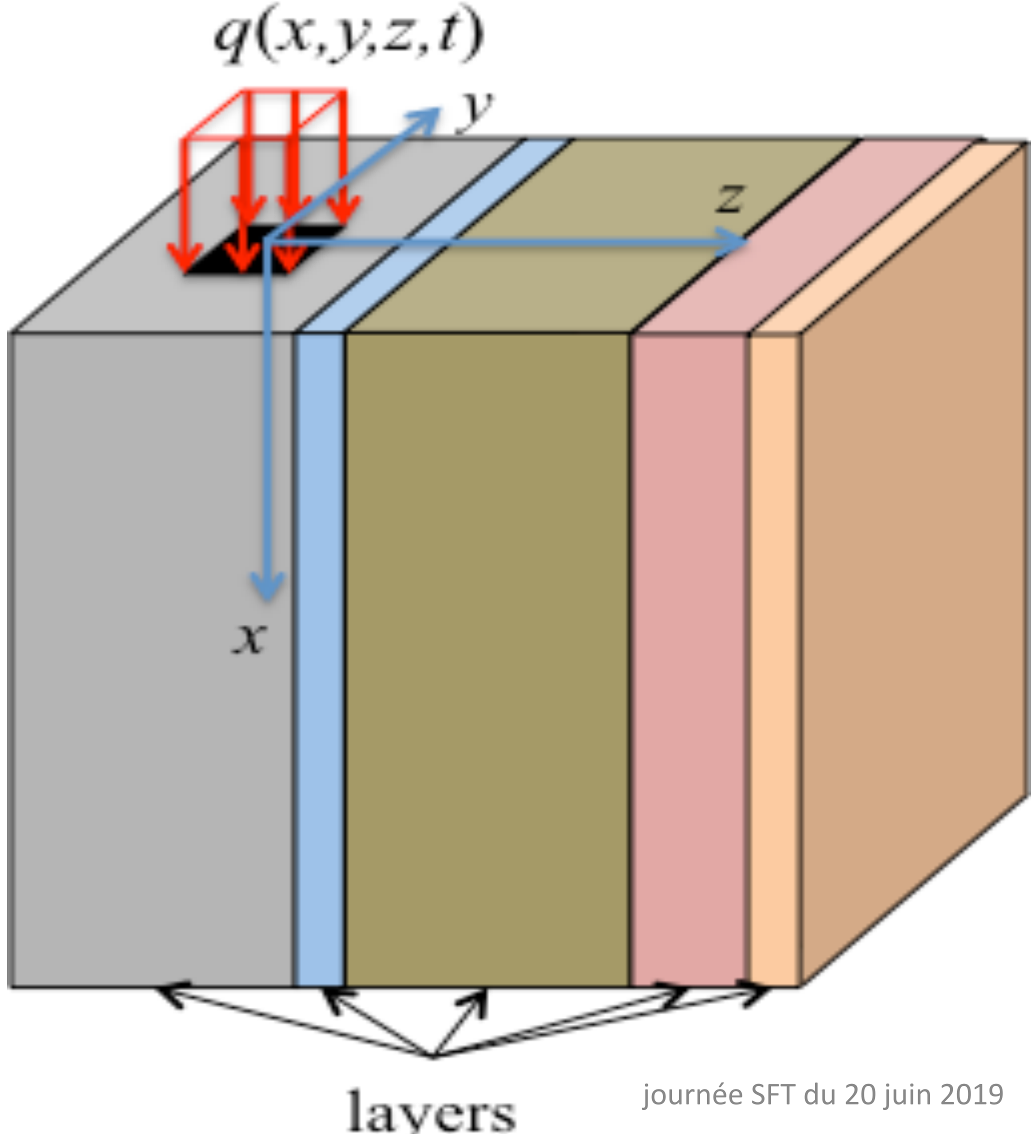
# Modélisation du transfert de chaleur avec sources par quadripôles et impédances thermiques

Jean-Luc Battaglia, Christophe Pradère, Emmanuel Ruffio (I2M)

Alain Degiovanni (LEMTA)

# Objectif




Une source de chaleur volumique est appliquée sur une couche constitutive d'un multicouche.

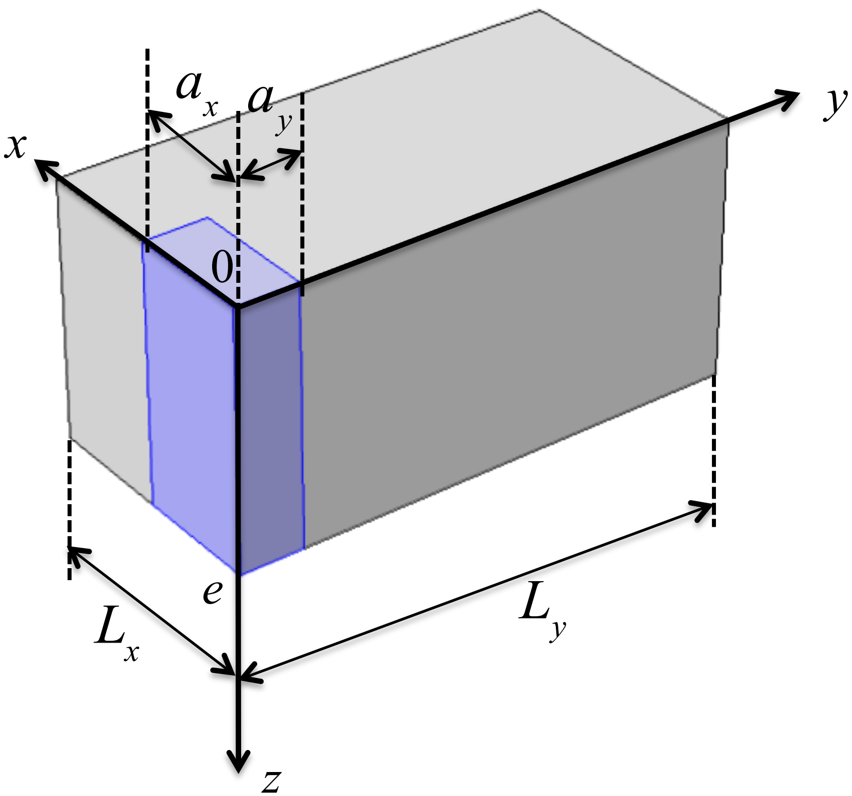
But : déterminer la température moyenne de la source en fonction de sa position sur le système

Applications en caractérisation thermique (thermoréflectance, radiométrie photothermique, SThM)

# Source localisée dans une couche

$$\rho C_p \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} + g(x,y,z,t)$$

$$\text{for } 0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < e, \text{ at } t > 0$$




$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x} = 0, \text{ at } x = 0 \text{ and } x = L_x, t > 0$$

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} = 0, \text{ at } y = 0 \text{ and } y = L_y, t > 0$$

$$T(x,y,z,t) = 0, \text{ for } 0 \le x \le L_x, 0 \le y \le L_y, 0 \le z \le e, \text{ at } t = 0$$

CL en z non encore stipulées ici

# Source localisée dans une couche

Transformée de Laplace sur le temps

Ou régime fréquentiel $p = j\omega$

$$\theta\left(x,y,z,p\right)=\int_0^\infty T\left(x,y,z,t\right)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

$$\rho C_p p\theta\left(x,y,z,p\right)=k_x\frac{\partial^2\theta\left(x,y,z,p\right)}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2\theta\left(x,y,z,p\right)}{\partial y^2}+k_z\frac{\partial^2\theta\left(x,y,z,p\right)}{\partial z^2}+\tilde{g}\left(x,y,z,p\right)$$

$$\text{for}\; 0<x<L_x, 0<y<L_y, 0<z<e$$

$$\frac{\partial\theta\left(x,y,z,p\right)}{\partial x}=0,\ \text{at}\ x=0\ \ \text{and}\ \ x=L_x$$

$$\frac{\partial\theta\left(x,y,z,p\right)}{\partial y}=0,\ \text{at}\ \ y=0\ \ \text{and}\ \ y=L_y$$

# Source localisée dans une couche

Transformée de Fourier sur x et y $$\bar{\theta} = \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \theta \cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{L_x} \text{ and } \beta_n = \frac{n\pi}{L_y}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{\theta}(\alpha_m,\beta_n,z,p)}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{p}{D_z} + \frac{D_x}{D_z}\alpha_m{}^2 + \frac{D_y}{D_z}\beta_n{}^2\right)\bar{\theta}(\alpha_m,\beta_n,z,p) + \frac{\bar{g}(\alpha_m,\beta_n,z,p)}{k_z} = 0$$

$$, \text{ for } 0 < z < e$$

Source uniforme $$g(x,y,z,t) = \begin{cases} g_0\ \delta(t) \text{ for } 0 \le x \le a_x,\ 0 \le y \le a_y,\ 0 \le z \le e, t > 0 \\ 0 \text{ elsewhere} \end{cases}$$

$$\bar{g}_0 = \begin{cases} g_0\, a_x\, a_y,\ n = m = 0 \\ g_0\, a_x \sin(a_y\, \beta_m)/\beta_m,\ n = 0,\ m \ne 0 \\ g_0\, a_y \sin(a_x\, \alpha_n)/\alpha_n,\ n \ne 0,\ m = 0 \\ g_0 \sin(a_y\, \beta_m)\sin(a_x\, \alpha_n)/\beta_m\, \alpha_n,\ n \ne 0,\ m \ne 0 \end{cases}$$

# Source localisée dans une couche

Solution quadripôle

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_0 \\ \bar{\psi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_e \\ \bar{\psi}_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$A = \cosh\left(\delta_{m,n}\, e\right); \;\; B = \frac{\sinh\left(\delta_{m,n}\, e\right)}{k_z\, \delta_{m,n}}; \;\; C = k_z\, \delta_{m,n} \sinh\left(\delta_{m,n}\, e\right)$$

D. Maillet, S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, and C. Moyne. *Thermal quadrupoles; solving the heat equation through integral transforms*. Wiley ed., New York, 2000

$$X = \int_0^e \bar{g}\left(z\right) \frac{\sinh\left(\delta_{m,n}\, z\right)}{k_z\, \delta_{m,n}} \mathrm{d}z = \bar{g}_0 \frac{\cosh\left(\delta_{m,n}\, e\right) - 1}{k_z\, \delta_{m,n}{}^2}$$

$$Y = \int_0^e \bar{g}\left(z\right) \cosh\left(\delta_{m,n}\, z\right) \mathrm{d}z = \bar{g}_0 \frac{\sinh\left(\delta_{m,n}\, e\right)}{\delta_{m,n}}$$

$$\delta_{m,n}{}^2 = p / D_z + D_x / D_z\, \alpha_m{}^2 + D_y / D_z\, \beta_n{}^2$$

# Source localisée dans une couche

Retour à la solution fréquentielle

$$\theta = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{\theta}\cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)}{N_n N_m}$$

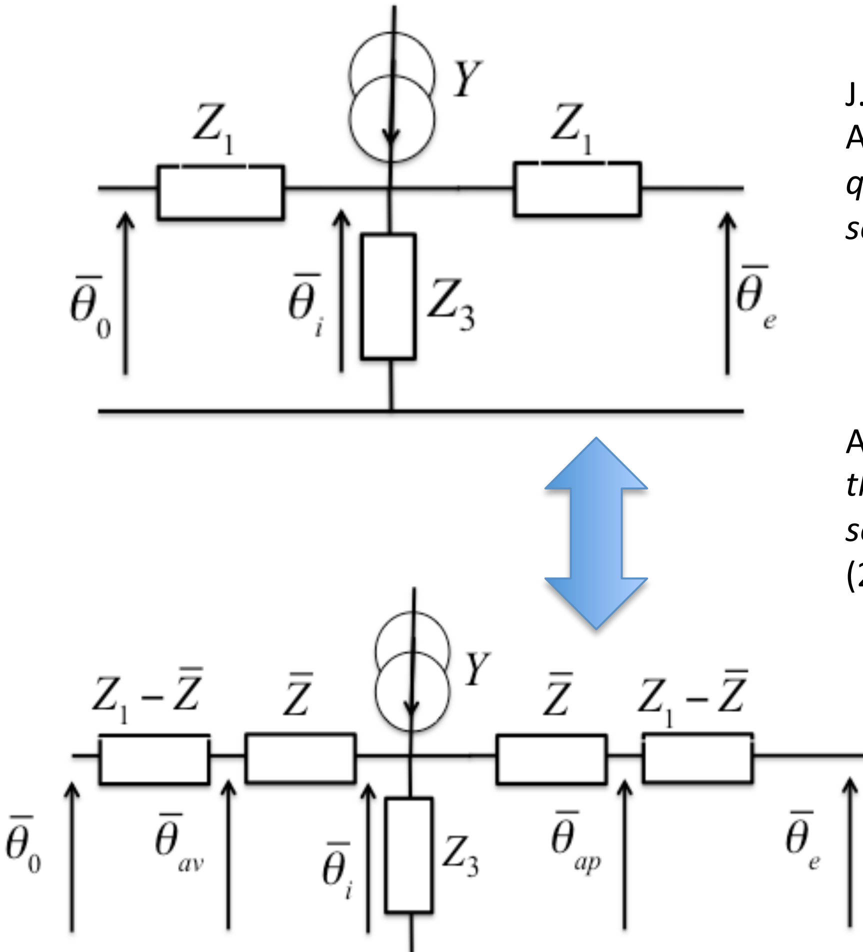
$$N_n = \begin{cases} L_x, n = 0 \\ \dfrac{L_x}{2}, n \neq 0 \end{cases} \qquad N_m = \begin{cases} L_y, m = 0 \\ \dfrac{L_y}{2}, m \neq 0 \end{cases}$$

Température moyenne à  la surface z = 0

$$\langle \theta_0 \rangle_{xy}^{1D} = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_X}\int_0^{L_Y} \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{\theta}\cos(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)}{N_n N_m} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{L_x L_y} \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{\theta}\sin(\alpha_m L_x)\sin(\beta_n L_y)}{\alpha_m \beta_n N_n N_m}$$

# Source localisée dans une couche




J. Pailhes, C. Pradere, J.-L. Battaglia, J. Toutain, A. Kusiak, A.W. Aregba, J.C. Batsale, *Improvement of the thermal quadrupole method for multilayered media with heat sources*, J. Thermal Sciences **53**, 49–55 (2012).

$$Z_1 = \frac{A-1}{C} \quad \text{and} \quad Z_3 = \frac{1}{C}$$

A. Degiovanni, C. Pradere, E. Ruffio, J.-L. Battaglia, *Advanced thermal impedance network for the heat diffusion with sources*, International Journal of Thermal Sciences **130** (2018) 518–524

$$\bar{Z} = \frac{2}{k_z \delta_{m,n}^{\ 2} e}\left(1 - \frac{\delta_{m,n} e}{\sinh\left(\delta_{m,n} e\right)}\right)$$

Température moyenne de la source

$$\left\langle \bar{\theta} \right\rangle_{xyz} = \frac{\bar{\theta}_{av} + \bar{\theta}_{ap}}{2}$$

# Température moyenne de la source

Température moyenne selon z

$$\left\langle \bar{\theta} \right\rangle_z = \left( \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_e \right) Z_0 + \frac{Y}{k_z \, \delta_{m,n}{}^2} \left( 1 - 2\, Z_0 \right) \quad \text{Avec} \quad Z_0 = \frac{\cosh\left( \delta_{m,n}\, e \right) - 1}{\delta_{m,n}\, e \sinh\left( \delta_{m,n}\, e \right)}$$

Ou

$$\left\langle \bar{\theta} \right\rangle_z = \left( \left( 2 + \frac{Z_1}{Z_3} \right) \bar{\theta}_i + Z_1\, Y \right) Z_0 + \frac{Y}{k_z \, \delta_{m,n}{}^2} \left( 1 - 2\, Z_0 \right)$$

Température moyenne de la source

$$\left\langle \theta \right\rangle_{xyz} = \frac{1}{a_x\, a_y} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \frac{\left\langle \bar{\theta} \right\rangle_z \sin\left( \alpha_m\, a_x \right) \sin\left( \beta_n\, a_y \right)}{\alpha_m\, \beta_n\, N_n\, N_m}$$

# Source localisée dans une couche – impédances thermiques

CL en z

$$\partial T / \partial z = 0 \text{ at } z = 0$$

$$T = 0 \text{ at } z = e$$

$a_x = 0.25\mu\text{m}$

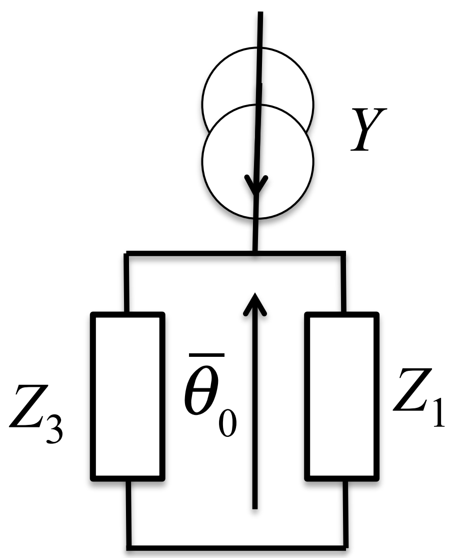
$a_y = 0.5\mu\text{m}$

$L_x = 2\mu\text{m}$

$L_y = 1\mu\text{m}$

$k_x = k_y = k_z = 1.4\,\text{W}\cdot\text{m}\cdot\text{K}^{-1}$

$g_0 = 2.8125\times10^{14}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$



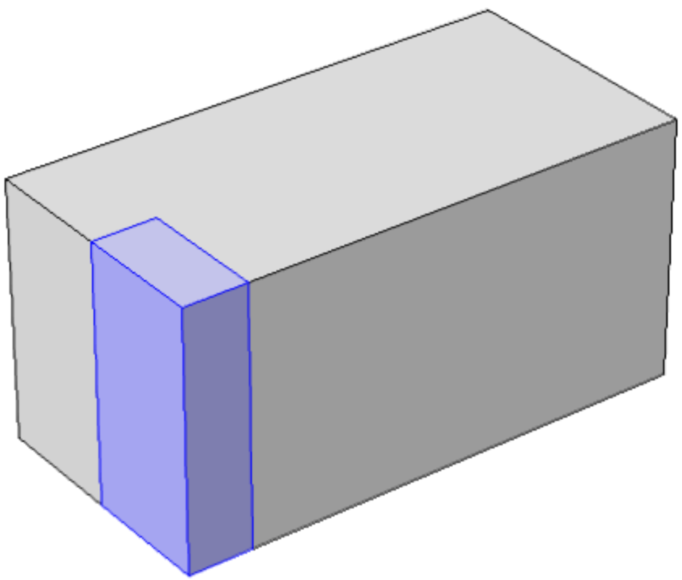

$$Z_1 = \frac{A-1}{C} \qquad Z_3 = \frac{1}{C}$$

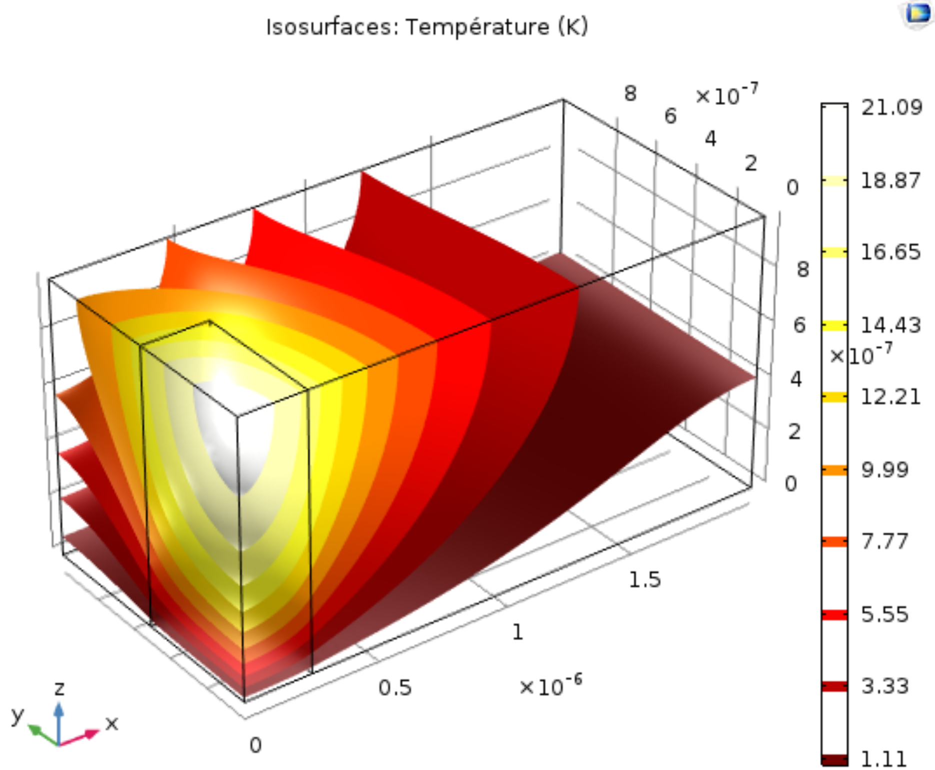
$$\overline{\theta}_0 = Z_e\,\overline{g}, \text{ with } Z_e = Z_1 \,\|\, Z_3 = \frac{1}{\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_3}}$$

# Source localisée dans une couche - EF

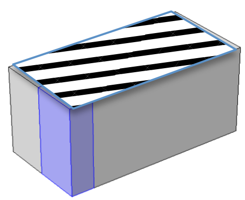
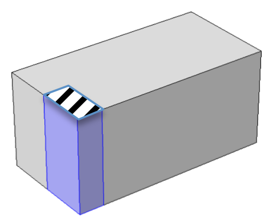
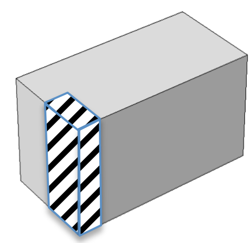
$$f = 1125\,\mathrm{Hz}$$

**TEST1.MPH**

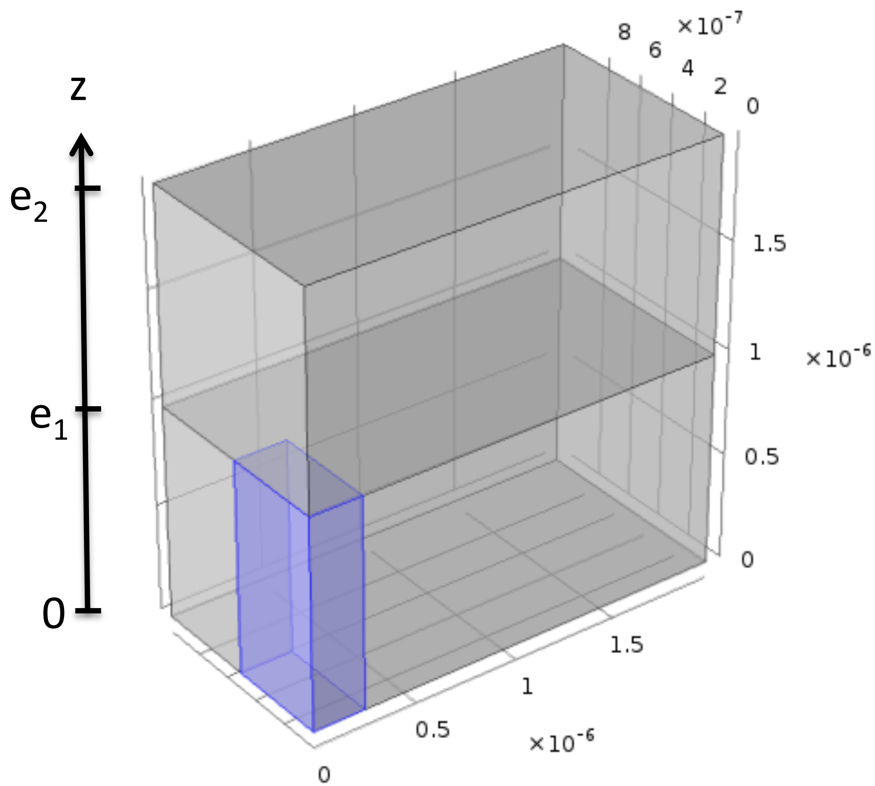


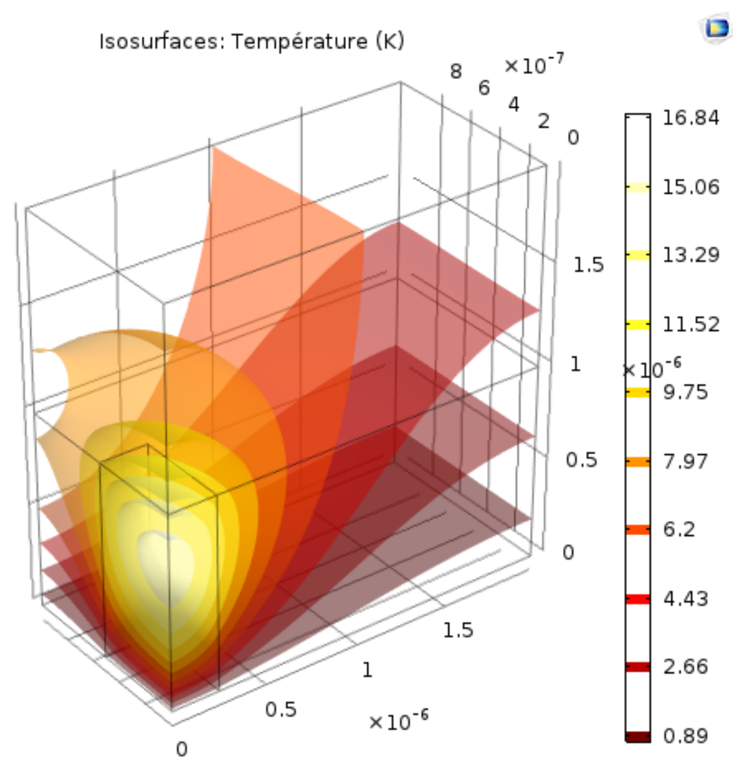


# Source localisée dans une couche - comparaison

| | $\langle \theta_0 \rangle_{xy}^{1D}$  | $\langle \theta_0 \rangle_{xy}^{3D}$  | $\langle \theta \rangle_{xyz}$  | CPU time (proc i7, 2.7 MHz) |
|---|---|---|---|---|
| FEA | 6,2778 | 19.034 | 13.616 | 8 s (13082 DoF) |
| *QuadS* | 6,2777 | 19.0337 | 13.6161 | 0.026 s ($M$=$N$=100) |

# 2 couches dont une avec source - EF



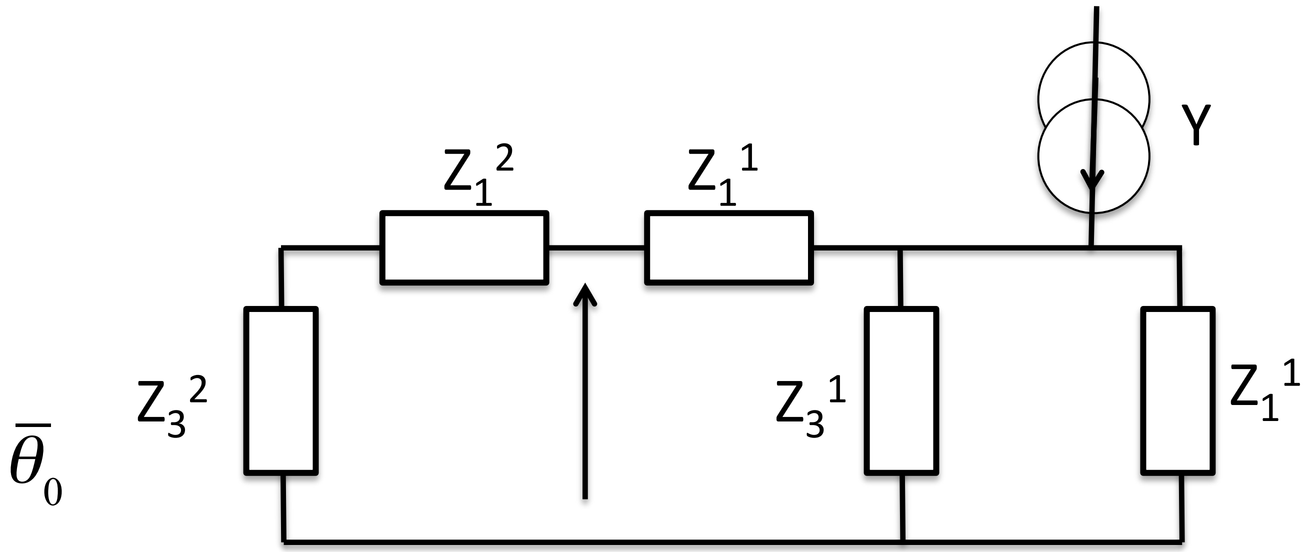

Flux nul sur paroi latérale et $z = e_2$
Température nulle sur paroi $z = 0$

$<T_2>_{\text{surface en } z=0} = 12{,}910$ °C

$<T_1>_{\text{surface en } z=0} = 6{,}2757$°C

# 2 couches dont une avec source–impédances thermiques

**TEST2.M**

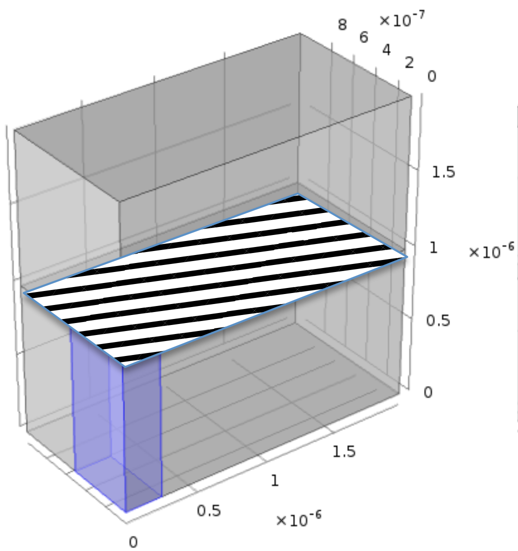


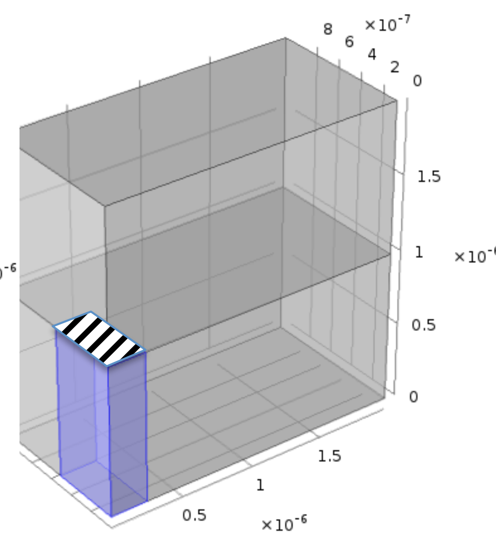

$$\boxed{\bar{\theta}_0 = Z_e Y}$$

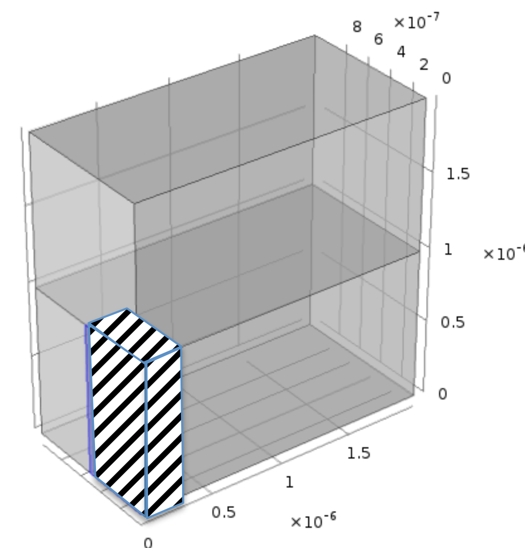
$$Z_e = \frac{Z_1^1 \,||\, Z_3^1}{1 + \dfrac{Z_1^2 + Z_1^1 \,||\, Z_3^1}{Z_1^2 + Z_3^2}}$$

# 2 couches - comparaison

| | $\langle\theta\rangle_{xy}(1D)$ | $\langle\theta\rangle_{xy}$ | $\langle\theta\rangle_{xyz}$ | **CPU (proc i7, 2.7 MHz)** |
|---|---|---|---|---|
| EF | 6,2757 | 12.910 | 11.653 | 10 s (23987 DoF) |
| QuadS | 6,2757 | 12.910 | 11.652 | 0.034 s (M=N=100) |

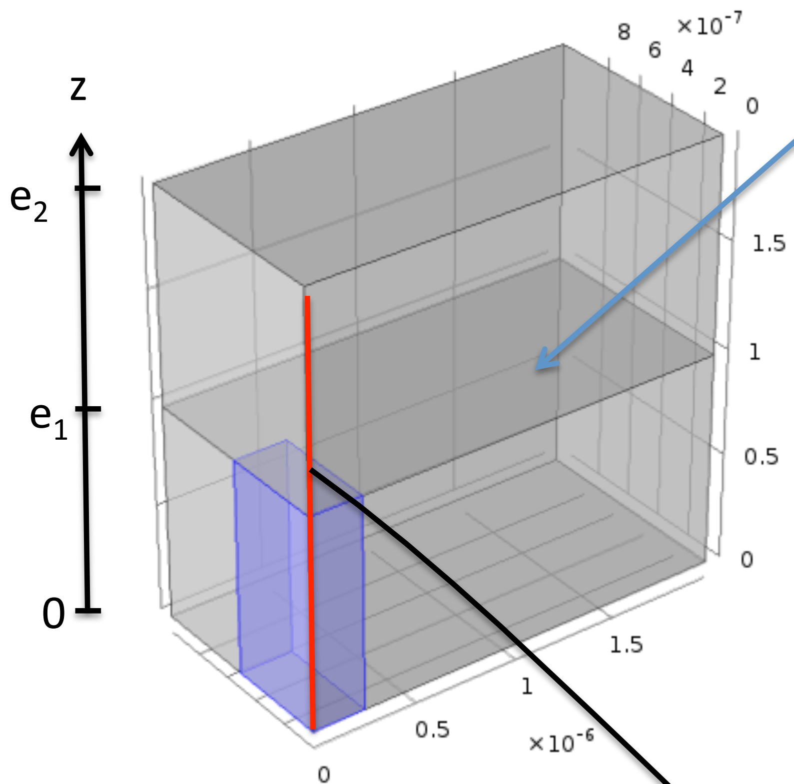


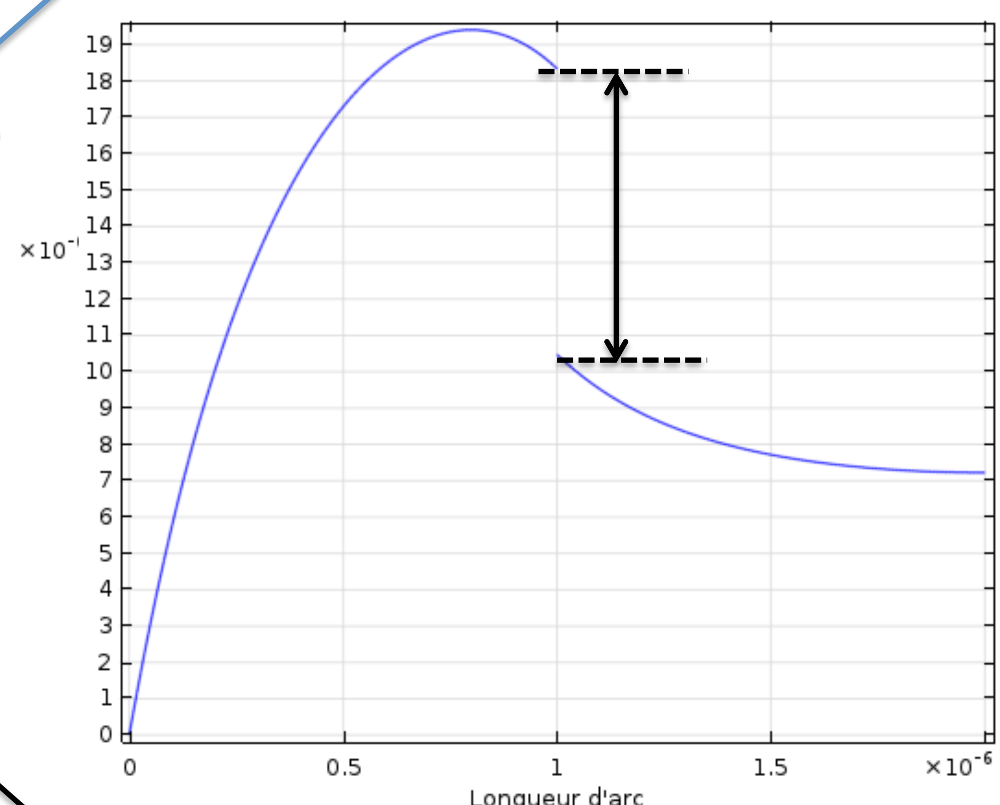



# 2 couches dont une avec source et résistance d'interface - EF

$$RTH = 5\times10^{-7}\ \mathrm{K.m^2/W}$$

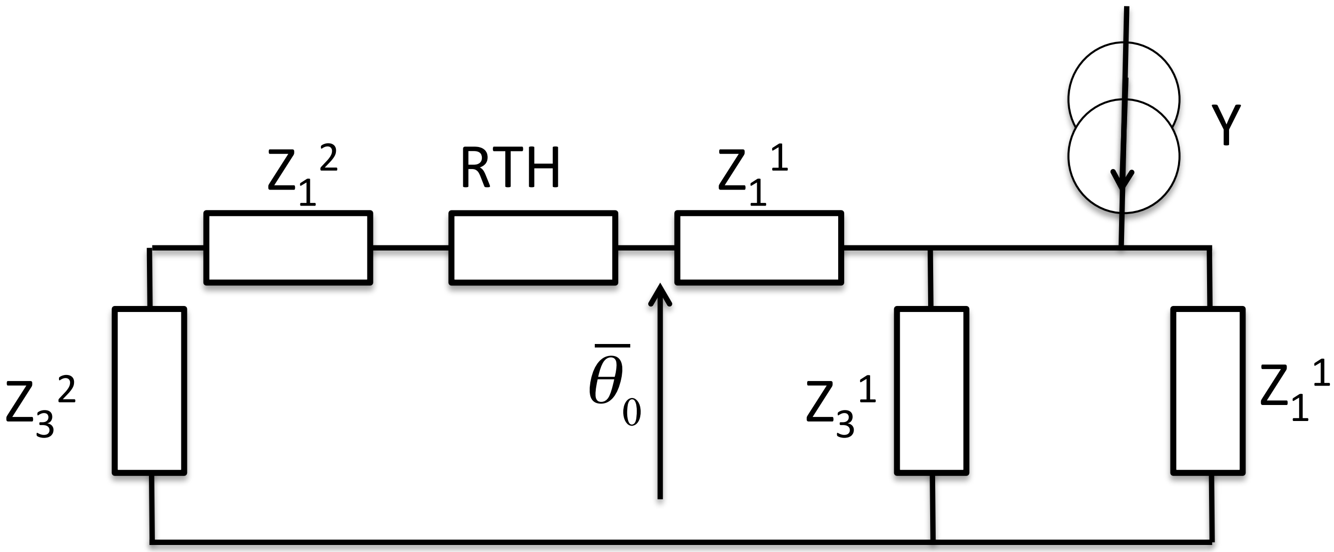



Flux nul sur paroi latérale et $z = e_2$
Température nulle sur paroi $z = 0$

# 2 couches dont une avec source et résistance interface – impédances thermiques

**TEST2.M**

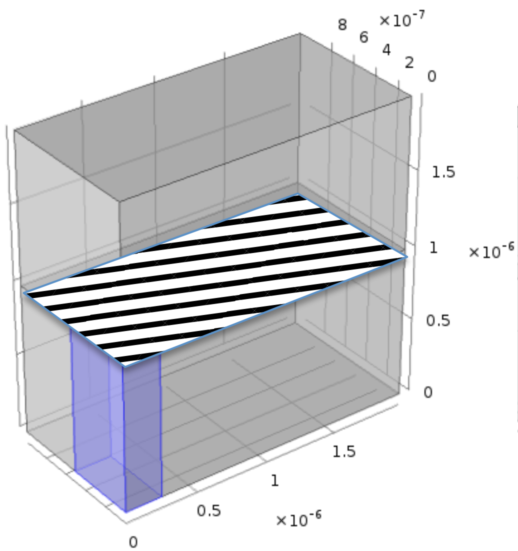


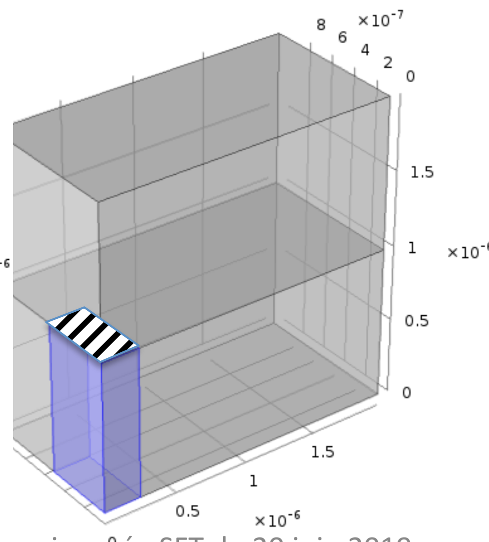

$$\overline{\theta}_0 = Z_e Y$$

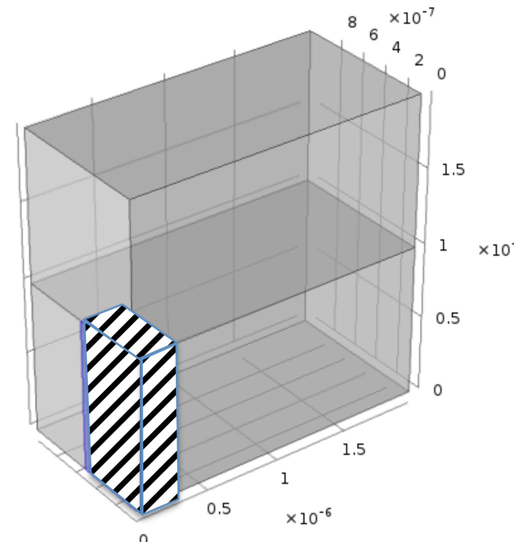
$$Z_e = \frac{Z_1^1 \,||\, Z_3^1}{1 + \dfrac{Z_1^2 + Z_1^1 \,||\, Z_3^1}{Z_1^2 + Z_3^2 + RTH}}$$

# 2 couches + RTC - comparaison

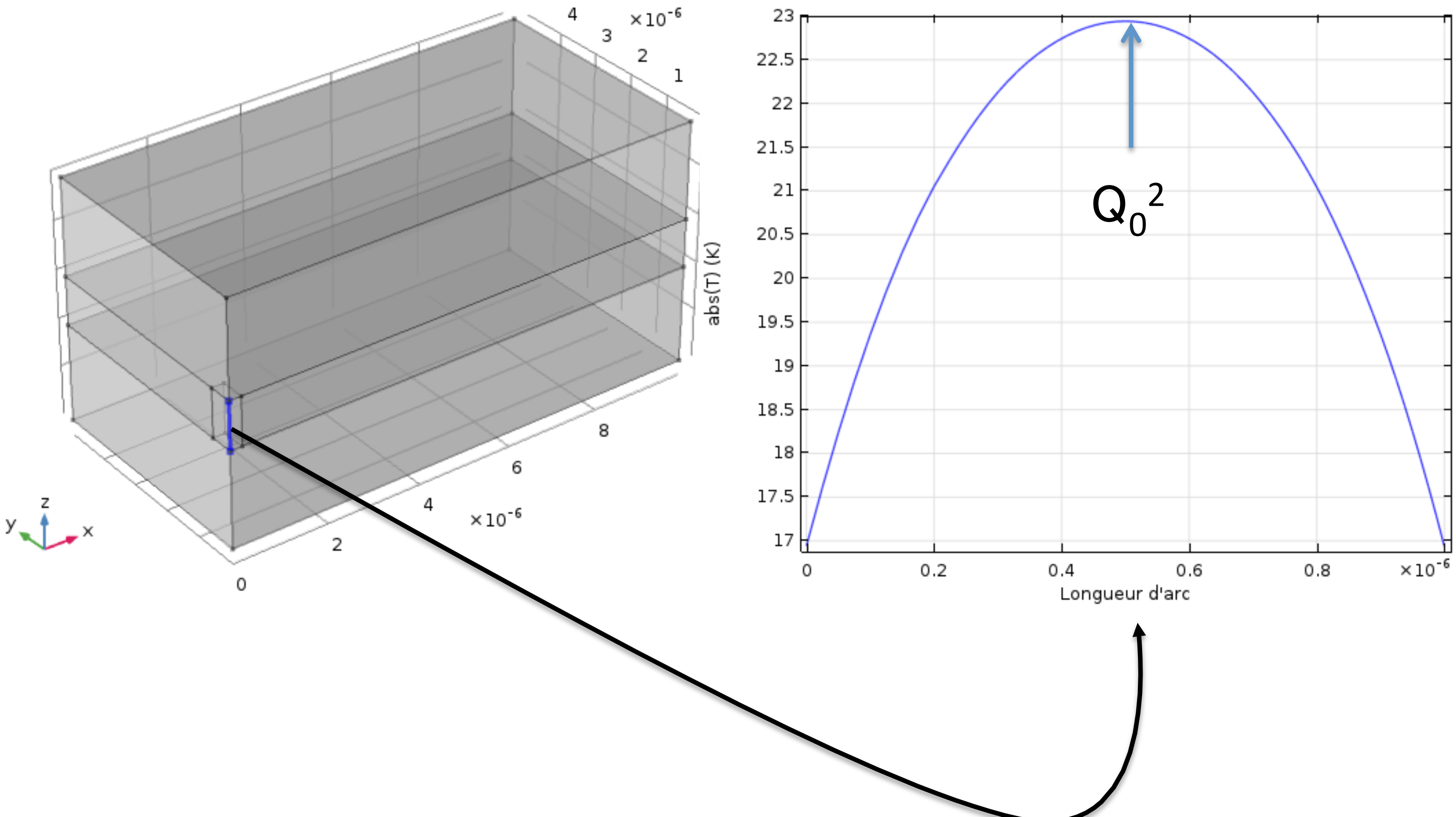
| | $\langle\theta\rangle_{xy}(1D)$ | $\langle\theta\rangle_{xy}$ | $\langle\theta\rangle_{xyz}$ | **CPU (proc i7, 2.7 MHz)** |
|---|---|---|---|---|
| EF | 6,2739 | 12.815 | 12.526 | 10 s (23987 DoF) |
| QuadS | 6,2742 | 15.857 | 12.5258 | 0.034 s (M=N=100) |



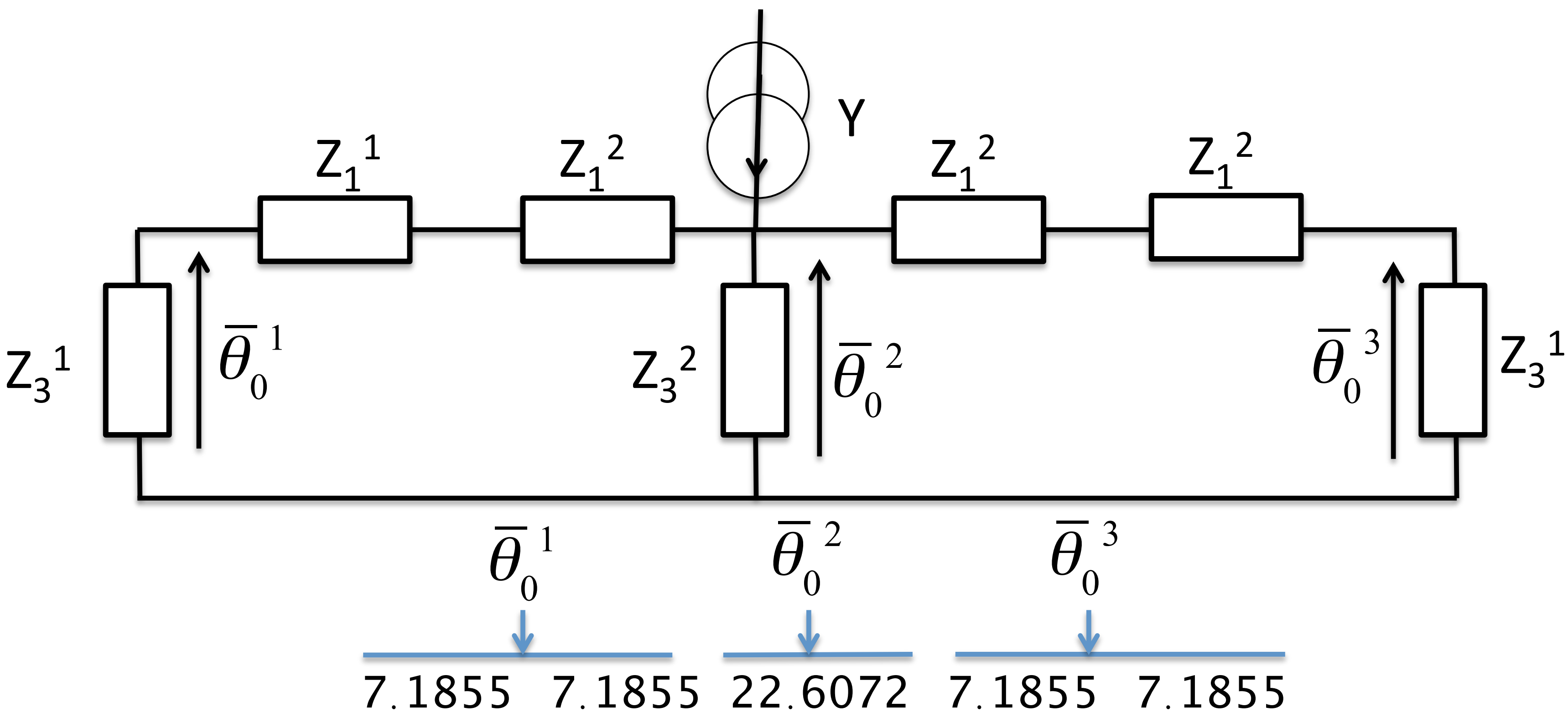



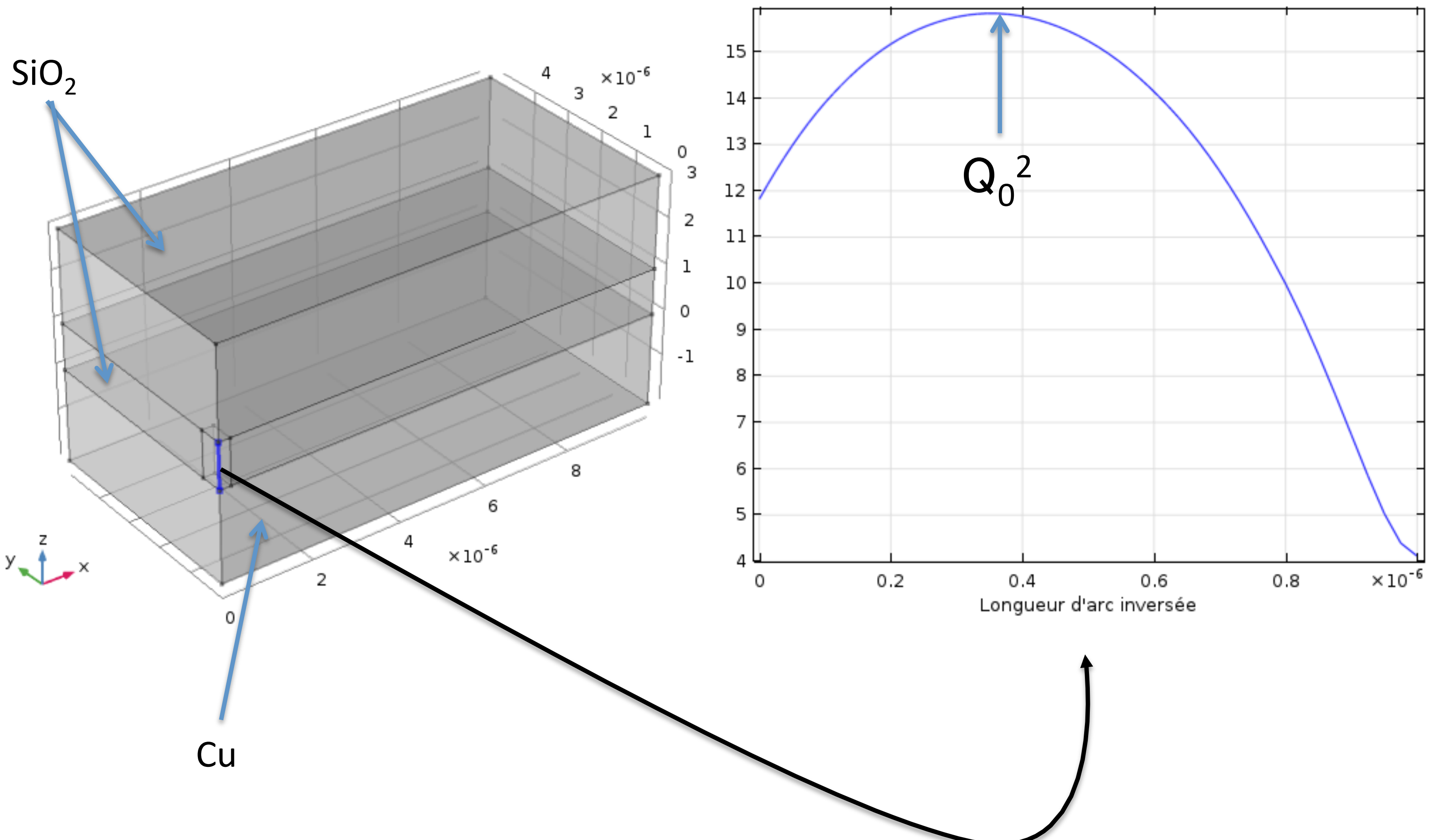
# Multicouches avec terme source localisé - EF



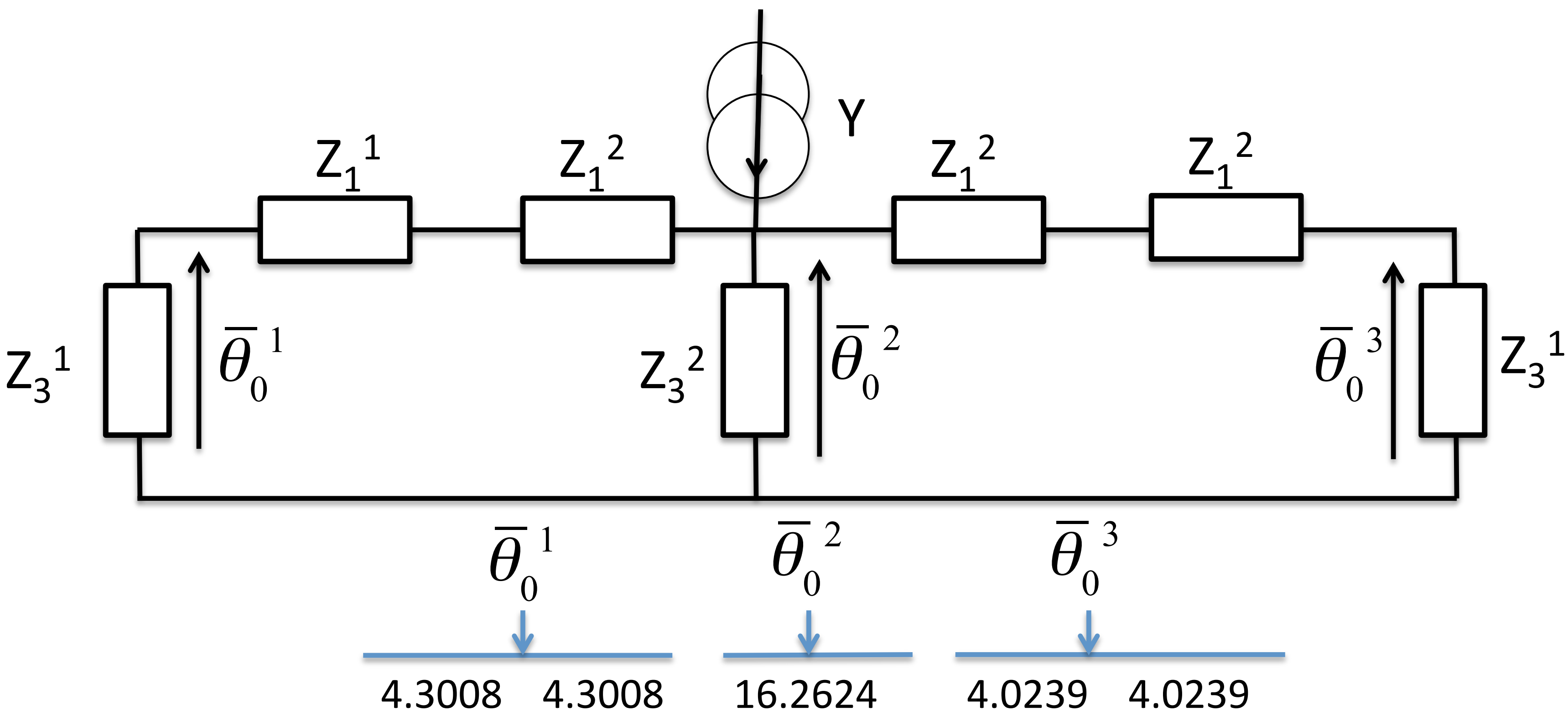
# Multicouches avec terme source localisé - QuadriS



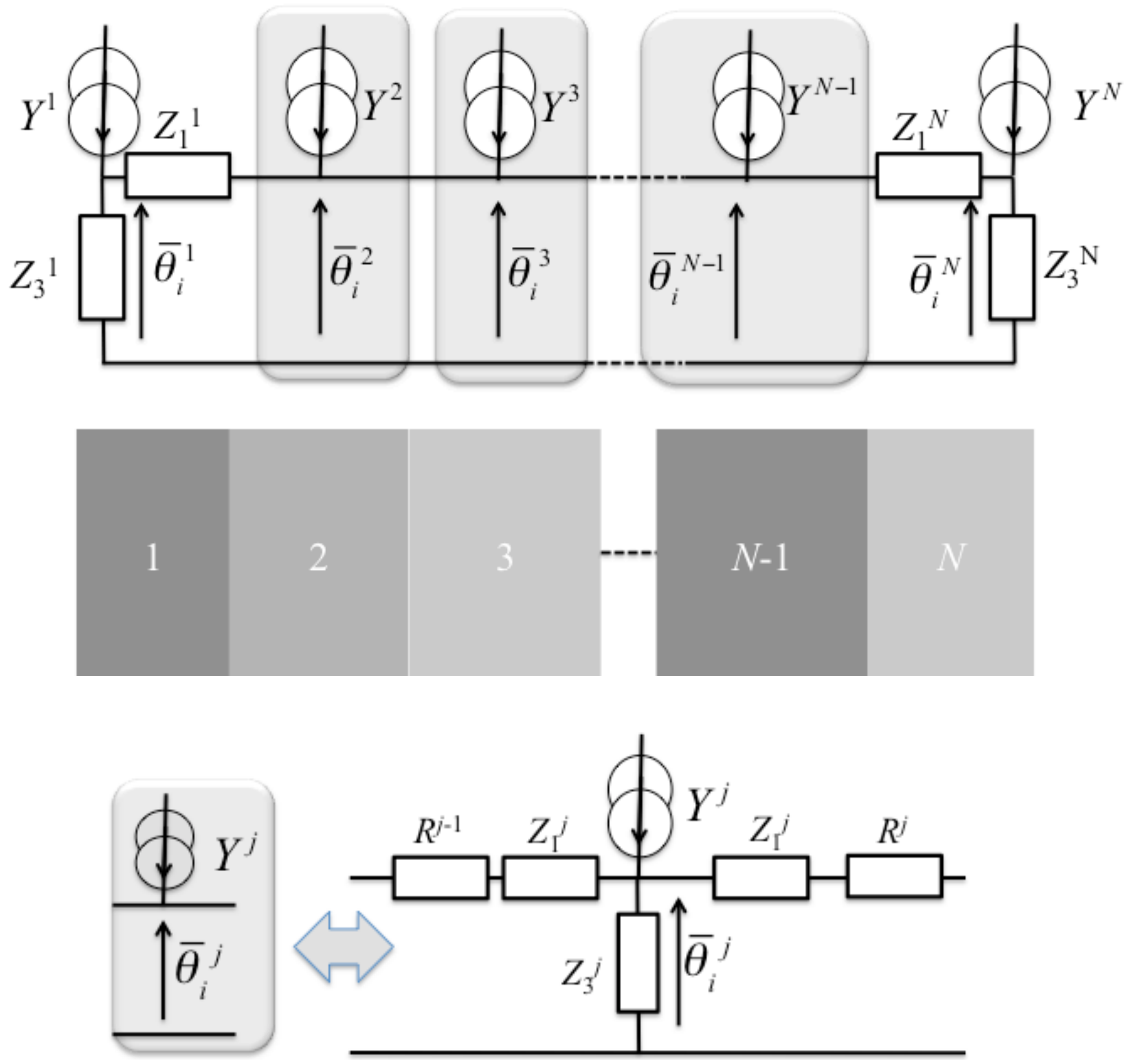
# Multicouches avec terme source localisé – matériaux ≠ - EF



# Multicouches avec terme source localisé – matériaux ≠ - QuadS



# Multicouches avec terme source localisé − matériaux ≠ - QuadS décomposition de la source



# Multicouches avec terme source localisé − matériaux ≠ - QuadriS décomposition de la source

$$\boxed{\mathbf{M}\,\overline{\Theta} = \overline{\mathbf{Y}}}$$

$${}^{t}\overline{\Theta} = \begin{bmatrix} \overline{\theta}_0 & \overline{\theta}_i^{\,1} & . & . & \overline{\theta}_i^{\,j} & . & . & . & \overline{\theta}_i^{\,N} & \overline{\theta}_e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1^1} & -\frac{1}{Z_1^1} & & & & & & \\ -\frac{1}{Z_1^{1-}} & \frac{1}{Z_3^1}+\frac{1}{Z_1^{1-}}+\frac{1}{Z^{1+}} & -\frac{1}{Z^{1+}} & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -\frac{1}{Z_1^{i-}} & \frac{1}{Z_3^i}+\frac{1}{Z_1^{i-}}+\frac{1}{Z^{i+}} & -\frac{1}{Z^{i+}} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\frac{1}{Z_1^{N-}} & \frac{1}{Z_3^N}+\frac{1}{Z_1^{N-}}+\frac{1}{Z^{N+}} & -\frac{1}{Z^{N+}} \\ & & & & & -\frac{1}{Z_1^N} & \frac{1}{Z_1^N} \end{bmatrix}$$

$${}^{t}\overline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \overline{g}^1 & \overline{g}^2 & \cdots & \overline{g}^j & \cdots & \overline{g}^{N-1} & \overline{g}^N \end{bmatrix}$$

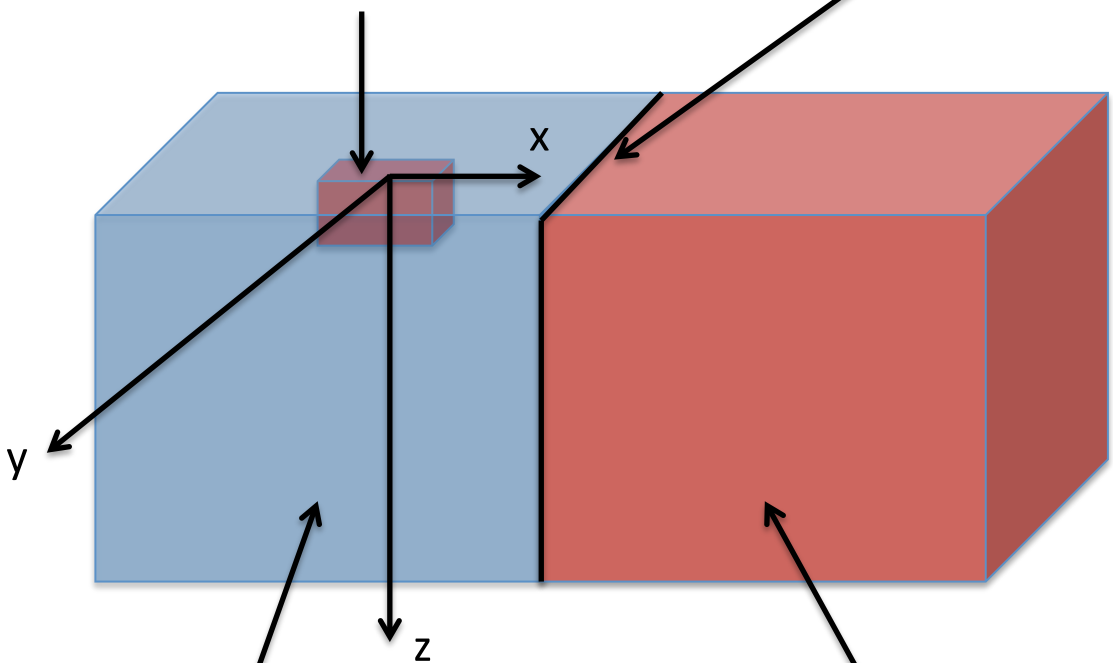
# Applications

- Thermo-réflectométrie
- Radiométrie IR  avec source mobile (flying spot)
- Microscopie thermique à balayage…

# Configuration expérimentale

Source de chaleur se déplaçant dans le plan et avec une pénétration optique dans le milieu

Résistance thermique à l'interface entre les deux milieux




Milieu 1 ($k_1$, $r_1$, $C_{p1}$)

Milieu 2 ($k_2$, $r_2$, $C_{p2}$)

# Résolution

- Ce problème peut être résolu par :
  - EF : beaucoup d'éléments sont nécessaires si la source est de dimensions très petites par rapport au dimensions des deux milieux
  - Analytique : méthode développée par Lepoutre et al. en 1995, nécessitant le calcul de 12 intégrales.

**Micron-scale thermal characterizations of interfaces parallel or perpendicular to the surface**

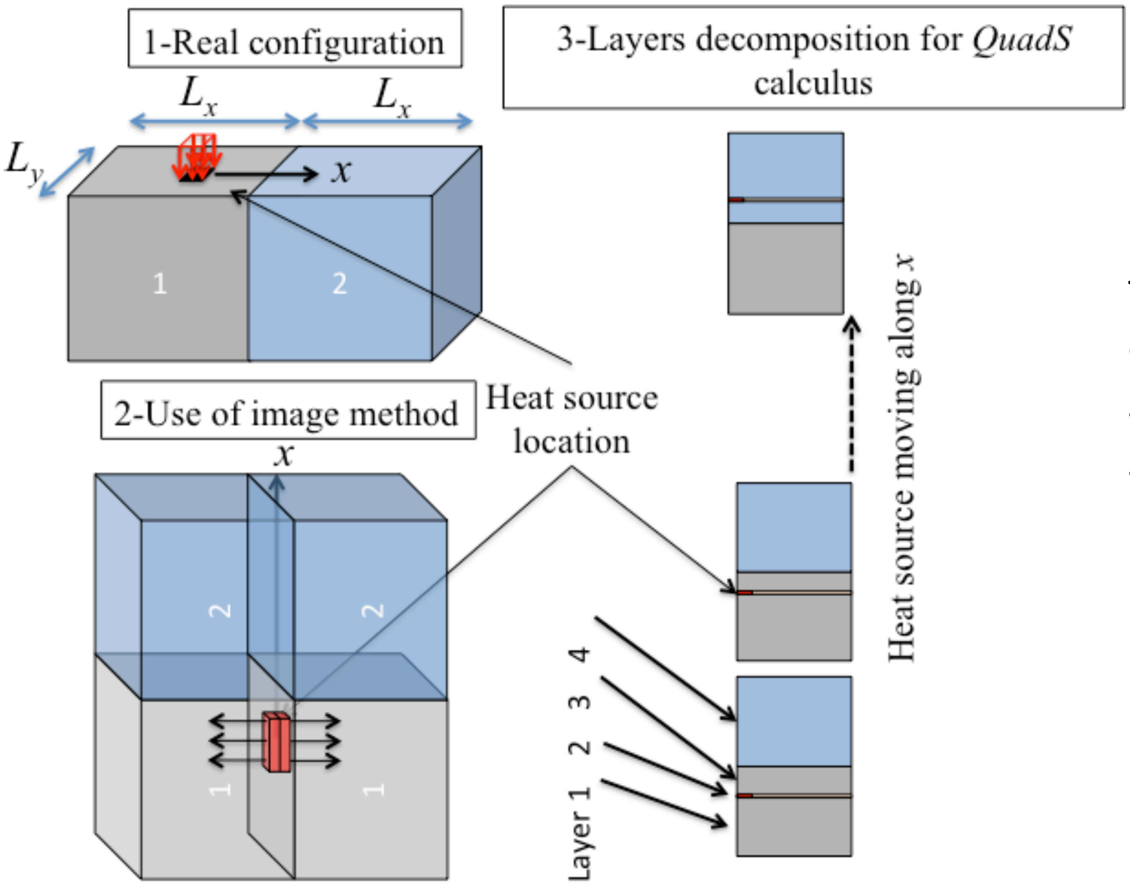
F. Lepoutre, D. Balageas, Ph. Forge, S. Hirschi, and J. L. Joulaud
*ONERA, L3C, BP72, F92322 Châtillon, France*

D. Rochais
*ONERA (L3C) and CEA, BP12, F91680 Bruyères le Chatel, France*

F. C. Chen[a)]
*ONERA, L3C, BP72, F92322 Châtillon, France*

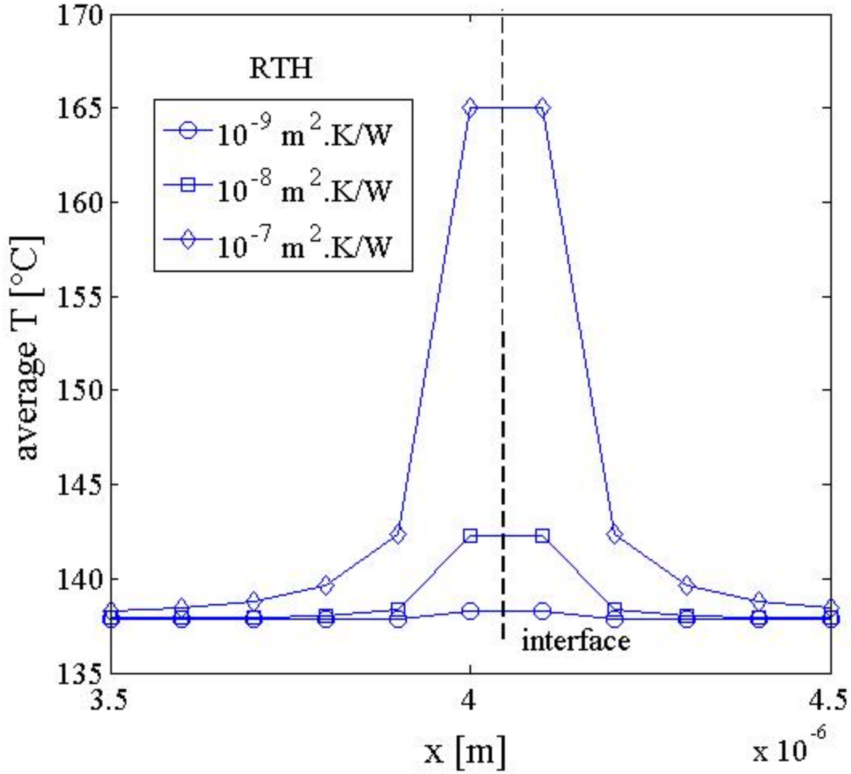
(Received 10 May 1994; accepted for publication 13 April 1995)

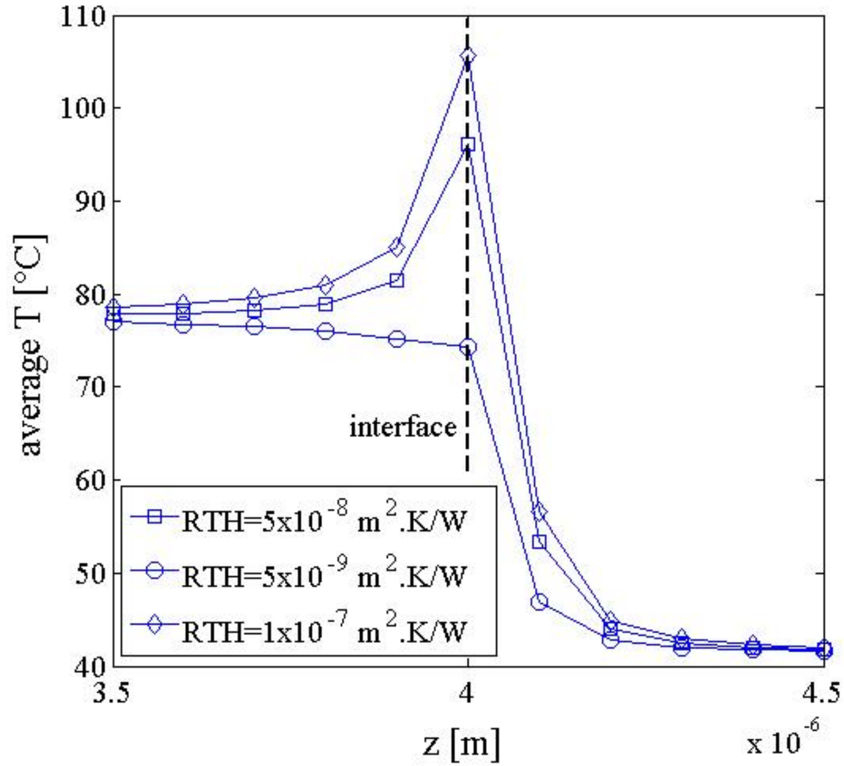
# Résolution par Qs




On forme dans un premier temps une image du domaine par rapport au plan supérieur (où se déplace la source)

On fait une rotation de 90°




| | Layer 1 | | | | Layer 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_x$ | $k_y$ | $k_z$ | $\rho\, C_p$ | $k_x$ | $k_y$ | $k_z$ | $\rho\, C_p$ |
| case 1 | 1. | 1. | 1. | 1900 x 720 | 1. | 1. | 1. | 1900 x 720 |
| case 2 | 1.3 | 5. | 5. | 1900 x 720 | 3.5 | 3.5 | 3.5 | 2200 x 750 |