



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**



Instabilité thermoconvective de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants:

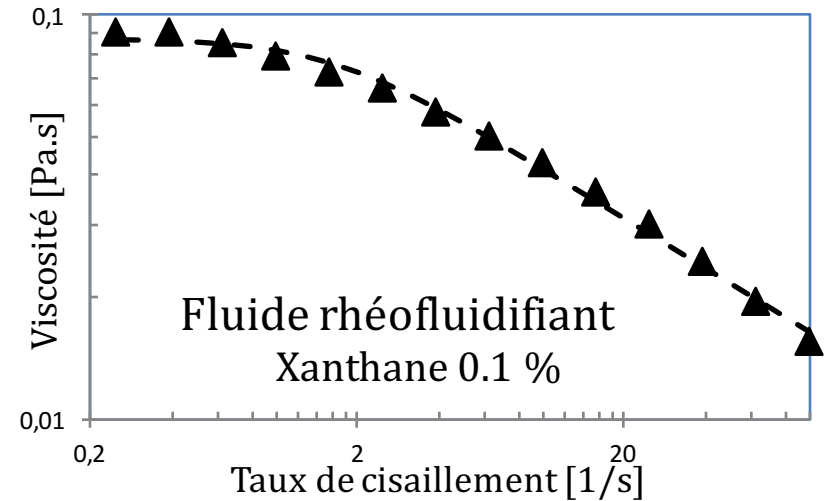
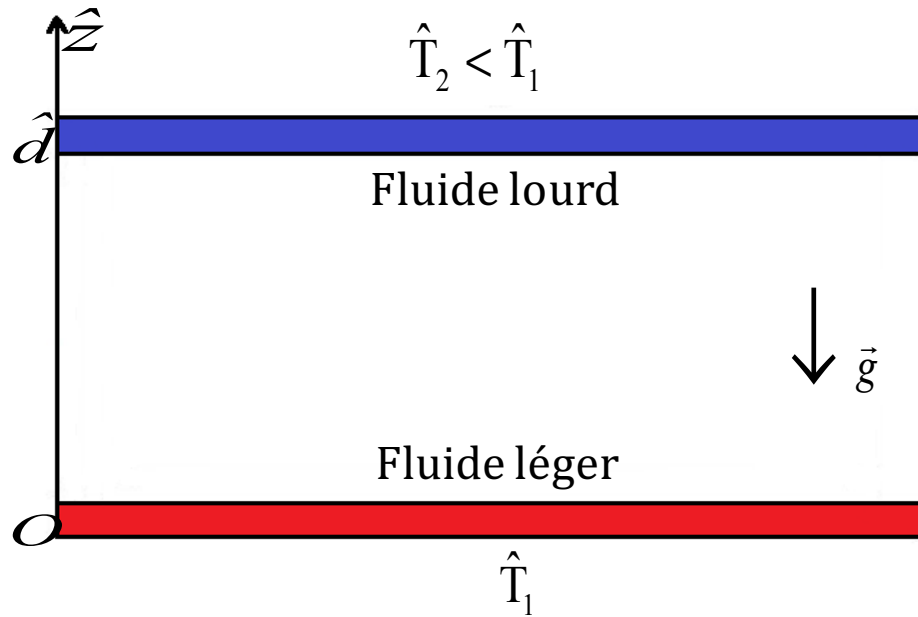
Influence de la non-linéarité du modèle rhéologique sur la nature de la bifurcation et la sélection des motifs

M. Bouteraa, C. Nouar, Kalck, C. Métivier , E. Plaut, M.Darbouli

LEMTA UMR 7563
CNRS-Université de Lorraine
2, avenue de la Forêt de Haye - B.P. 160 - 54504
VANDOEUVRE CEDEX - FRANCE

SFT 19-11-2015

DESCRIPTION DU PROBLEME



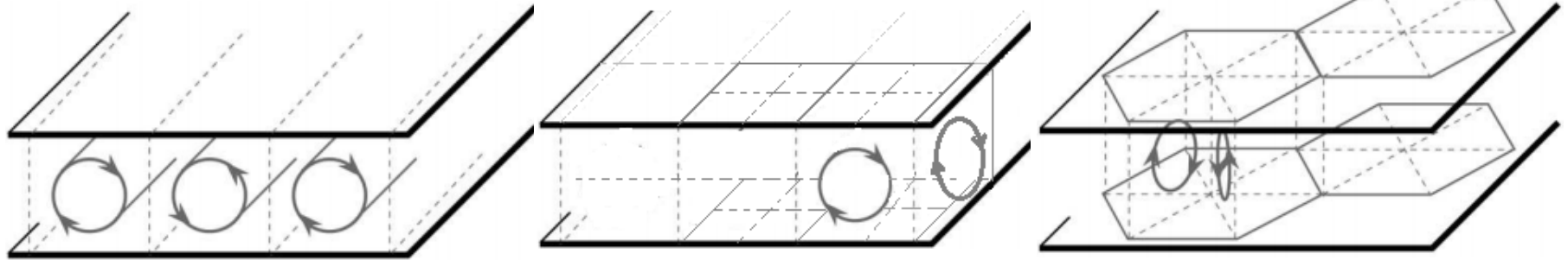
Fluide rhéofluidifiant: μ ↓ lorsque $\dot{\gamma}$ ↑

$\delta\hat{T} < \delta\hat{T}_c$ Solution est hydrostatique et le profil de température est linéaire

$\delta\hat{T} > \delta\hat{T}_c$ Forces de flottabilité plus importantes que la dissipation + diffusion

Démarrage de la convection et apparition de structures régulières

DESCRIPTION DU PROBLEME

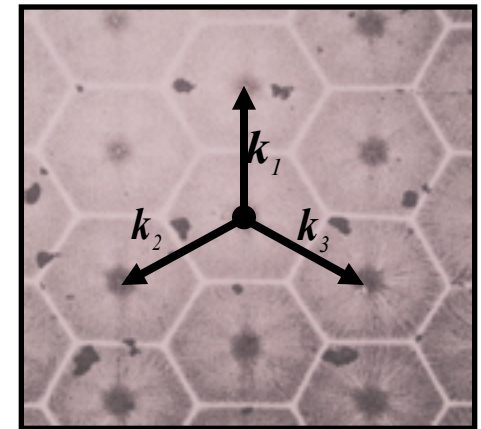
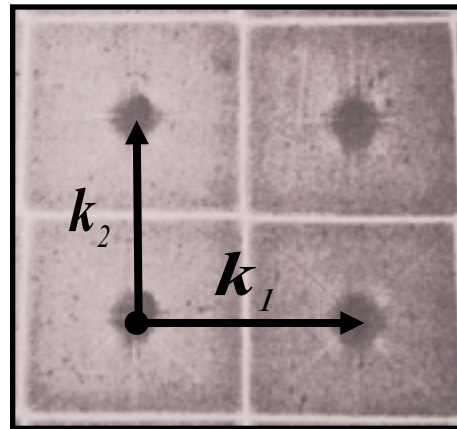
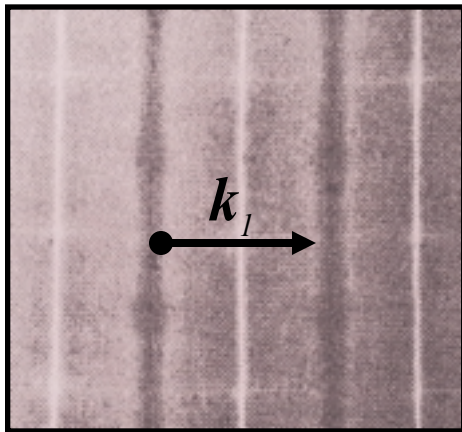


Paul Manneville

Rouleaux

Carrés

Hexagones



White (JFM, 1988)

Les effets de la rhéofluidification : diminution de la viscosité, augmentation de l'intensité de convection, non-linéarité supplémentaire.

Influence de la rhéofluidification sur la nature de la bifurcation et la sélection des motifs ?

BREVE REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1. Le caractère rhéofluidifiant rend la bifurcation sous-critique

Lamsaadi *et al.* (HMT 2005) , Balmforth and Rust (JNNFM 2009),
Albaalbaki and Khayat (JFM 2011), Alloui *et al.* (JNNFM 2013).

Un accord qualitatif **MAIS** un désaccord de point de vue quantitatif

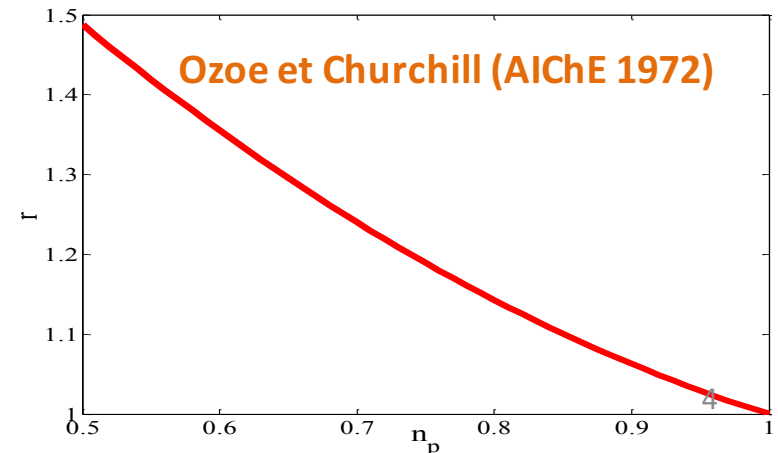
Balmforth et Rust, bifurcation sous-critique si $\left. \frac{d\mu}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=0} > \frac{6}{601\pi^4} = \underline{1.025 \times 10^{-4}}$

Albaalbaki et Khayat, bifurcation sous-critique si $\left. \frac{d\mu}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=0} > \underline{7.0 \times 10^{-4}}$

2. Le transfert convectif augmente avec la rhéofluidification

Pierre et al.(CJCE 1963), Tien et al.(IJHMT 1969), Liang et Acrivos(RA 1970), Ozoe et Churchill(AIChE 1972)¹, Tsuei et Tien(CJCE 1973)...

$$r = \frac{Nu}{Nu_N} = 0.87n_p^2 - 2.28n_p + 2.41 \quad (1)$$



3. Influence de la rhéofluidification sur la sélection des motifs

Albaalbaki and Khayat (JFM 2011), en situation de glissement parfait :

Pour des fluides faiblement rhéofluidifiants, **les rouleaux** sont le mode préféré de convection.

Pour des fluides fortement rhéofluidifiants, **les carrés et les hexagones** sont les modes préférés de convection pour un $Pr \gg 1$.

Ce résultat est surprenant car les hexagones sont observés lorsque la symétrie de réflexion par rapport au plan médian est brisée (conditions aux limites différentes, fluide fortement thermo-dépendant) (**M. Golubitsky, Physica D. 1987**).

« Non-Newtonian effects are symmetry breaking. The quartic terms in amplitude equations, play an important role »

La symétrie par rapport au plan médian, ne peut pas être brisée par le caractère non-Newtonien.

OBJECTIFS

- 1.** Déterminer le degré de rhéofluidification à partir duquel la bifurcation devient sous critique
- 2.** Analyser la compétition entre les différents motifs de convection au voisinage des conditions critiques

Prise en compte des conditions aux limites (glissement avec frottement, conductivité finie des parois) et de la thermodépendance de la viscosité

- 3.** Examiner la pertinence du principe de transfert de chaleur maximal dans le cas non-Newtonien

METHODOLOGIE

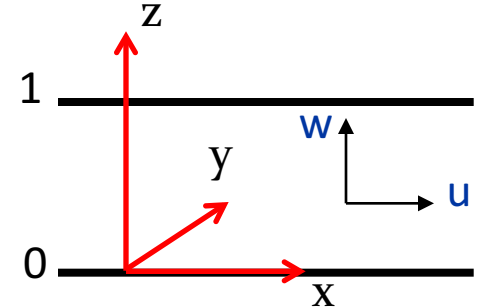
Analyse faiblement non linéaire basée sur un développement asymptotique en amplitude

Equations gouvernant le problème

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla \Pi + Ra \theta \vec{e}_z + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \mathbf{u} \cdot \vec{e}_z + \Delta \theta \quad ; \quad \theta = \frac{\hat{T} - \hat{T}_{cond}}{\hat{T}_1 - \hat{T}_2}$$



$$Ra = \frac{\hat{\rho}_0 \hat{g} \hat{\beta} \Delta \hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\mu}_0 \hat{k}} \quad ; \quad Pr = \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{k}}$$

Comportement rhéologique:

Fluide rhéofluidifiant purement visqueux

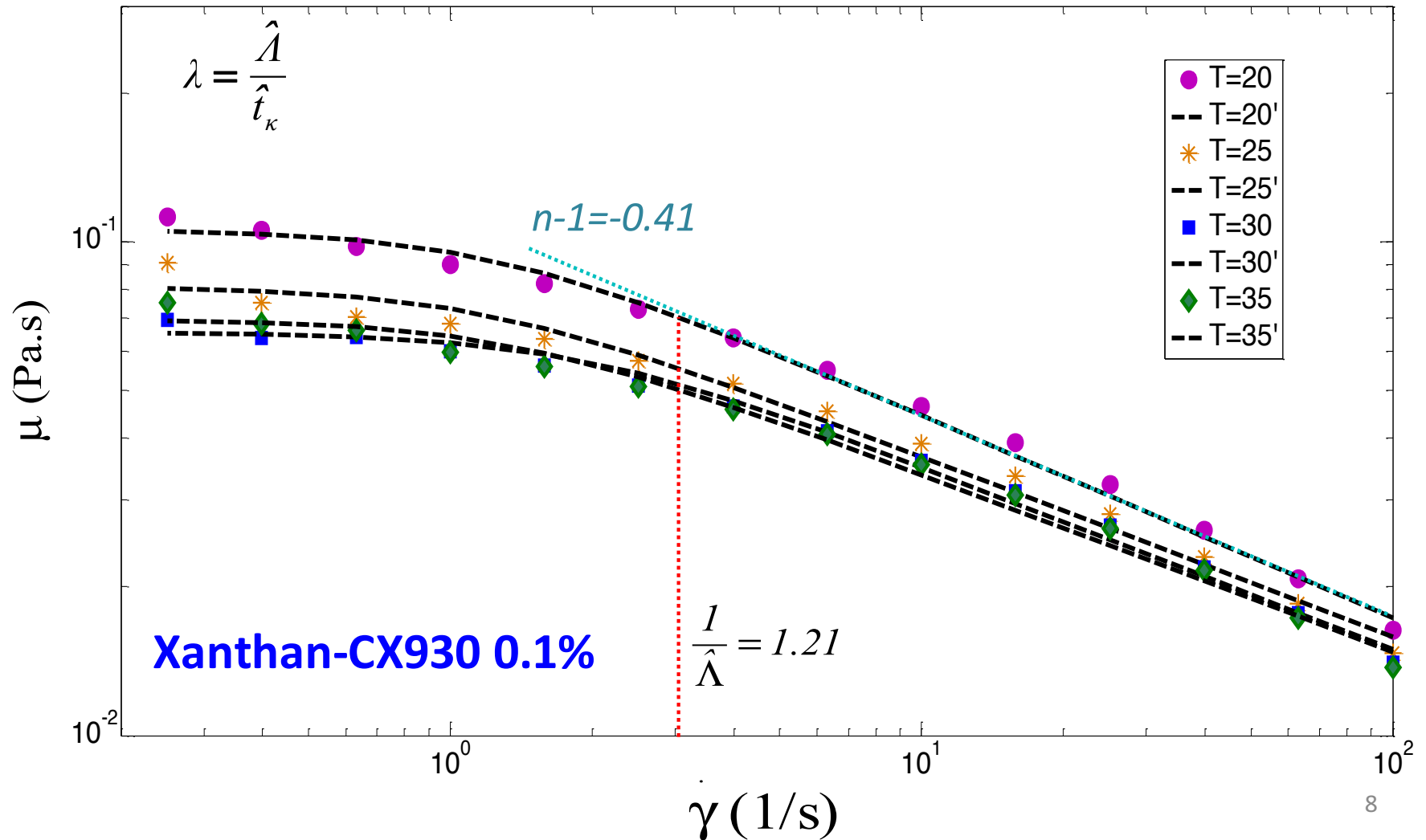
$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\Gamma) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad ; \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \quad ; \quad \Gamma = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}$$

Modèle de Carreau

$$\mu = \mu_b(z) \exp(-\xi \theta) \left(1 + \lambda^2 \Gamma \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad , \quad r = \exp(\xi)$$

$$\mu_b(z) = \exp\left(\xi \left(z - \frac{1}{2}\right)\right) \quad ; \quad \xi = \hat{k} \Delta \hat{T} \quad ; \quad \lambda = \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{t}_\kappa} \quad ; \quad \hat{t}_\kappa = \frac{d^2}{\kappa}$$

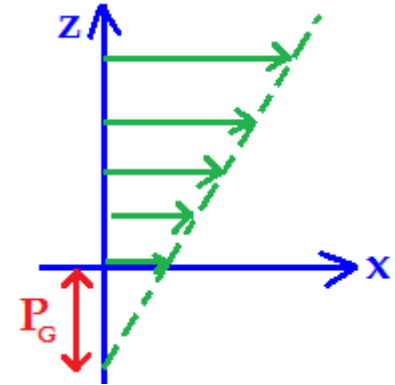
Variation de la viscosité en fonction du cisaillement pour différentes températures



Conditions aux limites

La vitesse

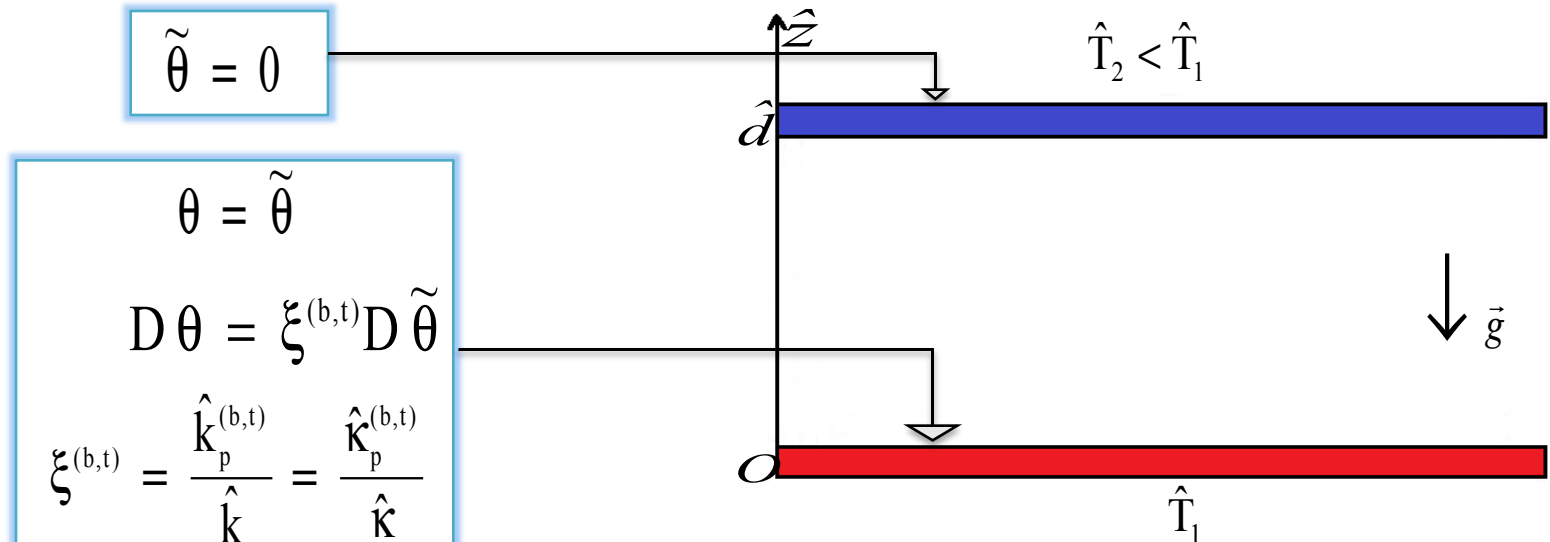
$$u \cdot e_z = 0 \quad ; \quad e_x \cdot u = P_G e_x \cdot \tau \cdot e_z \quad ; \quad e_y \cdot u = P_G e_y \cdot \tau \cdot e_z \quad \text{à } z=0 \text{ et } z=l$$



Conditions de Navier non linéaires avec P_G est le paramètre de glissement.

La température

Continuité du flux et de la température aux interfaces fluide-paroi.



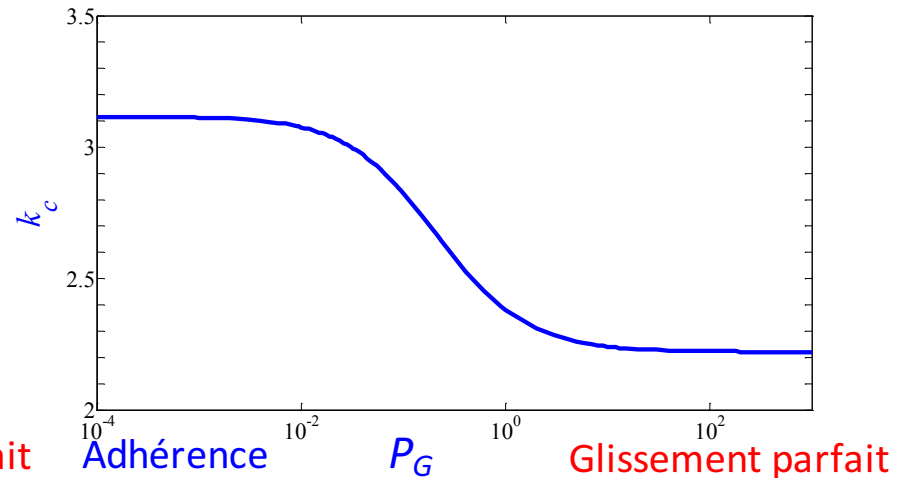
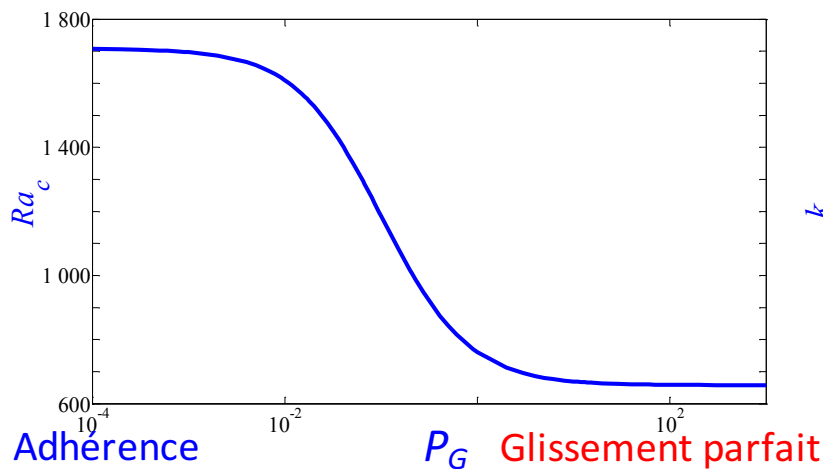
Analyse linéaire

Perturbations infinitésimales, termes non linéaires négligés

Solution sous forme de modes normaux \rightarrow problème aux valeurs propres

Méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebychev

Influence du glissement



- Condition d'adhérence: $P_G \rightarrow 0$

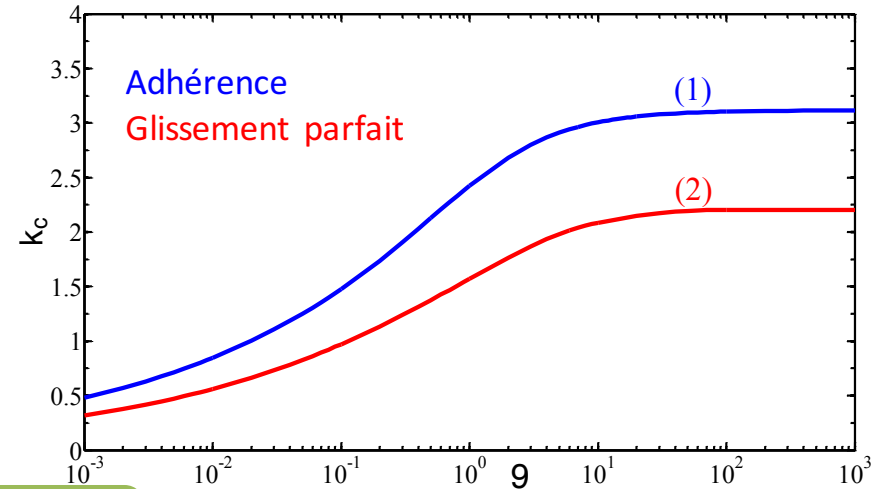
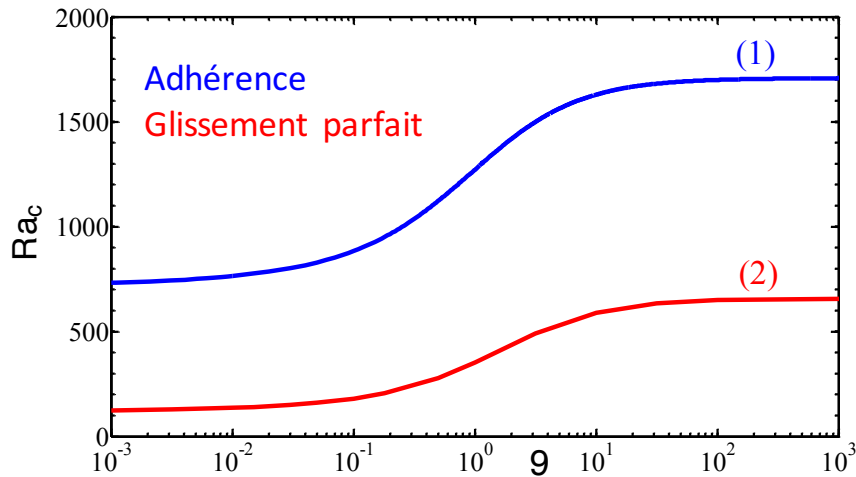
$$Ra_c = 1707.76; k_c = 3.117$$

- Condition de glissement parfait: $P_G \rightarrow \infty$

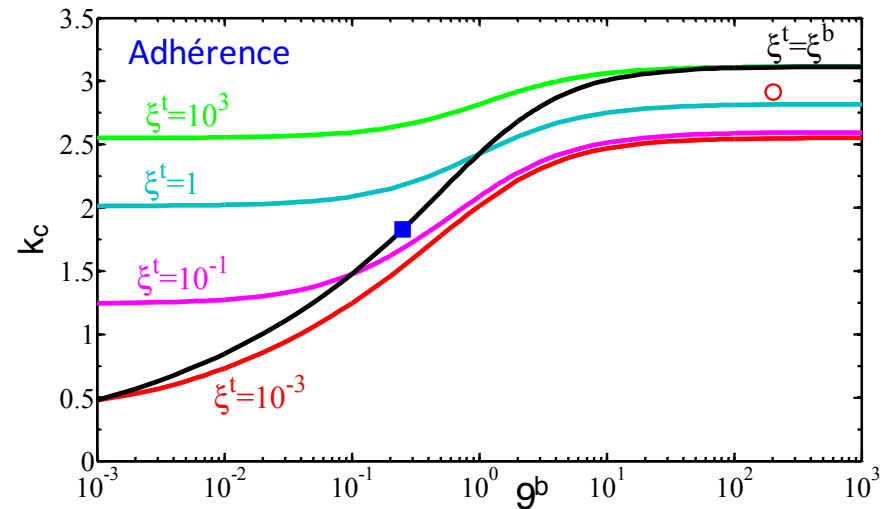
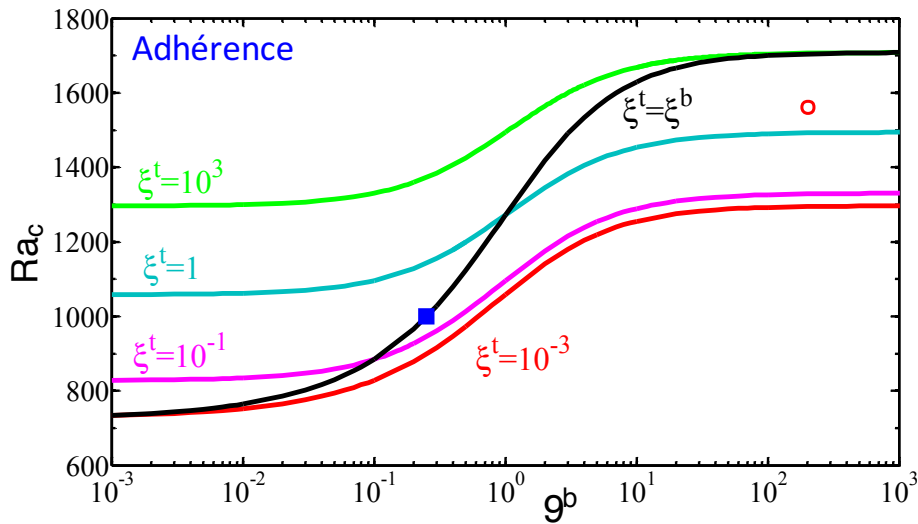
$$Ra_c = \frac{27}{4} \pi^4; k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Influence de la conductivité thermique de la paroi

$$\xi^t = \xi^b = \xi$$

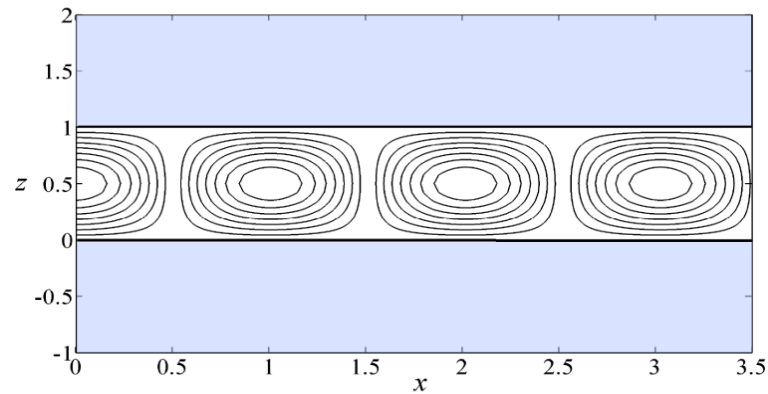


$$\xi^t = \xi^b = \xi$$

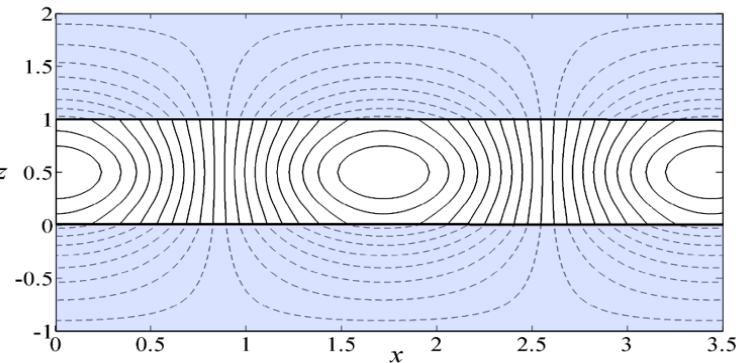


Comportement des isothermes suivant la conductivité thermique des parois

$$\zeta^b = \zeta^t = 100$$

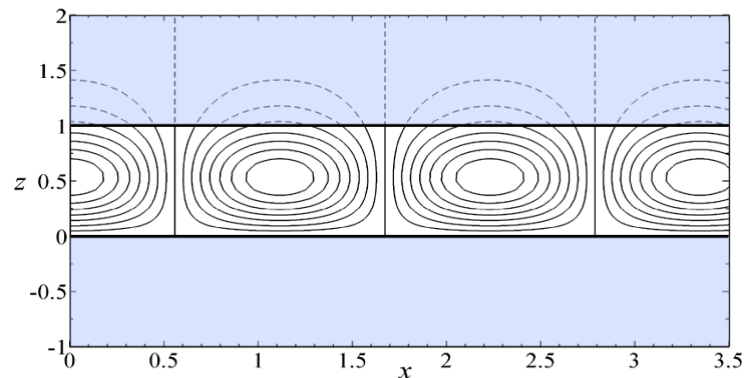


$$\zeta^t = \zeta^b = 0.25$$

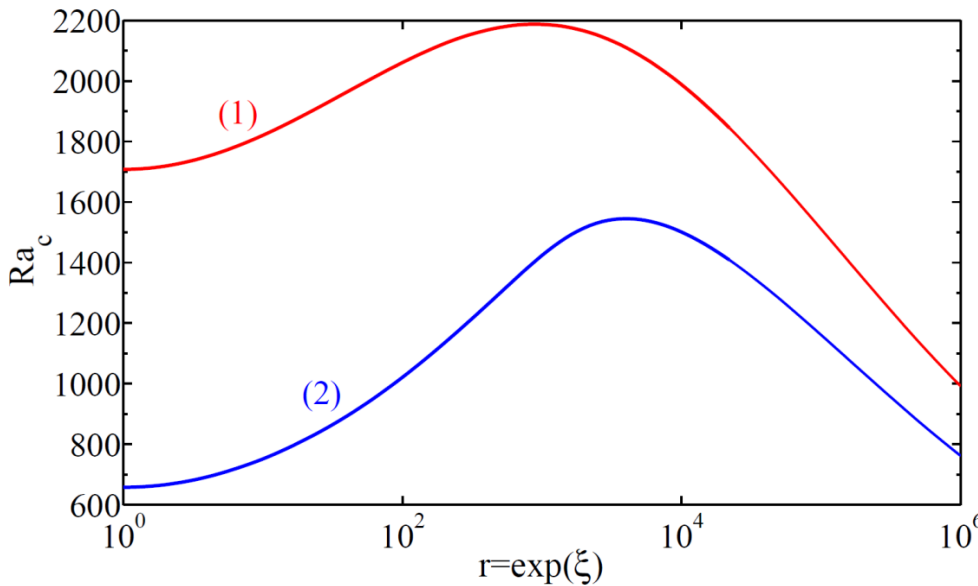


$$\zeta^t = 2$$

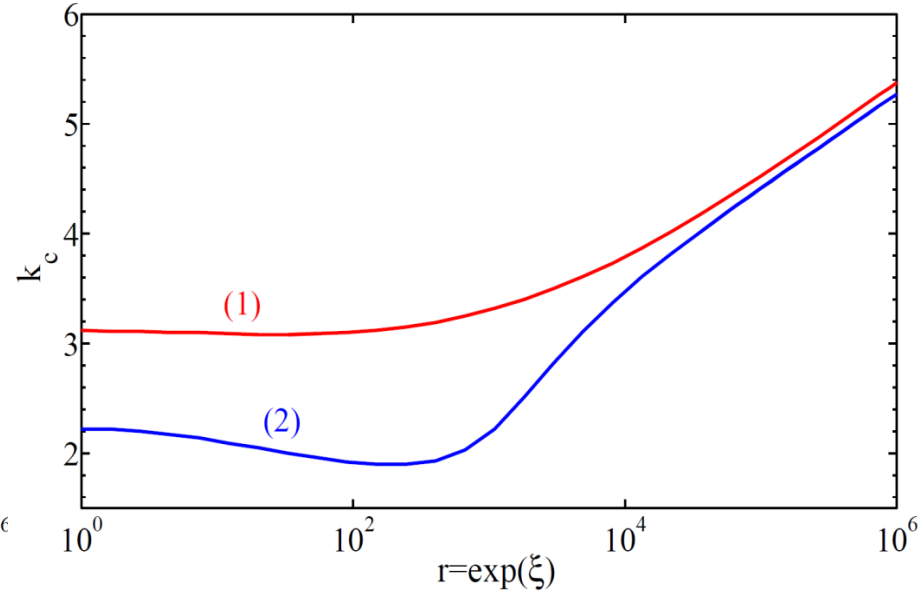
$$\zeta^b = 201.6$$



Influence de la thermodépendance de la viscosité



$$r = \frac{\mu_b(z=1)}{\mu_b(z=0)} = \exp(\xi)$$

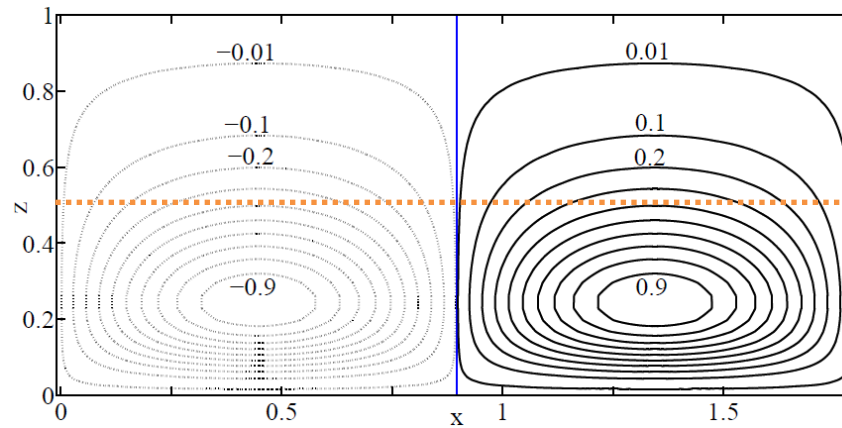
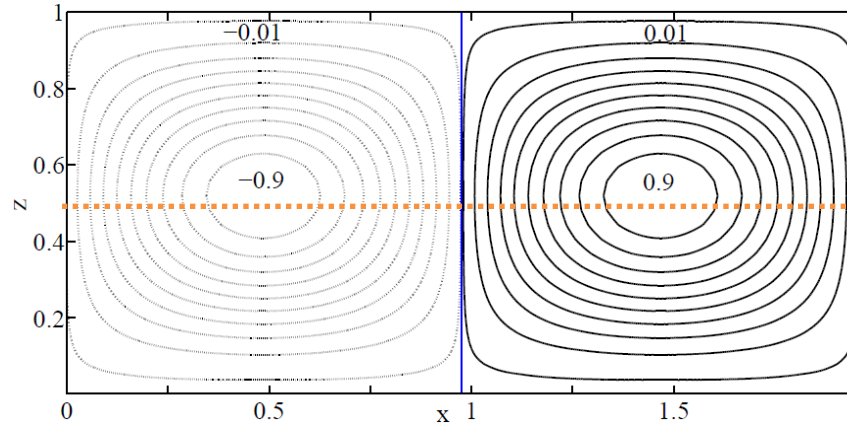


$$r = \frac{\mu_b(z=1)}{\mu_b(z=0)} = \exp(\xi)$$

Nombre de Rayleigh critique (Ra_c) et nombre d'onde critique (k_c) en fonction de r en situation d'adhérence (1) et en situation de glissement parfait(2).

(en accord avec *K.Strengel et al (JFM 1982)*)

Contours de la composante verticale de la vitesse



Analyse faiblement non linéaire

Les équations et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} M(\psi) = L(\psi) + N_I(\psi, \psi) + N_v(\psi, \psi, \psi, \dots) \quad \psi = (\zeta, w, \theta)$$

termes linéaires

termes d'inertie non linéaires

termes visqueux non linéaires

Au voisinage des conditions critiques:

$$w(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^N [A_p(t) \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{x}) F_{1l}(z) + cc] + t.o.s$$

$$\theta(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^N [A_p(t) \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{x}) G_{1l}(z) + cc] + t.o.s$$

$$\text{Equation d'amplitude : } \frac{dA}{dt} = \mathbf{g}(A(t))$$

Analyse faiblement non linéaire

$$\frac{dA_1}{dt} = \sigma A_1 - (\beta_1 |A_1|^2 + \gamma_1 (|A_2|^2 + |A_3|^2)) A_1 - (\beta_2 |A_1|^4 + \gamma_2 (|A_2|^4 + |A_3|^4)) A_1 - \xi_1 |A_2|^2 |A_3|^2 |A_1| - \xi_2 A_2^{*2} A_3^{*2} A_1^*$$

Structures	Amplitudes	Coefficient de Landau
Hexagones	$A_1=A_2=A_3=A$	$g_1=\beta_1+2\gamma_1$
Carrés	$A_1=A_2=A$ et $A_3=0$	$g_1=\beta_1+\gamma_1$
Rouleaux	$A_1=A$ et $A_2=A_3=0$	$g_1=\beta_1$

$$g_1 = g_{1\text{New}} - \alpha g_{1\text{nonNew}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left| \frac{d\mu}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=0} = \frac{1 - n_c}{2} \lambda^2$$

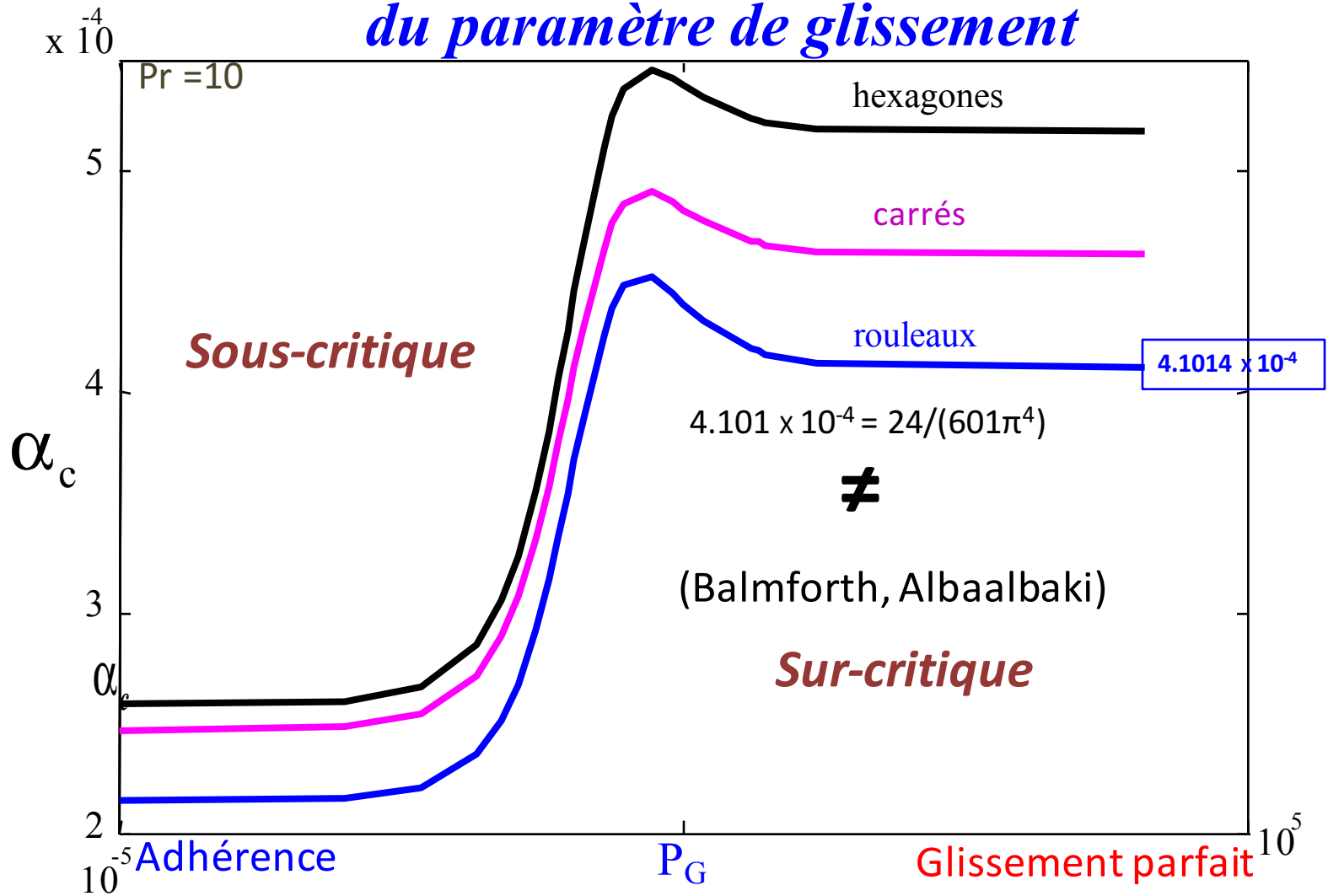
$$g_1 = 0 \quad ; \quad \alpha = \alpha_c$$

La nature de la bifurcation

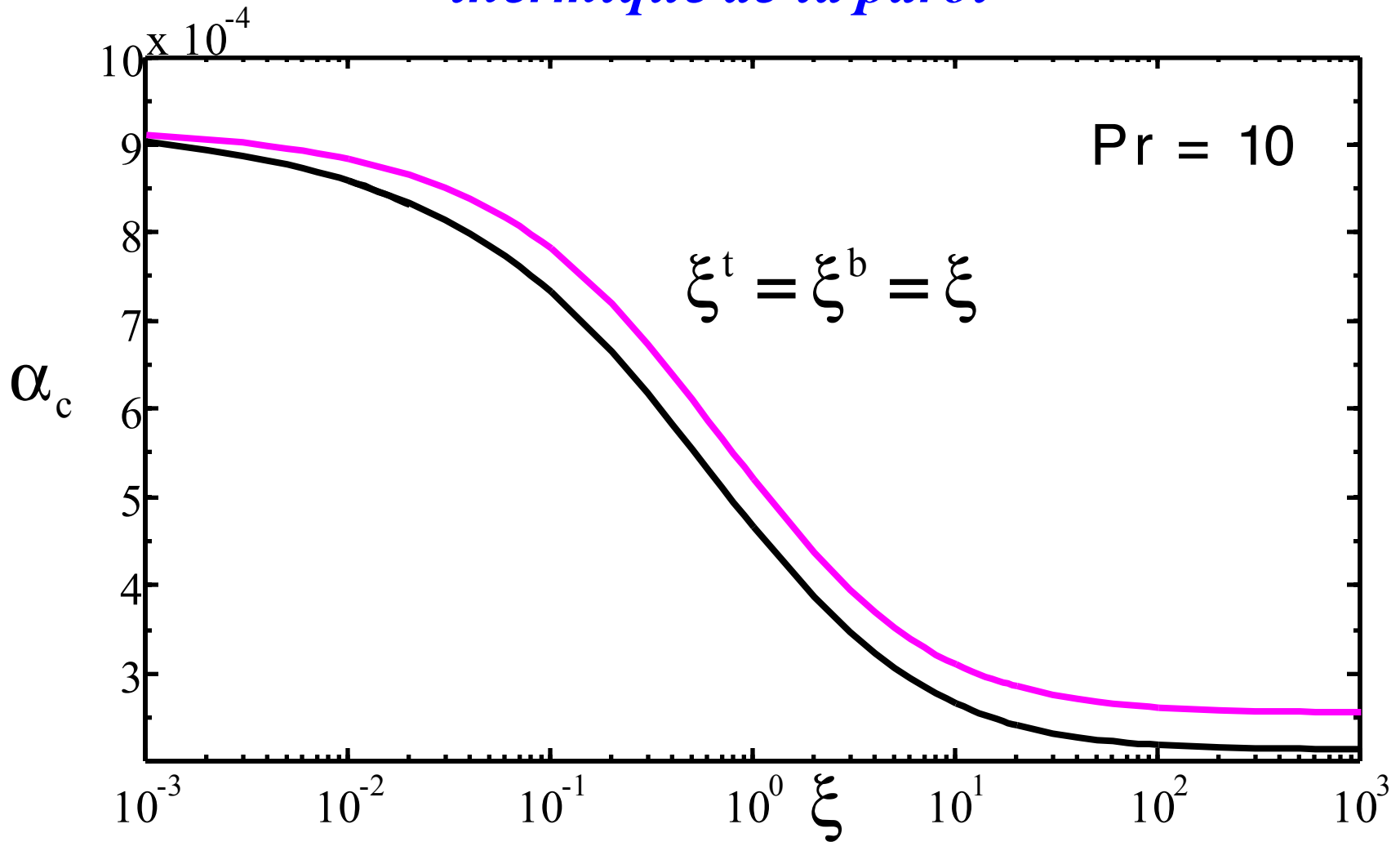
$\alpha < \alpha_c ; g_1 > 0$ Bifurcation surcritique

$\alpha > \alpha_c ; g_1 < 0$ Bifurcation sous-critique

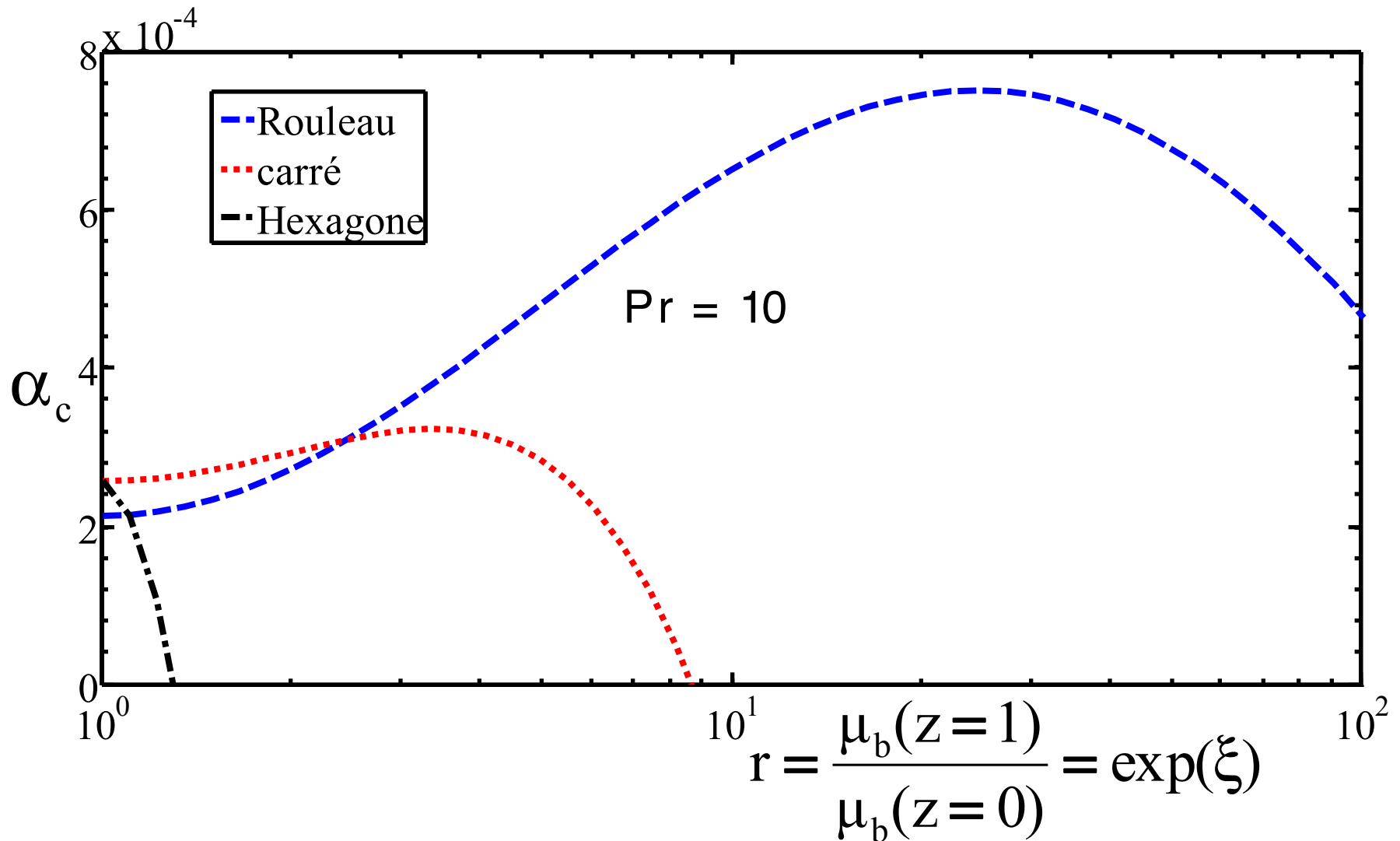
Variation de la valeur critique du degré de rhéofluidification en fonction du paramètre de glissement



*Variation de la valeur critique du degré de
rhéofluidification en fonction de la conductivité
thermique de la paroi*



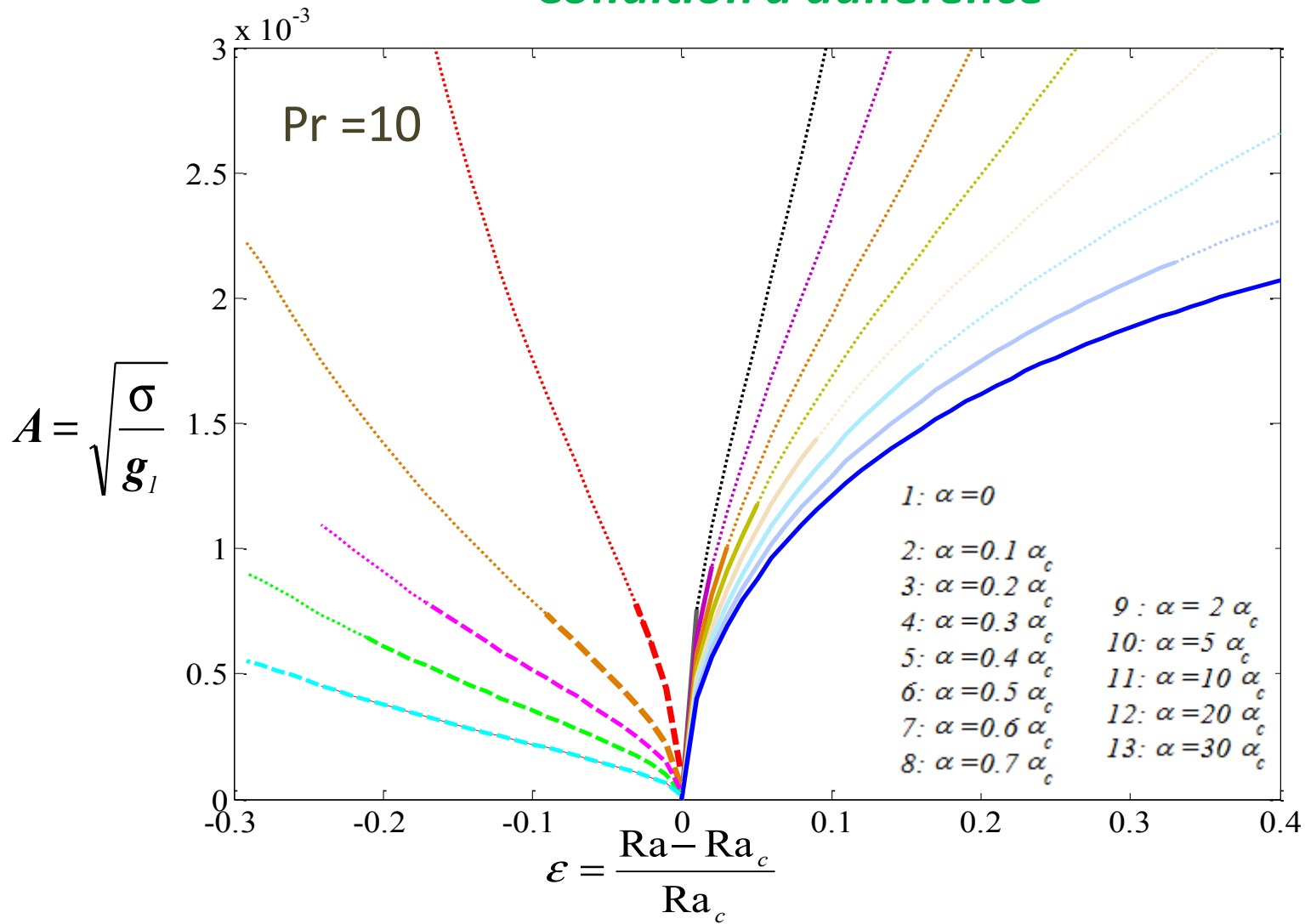
Variation de la valeur critique du degré de rhéofluidification en fonction du rapport de viscosité



Solution stationnaire de l'équation d'amplitude: diagramme de bifurcation

Rouleaux

Condition d'adhérence



Analyse linéaire de stabilité des points fixes de l'équation d'amplitude

Compétition rouleaux carrés

$$\frac{\delta A_1}{\delta \tau} = \sigma A_1 - (\beta_1 |A_1|^2 + \gamma_1 |A_2|^2) A_1 \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{\tau_0}$$

$$\frac{\delta A_2}{\delta \tau} = \sigma A_2 - (\beta_1 |A_2|^2 + \gamma_1 |A_1|^2) A_2$$

Solutions stationnaires:

Solution triviale: $A_{1s} = A_{2s} = A_s = 0$

Solution rouleaux: $A_{1s} = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta_1}}, A_{2s} = 0$

Solution carrés: $A_{1s} = A_{2s} = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta_1 + \gamma_1}}$

Rouleaux

$$\frac{\gamma_1 - \beta_1}{\gamma_1 + \beta_1} > 0$$

Carrés

$$\frac{\gamma_1 - \beta_1}{\gamma_1 + \beta_1} < 0$$

Analyse linéaire de stabilité des Points fixes de l'équation d'amplitude

Compétition rouleaux hexagones

$$\frac{d A_1}{d t} = \sigma A_1 - (\beta_1 |A_1|^2 + \gamma_1 (|A_2|^2 + |A_3|^2)) A_1 \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{\tau_0}$$

$$\frac{d A_2}{d t} = \sigma A_2 - (\beta_1 |A_2|^2 + \gamma_1 (|A_3|^2 + |A_1|^2)) A_2$$

$$\frac{d A_3}{d t} = \sigma A_3 - (\beta_1 |A_3|^2 + \gamma_1 (|A_1|^2 + |A_2|^2)) A_3$$

Solutions stationnaires:

Solution triviale: $A_{1s} = A_{2s} = A_{3s} = 0$

Solution rouleaux: $A_{1s} = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta_1}}$, $A_{2s} = A_{3s} = 0$

Solution hexagones: $A_{1s} = A_{2s} = A_{3s} = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta_1 + 2\gamma_1}}$

Rouleaux

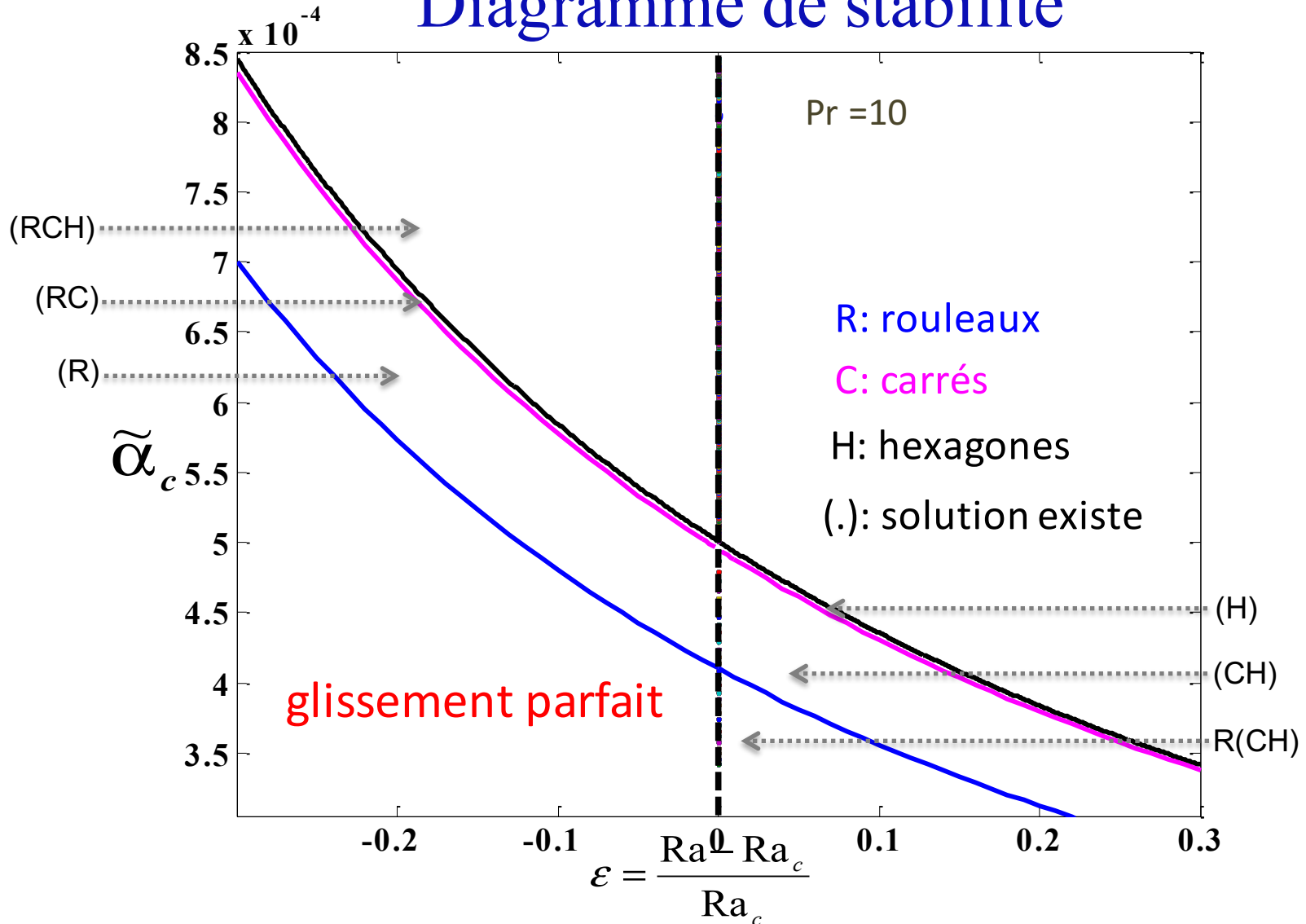
$$\frac{\gamma_1 - \beta_1}{2\gamma_1 + \beta_1} > 0$$

Hexagones

$$\frac{\gamma_1 - \beta_1}{2\gamma_1 + \beta_1} < 0$$

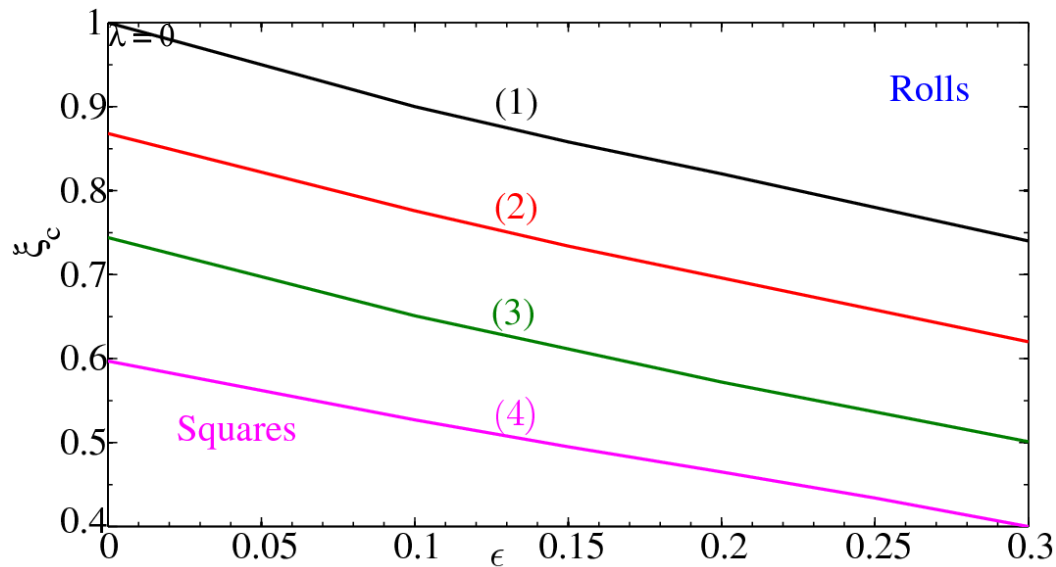
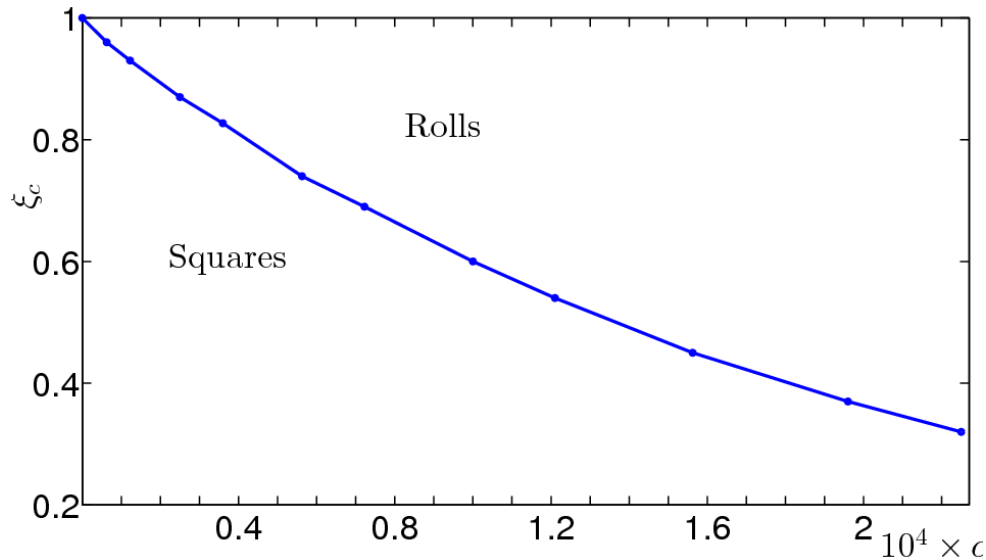
Analyse linéaire de stabilité des points fixes de l'équation d'amplitude

Diagramme de stabilité



Compétition rouleaux – carrés:

Cas d'une paroi de conductivité thermique finie

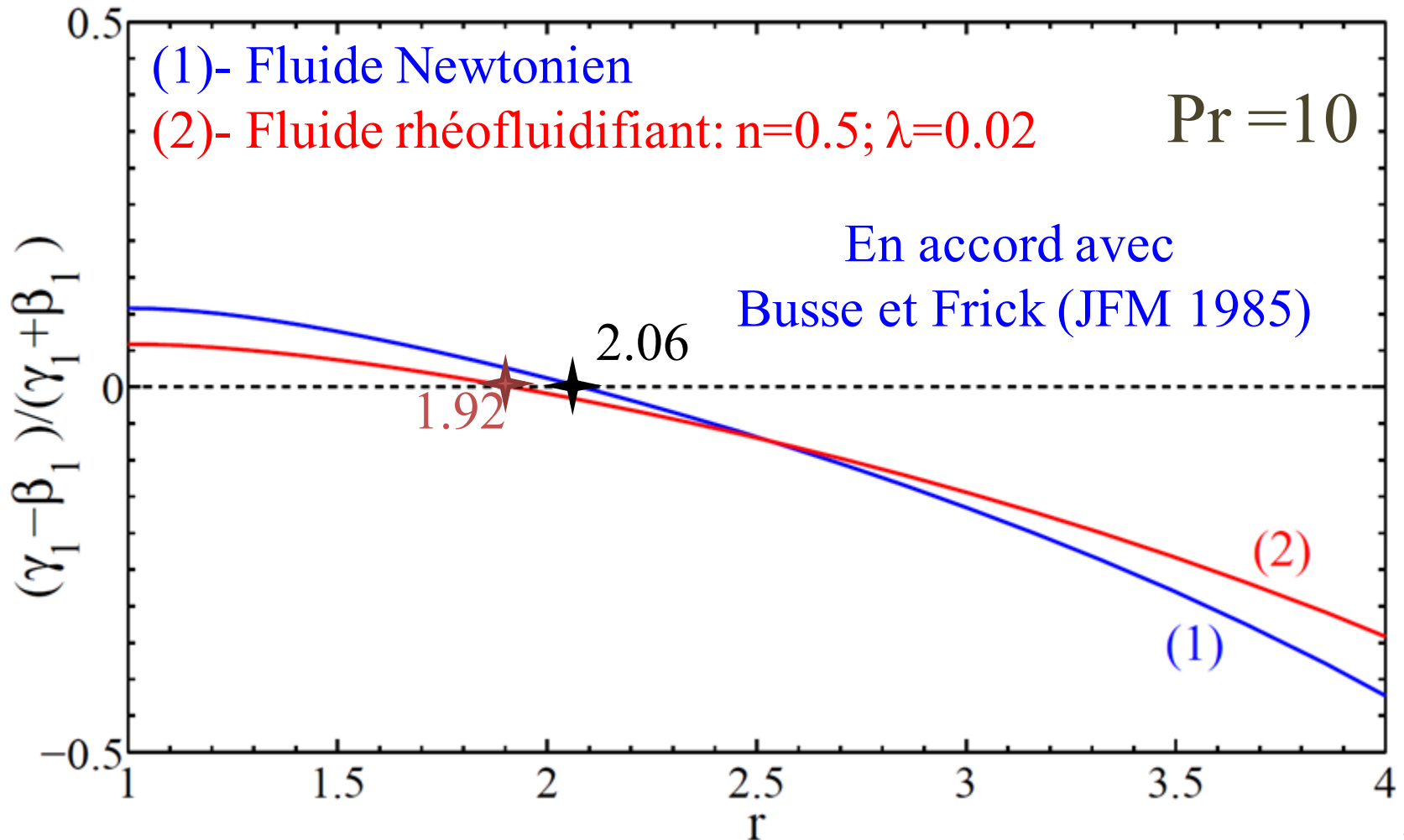


- (1) $\lambda = 0$
- (2) $\lambda = 0.01$
- (3) $\lambda = 0.015$
- (4) $\lambda = 0.02$

Stabilité de la solution stationnaire

Compétition rouleaux carrés

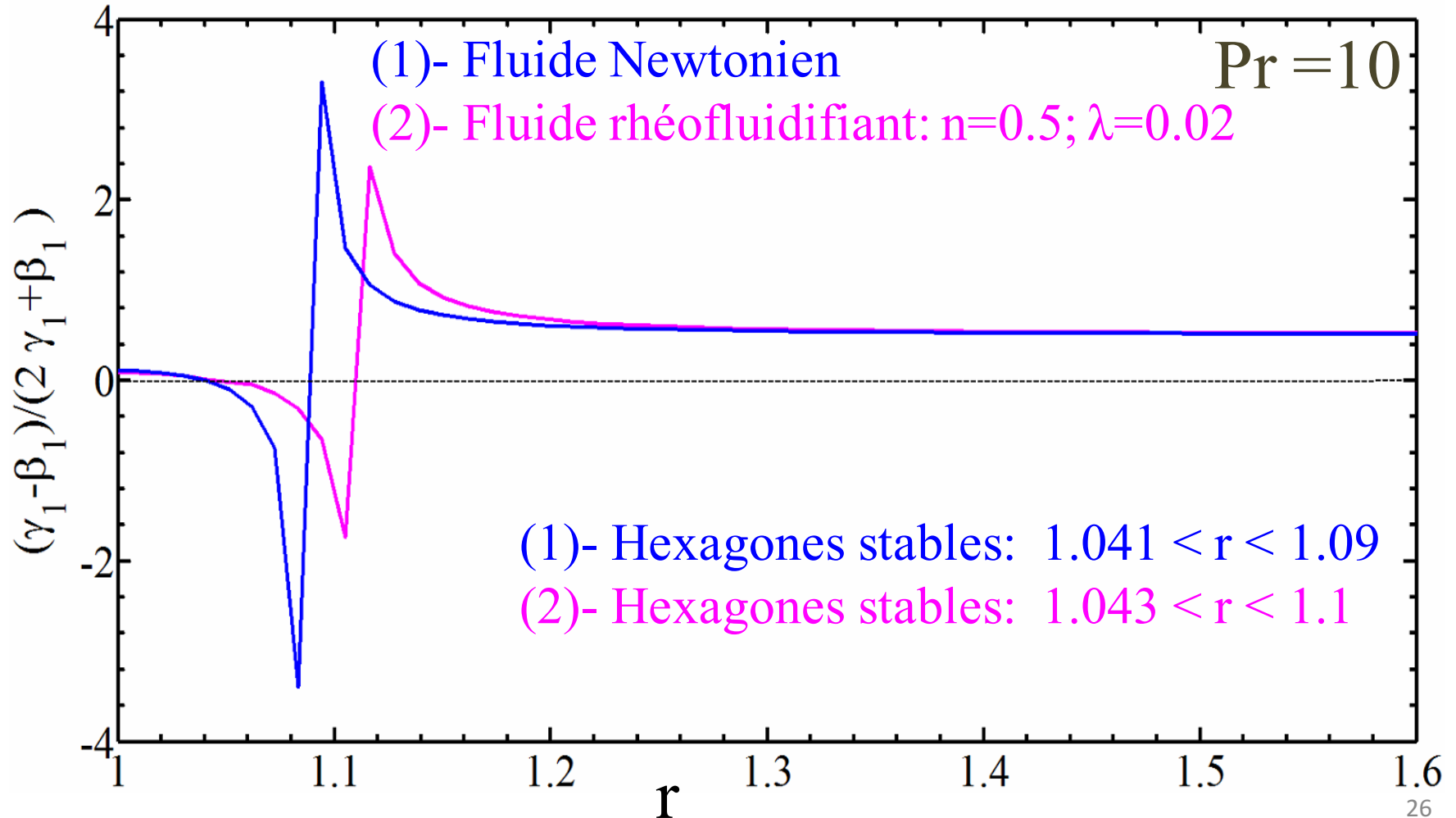
Condition critique



Stabilité de la solution stationnaire

Compétition rouleaux hexagones

Condition critique



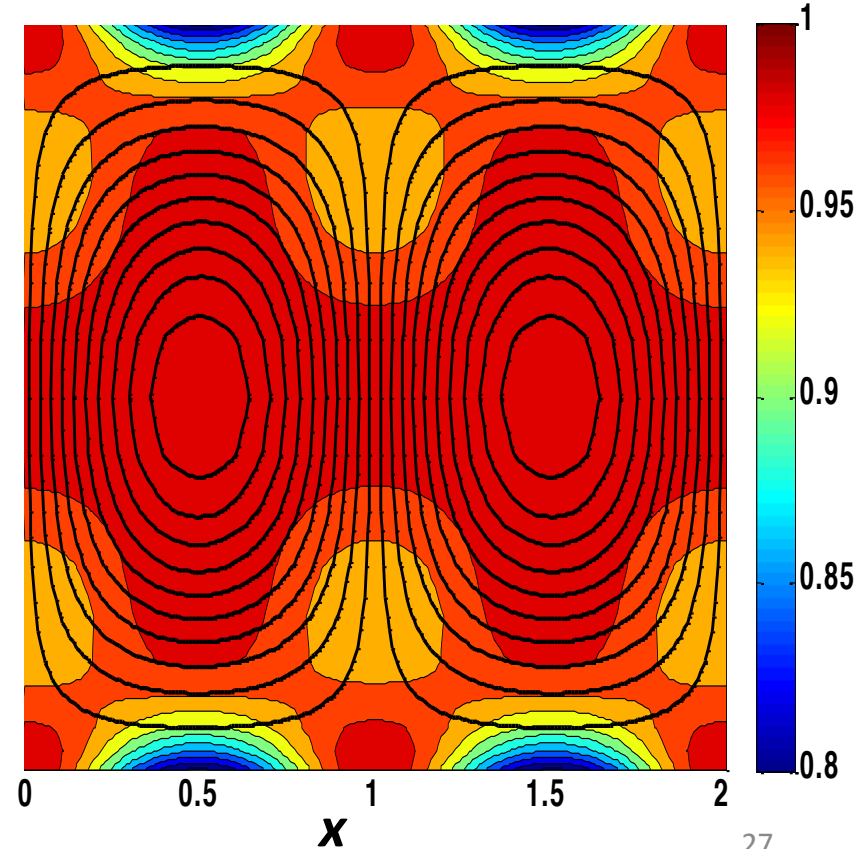
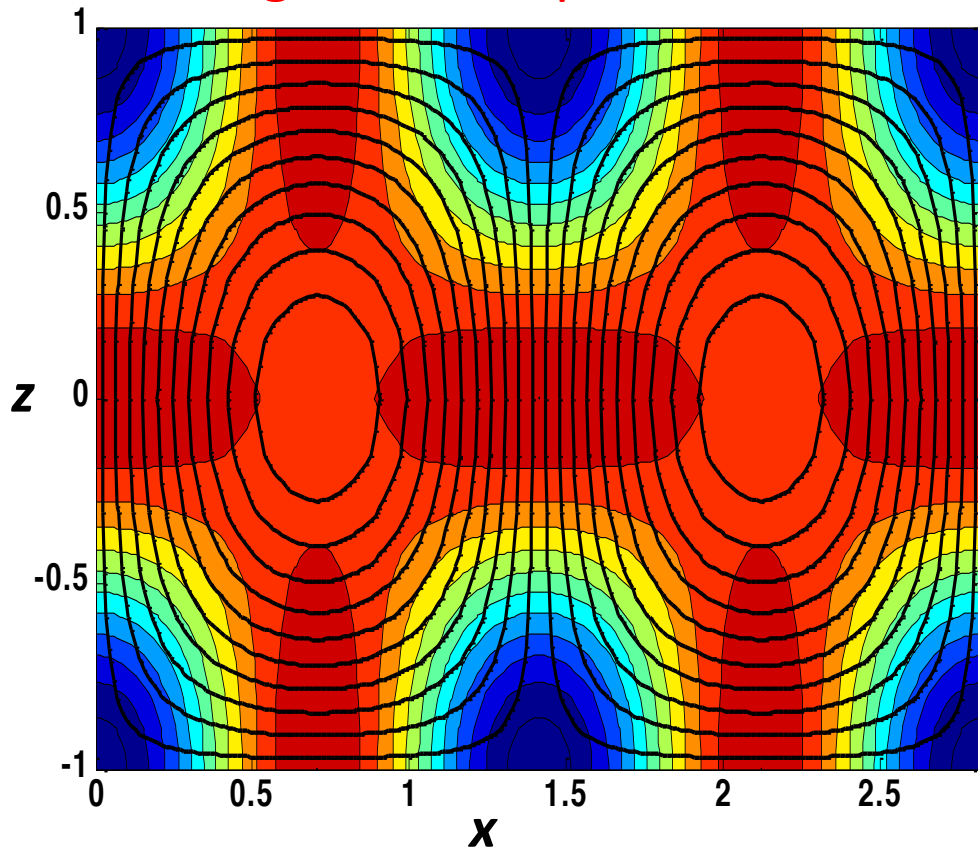
Solution rouleaux

Champ de viscosité

$$Pr = 10 \quad ; \varepsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} = 0.18 \quad ; \quad \frac{1-n}{2} \lambda^2 = 0.2 \alpha_c$$

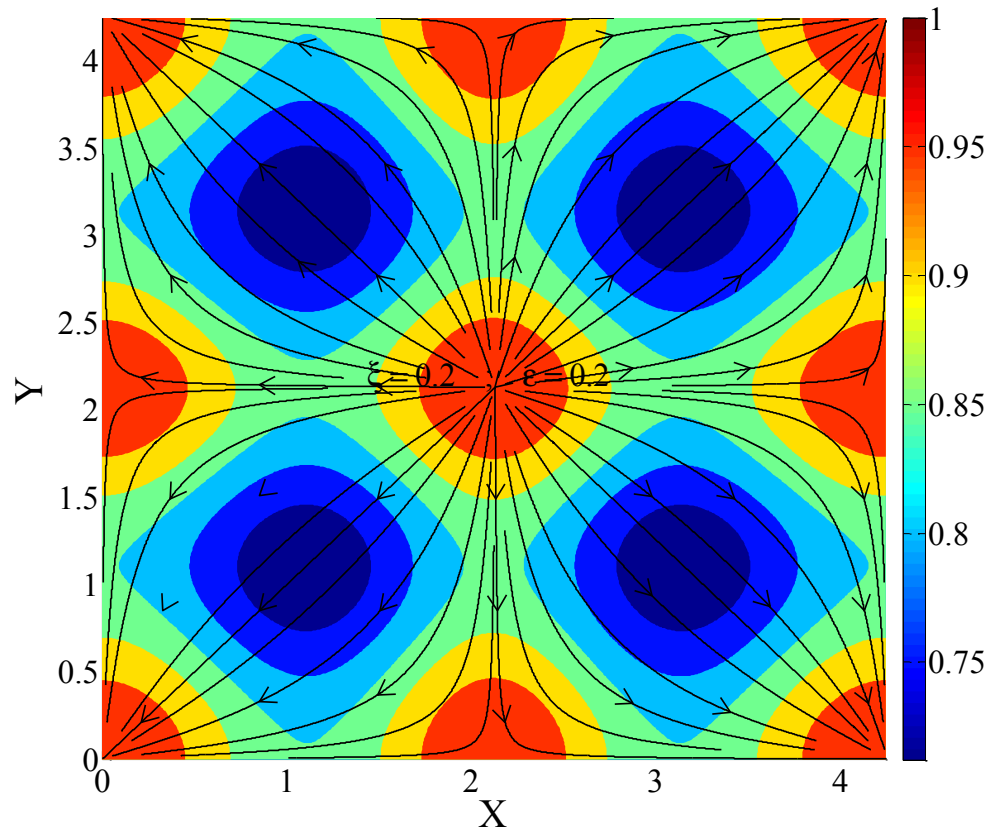
glissement parfait

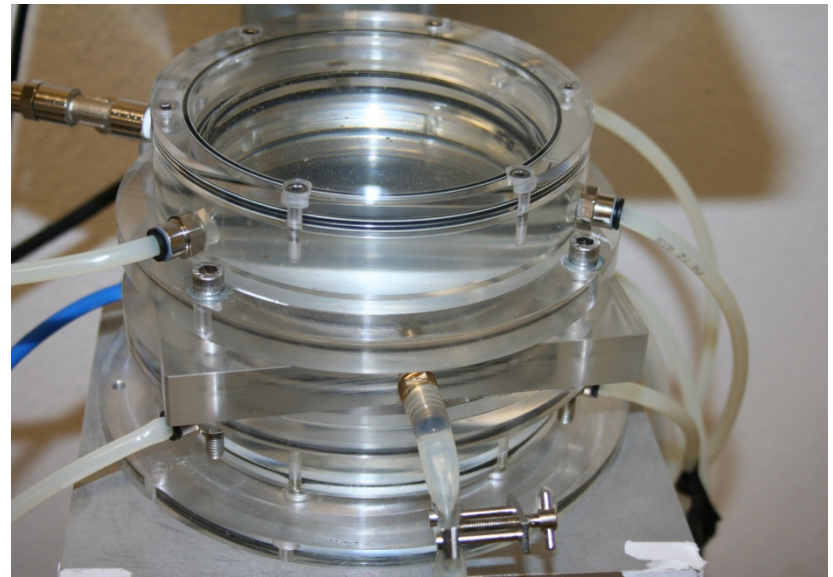
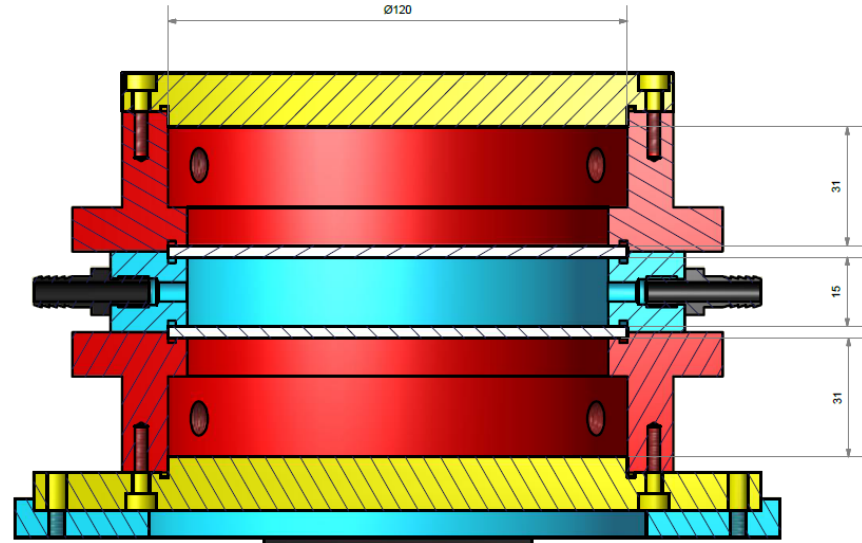
adhérence



Champ de viscosité dans un carré

$$\xi = 0.2 \quad ; \quad \varepsilon = 0.2 \quad ; \quad \alpha = 0.2 \alpha_c$$





Camera

Ecran de projection

Lentille convergente

Entrées eau chaude et froide

Lentille divergente

Source lumineuse (Led)

