

# Calcul de sensibilités par la méthode de Monte-Carlo

Jérémie De la Torre



RAPDOSEE (Albi - EMAC): Jean-Jacques Bézian, Mouna El Hafi  
LAPLACE (Toulouse - UPS): Richard Fournier  
PROMES (Odeillo - CNRS) Alain Ferrière

Journées d'Études en Rayonnement Thermique  
5-6 février 2009 - ESIP, Poitiers

# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Energie solaire à concentration :
  - Capteurs cylindro-paraboliques
  - Miroirs de Fresnel
  - Concentrateurs paraboliques (Dish-Stirling)
  - Centrales à tour(s)

# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Energie solaire à concentration :
  - Capteurs cylindro-paraboliques
  - Miroirs de Fresnel
  - Concentrateurs paraboliques (Dish-Stirling)
  - Centrales à tour(s)

# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Energie solaire à concentration :
  - Capteurs cylindro-paraboliques
  - Miroirs de Fresnel
  - Concentrateurs paraboliques (Dish-Stirling)
  - Centrales à tour(s)



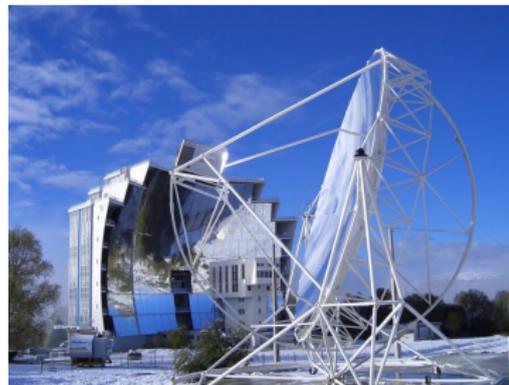
# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Energie solaire à concentration :
  - Capteurs cylindro-paraboliques
  - Miroirs de Fresnel
  - Concentrateurs paraboliques (Dish-Stirling)
  - Centrales à tour(s)



# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Energie solaire à concentration :
  - Capteurs cylindro-paraboliques
  - Miroirs de Fresnel
  - Concentrateurs paraboliques (Dish-Stirling)
  - Centrales à tour(s)



# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Energie solaire à concentration :
  - Capteurs cylindro-paraboliques
  - Miroirs de Fresnel
  - Concentrateurs paraboliques (Dish-Stirling)
  - Centrales à tour(s)



- Problématiques techniques :
  - Nombres et taille des héliostats ?
  - Surface et forme du champs ?
  - Implantation ?
  - Hauteur de la tour ?
  - Taille et forme du récepteur ?
- Enjeux :
  - Prix de l'installation (construction, fonctionnement...)
  - Efficacité (optique, thermodynamique...)
  - Atteindre des températures plus élevées
  - Homogénéité des flux sur le récepteur

- Problématiques techniques :
  - Nombres et taille des héliostats ?
  - Surface et forme du champs ?
  - Implantation ?
  - Hauteur de la tour ?
  - Taille et forme du récepteur ?
- Enjeux :
  - Prix de l'installation (construction, fonctionnement...)
  - Efficacité (optique, thermodynamique...)
  - Atteindre des températures plus élevées
  - Homogénéité des flux sur le récepteur

- Problématiques techniques :
  - Nombres et taille des héliostats ?
  - Surface et forme du champs ?
  - Implantation ?
  - Hauteur de la tour ?
  - Taille et forme du récepteur ?
- Enjeux :
  - Prix de l'installation (construction, fonctionnement...)
  - Efficacité (optique, thermodynamique...)
  - Atteindre des températures plus élevées
  - Homogénéité des flux sur le récepteur

- Soltrace
  - Logiciel libre (exécutable) NREL ;
  - Modélisation de systèmes optiques solaires pour la production d'électricité ;
  - Suivi de rayons ;
  - Optimisation du système non disponible.
- PBRT (Physically Based Rendering Technics)
  - Sources disponibles en C++ (portable et modifiable) ;
  - Synthèse d'images (adaptés aux géométries complexes 3D et outils générique) ;
  - Implémentation des algorithmes MC appropriés ;
  - Calculs de sensibilités possibles.

- Soltrace
  - Logiciel libre (exécutable) NREL ;
  - Modélisation de systèmes optiques solaires pour la production d'électricité ;
  - Suivi de rayons ;
  - Optimisation du système non disponible.
- PBRT (Physically Based Rendering Technics)
  - Sources disponibles en C++ (portable et modifiable) ;
  - Synthèse d'images (adaptés aux géométries complexes 3D et outils générique) ;
  - Implémentation des algorithmes MC appropriés ;
  - Calculs de sensibilités possibles.

# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Modélisation des transferts radiatifs par des méthodes de Monte-Carlo
- Dans les milieux participants
  - ⇒ Récepteur solaire à lit fluidisé
  - ⇒ Photo(bio)réacteur

Calcul de la puissance absorbée en différents points du photoréacteur.

Sensibilité de cette puissance à la position du point d'observation et aux paramètres géométriques du système.

# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Modélisation des transferts radiatifs par des méthodes de Monte-Carlo
- Dans les milieux participants
  - ⇒ Récepteur solaire à lit fluidisé
  - ⇒ Photo(bio)réacteur

Calcul de la puissance absorbée en différents points du photoréacteur.

Sensibilité de cette puissance à la position du point d'observation et aux paramètres géométriques du système.

# Utilisation de méthodes statistiques de Monte-Carlo pour optimiser la conception de systèmes concentrateurs d'énergie solaire

- Modélisation des transferts radiatifs par des méthodes de Monte-Carlo
- Dans les milieux participants
  - ⇒ Récepteur solaire à lit fluidisé
  - ⇒ Photo(bio)réacteur

Calcul de la puissance absorbée en différents points du photoréacteur.

Sensibilité de cette puissance à la position du point d'observation et aux paramètres géométriques du système.

**Aide à la conception et au dimensionnement**

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Algorithmes de Monte-Carlo

- Méthode statistique de calcul numérique
- Fiabilité du résultat grâce à l'écart-type
- Vaste domaine d'applications
- Estimation d'une grandeur physique  $A$  par la moyenne d'un grand nombre de réalisations aléatoires d'une observable microscopique  $X$

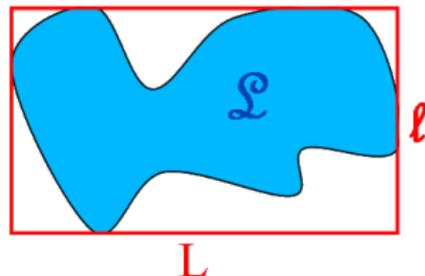
$$A = E(X) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{avec } N \text{ réalisations } x_i \text{ de la V.A. } X$$

- Deux approches :
  - Analogue
  - Intégrale
    - ⇒ Optimisation du calcul (réduction de la variance)
    - ⇒ Calcul rapide de sensibilités (fonctions dérivées)

# Exemple - Approche analogue

Estimer la surface d'un lac  $\mathcal{L}$  :

- Un artilleur tire de manière aléatoire et uniforme un grand nombre  $N$  de boulets dans le rectangle  $L \times l$
- Si le  $i^{\text{ème}}$  boulet tombe dans le lac, le poids  $w_i$  de cette réalisation vaut  $(L \cdot l)$  sinon il vaut zéro
- La surface du lac est estimée par la moyenne  $A \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i$
- La fiabilité de cette estimation est donnée par l'écart type :



$$\sigma_A = \frac{\sigma_W}{\sqrt{N}} \approx \frac{\sqrt{\langle w_i^2 \rangle_N - \langle w_i \rangle_N^2}}{\sqrt{N}}$$

# Exemple - Approche intégrale (1)

La grandeur physique à estimer peut s'exprimer mathématiquement par une intégrale :

$$I = \int_{\mathcal{D}} f(\vec{u}) d\vec{u} \quad A = \int_{x=0}^L \int_{y=0}^l H((x,y) \in \mathcal{L}) dx dy$$

- Choix d'une pdf et définition du poids associé au calcul de  $I$  :

$$I = \int_{\mathcal{D}} p_{\vec{U}}(\vec{u}) \frac{f(\vec{u})}{p_{\vec{U}}(\vec{u})} d\vec{u} = \int_{\mathcal{D}} p_{\vec{U}}(\vec{u}) w_I(\vec{u}) d\vec{u}$$

$$\text{Soit } A = \int_{x=0}^L \int_{y=0}^l \frac{1}{Ll} w_A(x,y) dx dy$$

$$\text{avec } w_A(x,y) = \frac{H((x,y) \in \mathcal{L})}{p_X(x)p_Y(y)} \text{ et } p_X(x) = \frac{1}{L}; p_Y(y) = \frac{1}{l}$$

## Exemple - Approche intégrale (2)

- Génération aléatoire  $\{\vec{u}_j\}_{j=1,N} \Rightarrow \{w_{I,j} = w_I(\vec{u}_j)\}_{j=1,N}$   
soit dans l'exemple :  
 $\{(x_j, y_j)\}_{j=1,N} \in ([0, L] \times [0, l])^N \Rightarrow \{w_{A,j} = w_A(x_j, y_j)\}_{j=1,N}$
- On en déduit une estimation de l'intégrale correspondant à la grandeur physique étudiée ainsi que sa précision :

$$I = E(W_I) = A \approx a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{I,i}$$
$$\sigma_I = \sigma_A \approx \frac{\sigma_a}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{I,i}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{I,i}\right)^2}}{\sqrt{N}}$$

## Exemple - Approche intégrale (2)

- Génération aléatoire  $\{\vec{u}_j\}_{j=1,N} \Rightarrow \{w_{I,j} = w_I(\vec{u}_j)\}_{j=1,N}$   
soit dans l'exemple :  
 $\{(x_j, y_j)\}_{j=1,N} \in ([0, L] \times [0, l])^N \Rightarrow \{w_{A,j} = w_A(x_j, y_j)\}_{j=1,N}$
- On en déduit une estimation de l'intégrale correspondant à la grandeur physique étudiée ainsi que sa précision :

$$I = E(W_I) = A \approx a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{I,i}$$
$$\sigma_I = \sigma_A \approx \frac{\sigma_a}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{I,i}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{I,i}\right)^2}}{\sqrt{N}}$$

On peut distinguer deux types de sensibilité :

- Sensibilités paramétriques :
  - simple si  $W_I$  ne dépend pas de la pdf ;
  - quelconque sinon.

$$\partial_\lambda I = \partial_\lambda \left( \int_{\mathcal{D}} \rho_{\bar{U}}(\vec{u}) w(\vec{u}) d\vec{u} \right) = \int_{\mathcal{D}} \rho_{\bar{U}}(\vec{u}) \left( \partial_\lambda w(\vec{u}) + w(\vec{u}) \frac{\partial_\lambda \rho_{\bar{U}}(\vec{u})}{\rho_{\bar{U}}(\vec{u})} \right) d\vec{u}$$

- Sensibilités à la déformation du domaine
  - quand le domaine d'intégration dépend du paramètre ;
  - quand des tests de rejet apparaissent dans la fonction à intégrer.

$$\partial_\lambda I = \int_{\mathcal{D}} \rho_{\bar{U}}(\vec{u}) \left( \partial_\lambda w(\vec{u}) + w(\vec{u}) \frac{\partial_\lambda \rho_{\bar{U}}(\vec{u})}{\rho_{\bar{U}}(\vec{u})} \right) d\vec{u} + \frac{\text{div}(\rho_{\bar{U}}(\vec{u}) w(\vec{u}) \mathbf{v}_\lambda(\vec{u}))}{\rho_{\bar{U}}(\vec{u})} d\vec{u}$$

On peut distinguer deux types de sensibilité :

- Sensibilités paramétriques :
  - simple si  $W_I$  ne dépend pas de la pdf ;
  - quelconque sinon.

$$\partial_{\lambda} I = \partial_{\lambda} \left( \int_{\mathcal{D}} \rho_{\vec{U}}(\vec{u}) w(\vec{u}) d\vec{u} \right) = \int_{\mathcal{D}} \rho_{\vec{U}}(\vec{u}) \left( \partial_{\lambda} w(\vec{u}) + w(\vec{u}) \frac{\partial_{\lambda} \rho_{\vec{U}}(\vec{u})}{\rho_{\vec{U}}(\vec{u})} \right) d\vec{u}$$

- Sensibilités à la déformation du domaine
  - quand le domaine d'intégration dépend du paramètre ;
  - quand des tests de rejet apparaissent dans la fonction à intégrer.

$$\partial_{\lambda} I = \int_{\mathcal{D}} \rho_{\vec{U}}(\vec{u}) \left( \partial_{\lambda} w(\vec{u}) + w(\vec{u}) \frac{\partial_{\lambda} \rho_{\vec{U}}(\vec{u})}{\rho_{\vec{U}}(\vec{u})} \right) d\vec{u} + \frac{\text{div}(\rho_{\vec{U}}(\vec{u}) w(\vec{u}) \mathbf{v}_{\lambda}(\vec{u}))}{\rho_{\vec{U}}(\vec{u})} d\vec{u}$$

On peut distinguer deux types de sensibilité :

- Sensibilités paramétriques :
  - simple si  $W_I$  ne dépend pas de la pdf ;
  - quelconque sinon.

$$\partial_\lambda I = \partial_\lambda \left( \int_{\mathcal{D}} \rho_{\vec{U}}(\vec{u}) w(\vec{u}) d\vec{u} \right) = \int_{\mathcal{D}} \rho_{\vec{U}}(\vec{u}) \left( \partial_\lambda w(\vec{u}) + w(\vec{u}) \frac{\partial_\lambda \rho_{\vec{U}}(\vec{u})}{\rho_{\vec{U}}(\vec{u})} \right) d\vec{u}$$

- Sensibilités à la déformation du domaine
  - quand le domaine d'intégration dépend du paramètre ;
  - quand des tests de rejet apparaissent dans la fonction à intégrer.

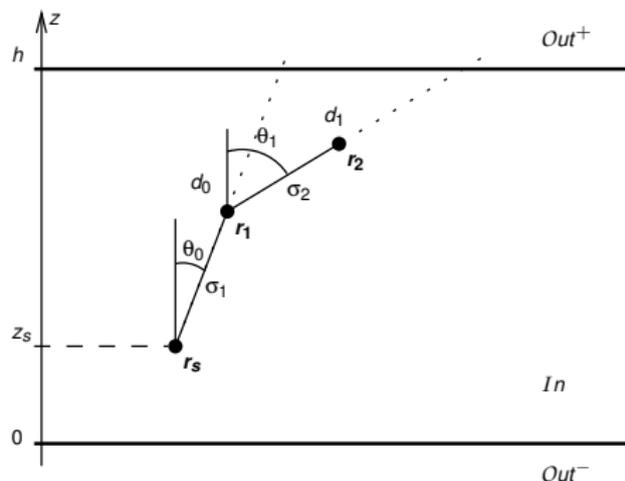
$$\partial_\lambda I = \int_{\mathcal{D}} \rho_{\vec{U}}(\vec{u}) \left( \partial_\lambda w(\vec{u}) + w(\vec{u}) \frac{\partial_\lambda \rho_{\vec{U}}(\vec{u})}{\rho_{\vec{U}}(\vec{u})} \right) d\vec{u} + \frac{\text{div}(\rho_{\vec{U}}(\vec{u}) w(\vec{u}) \mathbf{v}_\lambda(\vec{u}))}{\rho_{\vec{U}}(\vec{u})} d\vec{u}$$

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique**
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

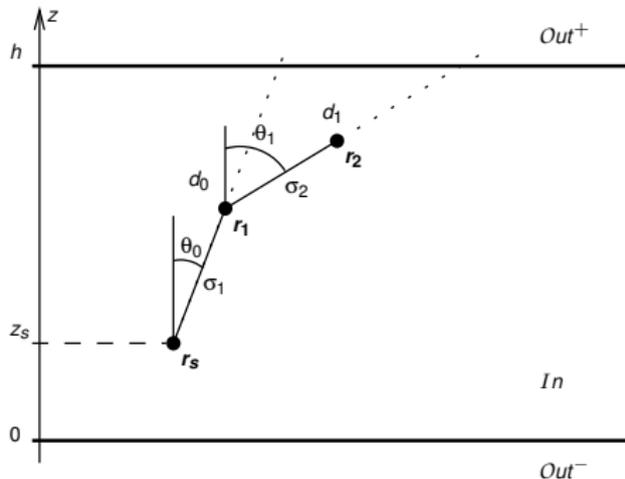
# Présentation du problème

- Slab 1D uniforme de gaz absorbant  $k_a$  et diffusant  $k_s$
- Source lumineuse isotrope monochromatique ponctuelle de position  $r_s$
- Estimation de la fraction  $T_{up}$  d'énergie transmise par le gaz jusqu'en haut de la paroi.
- Estimation de la sensibilité  $\partial_{z_s} T_{up}$  de cette grandeur à la position de la source ( $z_s$ )

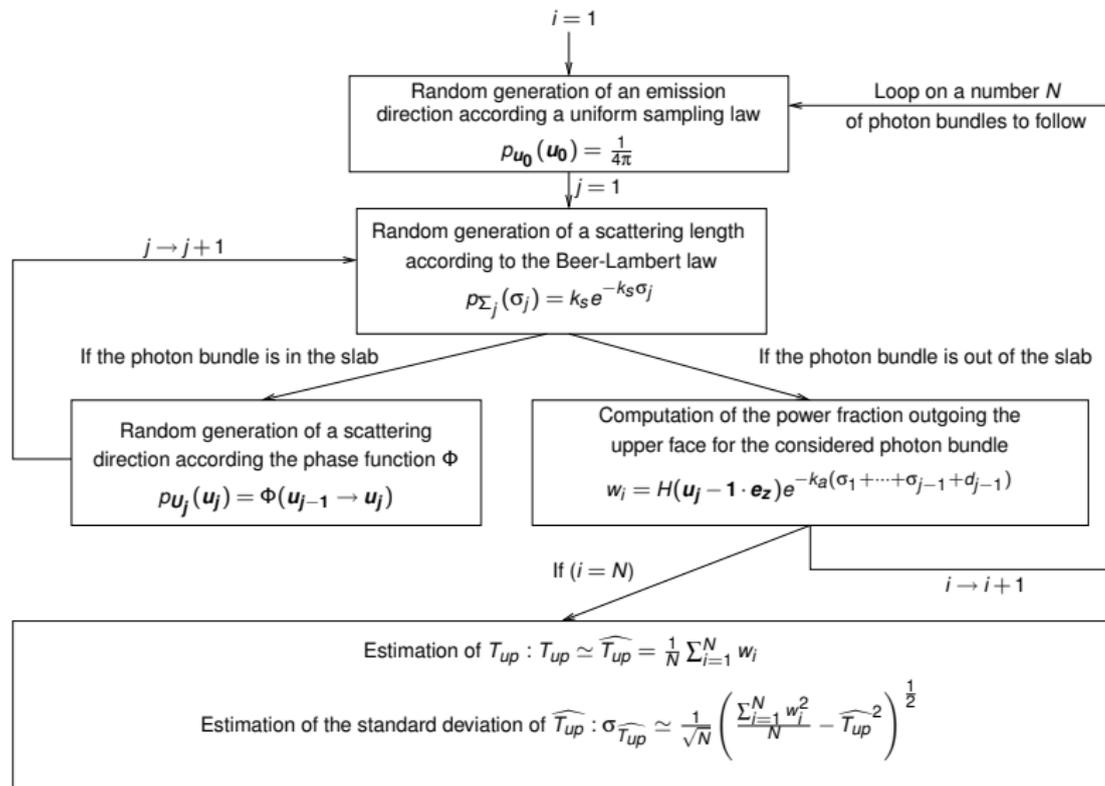


# Présentation du problème

- Slab 1D uniforme de gaz absorbant  $k_a$  et diffusant  $k_s$
- Source lumineuse isotrope monochromatique ponctuelle de position  $r_s$
- Estimation de la fraction  $T_{up}$  d'énergie transmise par le gaz jusqu'en haut de la paroi.
- Estimation de la sensibilité  $\partial_{z_s} T_{up}$  de cette grandeur à la position de la source ( $z_s$ )



# Présentation de l'algorithme



# Formulation basée sur des intégrales sur les directions et les longueurs de diffusion

On traduit l'algorithme sous la forme d'une intégrale :

$$T_{up} = \int_{4\pi} p_{\vec{u}_0}(\vec{u}_0) d\vec{u}_0 \int_0^{+\infty} p_{\Sigma_1}(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{4\pi} p_{\vec{u}_1}(\vec{u}_1, \vec{u}_0) d\vec{u}_1 \\ \int_0^{+\infty} p_{\Sigma_2}(\sigma_2) d\sigma_2 \cdots w(\vec{u}_0, \sigma_1, \vec{u}_1, \sigma_2, \dots)$$

avec l'expression suivante du poids :

$$w(\vec{u}_0, \sigma_1, \vec{u}_1, \sigma_2, \dots) = H(\vec{u}_0 \cdot \vec{e}_z) H(\sigma_1 - d_0) e^{-k_a d_0} \\ + H(d_0 - \sigma_1) e^{-k_a \sigma_1} \left\{ H(\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_z) H(\sigma_2 - d_1) e^{-k_a d_1} \right. \\ \left. + H(d_1 - \sigma_2) e^{-k_a \sigma_2} \{ \dots \} \right\}$$

# Modification de l'intégrale en vue du calcul de sensibilité

- D'après le schéma du système :

$$d_i = \frac{1}{\cos \theta_i} \left( h - z_S + \sum_{k=1}^i \sigma_k \cos \theta_{i-1} \right)$$

- $d_i$  dépend du paramètre étudié  $z_S$
- Dériver le poids impose de dériver  $H(d_{i+1} - \sigma_i)$   
Apparition de fonctions *Dirac* impossible à estimer par MC

⇒ Modification de l'expression de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} H(d_{i-1} - \sigma_i) \cdots d\sigma_i = \int_0^{d_{i-1}} \cdots d\sigma_i$$

# Modification de l'intégrale en vue du calcul de sensibilité

On exprime  $T_{up} = \sum_{i=1}^{+\infty} T_{up,i}$  avec  $T_{up,i}$  est la contribution de tous les paquets de photons qui sortent du slab par le haut après avoir vécu  $i - 1$  diffusions :

$$T_{up,i} = \int_{4\pi} p_{\vec{U}_0}(\vec{u}_0) d\vec{u}_0 \int_0^{d_0} p_{\Sigma_1}(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{4\pi} p_{\vec{U}_1}(\vec{u}_1, \vec{u}_0) d\vec{u}_1 \int_0^{d_1} p_{\Sigma_2}(\sigma_2) d\sigma_2 \\ \cdots \int_{4\pi} p_{\vec{U}_{i-1}}(\vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i-2}) d\vec{u}_{i-1} \int_{d_{i-1}}^{+\infty} p_{\Sigma_i}(\sigma_i) d\sigma_i \\ H(\vec{u}_{i-1} \cdot \vec{e}_z) e^{-k_a(\sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1} + d_{i-1})}$$

# Expression de la sensibilité

Sachant  $T_{up} = \sum_{i=1}^{+\infty} T_{up,i}$ , on a  $\partial_{z_S} T_{up} = \sum_{i=1}^{+\infty} \partial_{z_S} T_{up,i}$  avec :

# Expression de la sensibilité

Sachant  $T_{up} = \sum_{i=1}^{+\infty} T_{up,i}$ , on a  $\partial_{z_S} T_{up} = \sum_{i=1}^{+\infty} \partial_{z_S} T_{up,i}$  avec :

$$\begin{aligned} \partial_{z_S} T_{up,i} = & \int_{4\pi} p_{\vec{U}_0}(\vec{u}_0) d\vec{u}_0 \int_0^{d_0} p_{\Sigma_1}(\sigma_1) d\sigma_1 \cdots \int_{4\pi} p_{\vec{U}_{i-1}}(\vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i-2}) d\vec{u}_{i-1} \\ & \int_{d_{i-1}}^{+\infty} p_{\Sigma_i}(\sigma_i) d\sigma_i \quad H(\vec{u}_{i-1} \cdot \vec{e}_z) \left\{ \partial_{z_S} \left( e^{-k_a(\sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1} + d_{i-1})} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\vec{\nabla} \cdot \left[ e^{-k_a(\sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1} + d_i)} \left( \prod_{k=1}^i p_{\Sigma_j}(\sigma_j) \right) \vec{V}_{z_S} \right]}{\prod_{k=1}^i p_{\Sigma_j}(\sigma_j)} \right\} \end{aligned}$$

# Expression de la sensibilité

L'expression du vecteur vitesse se détermine d'après les formules développés lors de la Thèse de Maxime Roger<sup>1</sup>.

$$\begin{aligned}V_{z_S, \sigma_1}(\sigma_1) &= -\frac{\sigma_1}{d_0 \cos \theta_0} \quad ; \quad V_{z_S, \sigma_2}(\sigma_2) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{d_0 d_1 \cos \theta_1} - \frac{\sigma_2}{d_1 \cos \theta_1} \\ &\vdots \\ V_{z_S, \sigma_k}(\sigma_k) &= \left( \sum_{j=1}^{k-1} -\frac{\cos \theta_{j-1}}{\cos \theta_{k-1}} V_{z_S, \sigma_j} \right) \frac{\sigma_k}{d_{k-1}} - \frac{\sigma_k}{d_{k-1} \cos \theta_{k-1}} \\ &\vdots \\ V_{z_S, \sigma_i}(\sigma_i) &= \sum_{j=1}^{i-1} -\frac{\cos \theta_{j-1}}{\cos \theta_{i-1}} V_{z_S, \sigma_j} - \frac{1}{\cos \theta_{i-1}}\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> ROGER M., BLANCO S., EL HAFI M., and FOURNIER R. Monte Carlo estimates of domain-deformation sensitivities. *Physical Review Letter*, 95(18), october 2005.

ROGER M. *Modèles de sensibilité dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo : Illustrations en transfert radiatif*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006.

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique**
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale**
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Reformulation basée sur des intégrales sur les positions de diffusion

Nouvelle intégrale :

$$T_{up} = \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 \dots \left\{ H(\mathbf{r}_1 \in Out^+) e^{-k_a d_0} + H(\mathbf{r}_1 \in In) \right. \\ \left. e^{-k_a \sigma_1} \left\{ H(\mathbf{r}_2 \in Out^+) e^{-k_a d_1} + H(\mathbf{r}_2 \in In) e^{-k_a \sigma_2} \{ \dots \} \right\} \right\}$$

- Les fonctions d'Heaviside  $H(\mathbf{r}_i \in Out^+)$  et  $H(\mathbf{r}_i \in In)$  ne dépendent plus de la position de la source
- Domaine d'intégration indépendant du paramètre  $z_s$
- Inutile de séparer les intégrales en plusieurs termes
- Sensibilité paramétrique

# Reformulation basée sur des intégrales sur les positions de diffusion

Nouvelle intégrale :

$$T_{up} = \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 \dots \left\{ H(\mathbf{r}_1 \in Out^+) e^{-k_a d_0} + H(\mathbf{r}_1 \in In) \right. \\ \left. e^{-k_a \sigma_1} \left\{ H(\mathbf{r}_2 \in Out^+) e^{-k_a d_1} + H(\mathbf{r}_2 \in In) e^{-k_a \sigma_2} \{ \dots \} \right\} \right\}$$

- Les fonctions d'Heaviside  $H(\mathbf{r}_i \in Out^+)$  et  $H(\mathbf{r}_i \in In)$  ne dépendent plus de la position de la source
- Domaine d'intégration indépendant du paramètre  $z_s$
- Inutile de séparer les intégrales en plusieurs termes
- Sensibilité paramétrique

# Reformulation basée sur des intégrales sur les positions de diffusion

Nouvelle intégrale :

$$T_{up} = \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 \dots \left\{ H(\mathbf{r}_1 \in Out^+) e^{-ka d_0} + H(\mathbf{r}_1 \in In) \right. \\ \left. e^{-ka \sigma_1} \left\{ H(\mathbf{r}_2 \in Out^+) e^{-ka d_1} + H(\mathbf{r}_2 \in In) e^{-ka \sigma_2} \{ \dots \} \right\} \right\}$$

- Les fonctions d'Heaviside  $H(\mathbf{r}_i \in Out^+)$  et  $H(\mathbf{r}_i \in In)$  ne dépendent plus de la position de la source
- Domaine d'intégration indépendant du paramètre  $z_s$
- Inutile de séparer les intégrales en plusieurs termes
- Sensibilité paramétrique

# Reformulation basée sur des intégrales sur les positions de diffusion

Nouvelle intégrale :

$$T_{up} = \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 \dots \left\{ H(\mathbf{r}_1 \in Out^+) e^{-k_a d_0} + H(\mathbf{r}_1 \in In) \right. \\ \left. e^{-k_a \sigma_1} \left\{ H(\mathbf{r}_2 \in Out^+) e^{-k_a d_1} + H(\mathbf{r}_2 \in In) e^{-k_a \sigma_2} \{ \dots \} \right\} \right\}$$

- Les fonctions d'Heaviside  $H(\mathbf{r}_i \in Out^+)$  et  $H(\mathbf{r}_i \in In)$  ne dépendent plus de la position de la source
- Domaine d'intégration indépendant du paramètre  $z_s$
- Inutile de séparer les intégrales en plusieurs termes
- Sensibilité paramétrique

# Reformulation basée sur des intégrales sur les positions de diffusion

Nouvelle intégrale :

$$T_{up} = \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 \dots \left\{ H(\mathbf{r}_1 \in Out^+) e^{-k_a d_0} + H(\mathbf{r}_1 \in In) \right. \\ \left. e^{-k_a \sigma_1} \left\{ H(\mathbf{r}_2 \in Out^+) e^{-k_a d_1} + H(\mathbf{r}_2 \in In) e^{-k_a \sigma_2} \{ \dots \} \right\} \right\}$$

- Les fonctions d'Heaviside  $H(\mathbf{r}_i \in Out^+)$  et  $H(\mathbf{r}_i \in In)$  ne dépendent plus de la position de la source
- Domaine d'intégration indépendant du paramètre  $z_s$
- Inutile de séparer les intégrales en plusieurs termes
- **Sensibilité paramétrique**

# Nouvelle expression de la sensibilité

$$\partial_{z_S} T_{up} = \int_{\mathcal{R}^3} p_{R_1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \int_{\mathcal{R}^3} p_{R_2}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 \dots w_{z_S}$$

avec :

$$\begin{aligned} w_{z_S} = & H(\mathbf{r}_1 \in Out^+) e^{-k_a d_0} \\ & \left[ \frac{k_a}{\cos \theta_0} \left( 1 + (e - z_S) \left( \frac{\cos \theta_0}{\sigma_1} - \frac{1}{z_1 - z_S} \right) \right) + \cos \theta_0 \left( k_s + \frac{2}{\sigma_1} \right) \right] \\ & + H(\mathbf{r}_1 \in In) e^{-k_a \sigma_1} \left[ \cos \theta_0 \left( k_a + k_s + \frac{2}{\sigma_1} \right) \right] \\ & \left\{ H(\mathbf{r}_2 \in Out^+) e^{-k_a d_1} + H(\mathbf{r}_2 \in In) \dots \right\} \end{aligned}$$

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Résultats

$z_S$	$k_S$	$T_{up}$	$\sigma_{T_{up}}$	$\partial_{z_S} T_{up}^{(a)}$	$\sigma_{\partial_{z_S} T_{up}}^{(a)}$	$\partial_{z_S} T_{up}^{(b)}$	$\sigma_{\partial_{z_S} T_{up}}^{(b)}$
0.6	0.01	0.490	$1.55 \cdot 10^{-4}$	0.0417	$5.48 \cdot 10^{-4}$	0.0466	$5.06 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.01	0.495	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.0430	$1.10 \cdot 10^{-3}$	0.0484	$5.09 \cdot 10^{-3}$
0.8	0.01	0.501	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.0469	$8.98 \cdot 10^{-4}$	0.0509	$5.13 \cdot 10^{-2}$
0.9	0.01	0.507	$1.57 \cdot 10^{-4}$	0.0456	$4.69 \cdot 10^{-3}$	0.0557	$5.17 \cdot 10^{-3}$
0.6	0.1	0.503	$1.55 \cdot 10^{-4}$	does not converge		0.183	0.0444
0.7	0.1	0.518	$1.56 \cdot 10^{-4}$	does not converge		0.189	0.0445
0.8	0.1	0.533	$1.56 \cdot 10^{-4}$	does not converge		0.230	0.0529
0.9	0.1	0.551	$1.56 \cdot 10^{-4}$	does not converge		0.242	0.0533
The above results have been obtained with $k_a = 0.01$							
0.6	0.01	0.194	$7.90 \cdot 10^{-5}$	0.354	$1.32 \cdot 10^{-4}$	0.349	$3.77 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.01	0.235	$9.11 \cdot 10^{-5}$	0.456	$1.75 \cdot 10^{-4}$	0.446	$6.35 \cdot 10^{-3}$
0.8	0.01	0.288	$1.06 \cdot 10^{-4}$	0.615	$2.20 \cdot 10^{-4}$	0.604	$7.18 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.01	0.364	$1.25 \cdot 10^{-4}$	0.917	$3.71 \cdot 10^{-4}$	0.903	$8.19 \cdot 10^{-3}$
0.6	0.1	0.193	$7.83 \cdot 10^{-5}$	0.379	0.0112	0.378	0.0193
0.7	0.1	0.236	$9.04 \cdot 10^{-5}$	0.474	$1.82 \cdot 10^{-3}$	0.474	0.0273
0.8	0.1	0.290	$1.05 \cdot 10^{-4}$	0.634	$3.84 \cdot 10^{-3}$	0.639	0.0333
0.9	0.1	0.370	$1.24 \cdot 10^{-4}$	0.953	$1.44 \cdot 10^{-3}$	0.944	0.0309
0.6	1	0.182	$7.33 \cdot 10^{-5}$	does not converge		does not converge	
0.7	1	0.232	$8.57 \cdot 10^{-5}$	does not converge		does not converge	
0.8	1	0.300	$1.00 \cdot 10^{-5}$	does not converge		does not converge	
0.9	1	0.399	$1.18 \cdot 10^{-5}$	does not converge		does not converge	
The above results have been obtained with $k_a = 1$							

- 10 millions de tirages
- Bonne estimation de la fraction transmise  $T_{up}$
- Sensibilités cohérentes entre les deux formulations
- Problèmes de convergence
  - Quand  $k_s$  augment pour un  $k_a$  donné (augmentation de l'épaisseur optique).
  - Amélioration possible grâce à des techniques de réduction de la variance.

# Discussion

- 10 millions de tirages
- Bonne estimation de la fraction transmise  $T_{up}$
- Sensibilités cohérentes entre les deux formulations
- Problèmes de convergence
  - Quand  $k_s$  augment pour un  $k_a$  donné (augmentation de l'épaisseur optique).
  - Amélioration possible grâce à des techniques de réduction de la variance.

La nouvelle formulation estime rigoureusement la même quantité

$$\partial_{z_s} T_{up}$$

Grande simplification de la mise en oeuvre des calculs de sensibilités  
Méthode prometteuse en géométries complexes 3D

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
  - Contexte
- 2 Méthodes de Monté-Carlo
  - Généralités
  - Approche analogue
  - Approche intégrale
  - Calculs de sensibilité
- 3 Mise en oeuvre sur un exemple académique
  - Présentation du problème
  - Présentation de l'algorithme
  - Première formulation intégrale
  - Seconde formulation intégrale
- 4 Résultats et discussion
- 5 Conclusion et perspectives

# Conclusion

- Validation d'une méthode de calcul de sensibilité par MMC alternative à celle présentée dans "M.Roger - *Physical Review Letter*";
  - ⇒ Mise en oeuvre beaucoup moins lourde ;
- Possibilité de traiter des géométries complexes 3D ;
- Utilisation dans le contexte d'optimisation de procédés.

# Conclusion

- Validation d'une méthode de calcul de sensibilité par MMC alternative à celle présentée dans "M.Roger - *Physical Review Letter*";
  - ⇒ Mise en oeuvre beaucoup moins lourde ;
- Possibilité de traiter des géométries complexes 3D ;
- Utilisation dans le contexte d'optimisation de procédés.

# Conclusion

- Validation d'une méthode de calcul de sensibilité par MMC alternative à celle présentée dans "M.Roger - *Physical Review Letter*";
  - ⇒ Mise en oeuvre beaucoup moins lourde ;
- Possibilité de traiter des géométries complexes 3D ;
- Utilisation dans le contexte d'optimisation de procédés.

# Conclusion

- Validation d'une méthode de calcul de sensibilité par MMC alternative à celle présentée dans "M.Roger - *Physical Review Letter*";
  - ⇒ Mise en oeuvre beaucoup moins lourde ;
- Possibilité de traiter des géométries complexes 3D ;
- Utilisation dans le contexte d'optimisation de procédés.

- Améliorer la convergence par des techniques de réduction de la variance ;
- Intégrer la méthode proposée à des outils de synthèse d'image (PBRT) ;
- Modélisation des transferts radiatifs dans
  - des photo(bio)réacteurs
  - des récepteurs solaires à lit fluidisé
  - des champs d'héliostats

- Améliorer la convergence par des techniques de réduction de la variance ;
- Intégrer la méthode proposée à des outils de synthèse d'image (PBRT) ;
- Modélisation des transferts radiatifs dans
  - des photo(bio)réacteurs
  - des récepteurs solaires à lit fluidisé
  - des champs d'héliostats

- Améliorer la convergence par des techniques de réduction de la variance ;
- Intégrer la méthode proposée à des outils de synthèse d'image (PBRT) ;
- Modélisation des transferts radiatifs dans
  - des photo(bio)réacteurs
  - des récepteurs solaires à lit fluidisé
  - des champs d'héliostats

Merci de votre attention...

